



УДК 539.3: 539.3/.6:62-762.444

**Б.М. Абдеев, Т.Ф. Брим**

ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

**А.Ж. Кульсеитов**

Департамент индустриального развития МИИТ РК, г. Астана

**К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ РАДИАЛЬНЫХ  
ЭЛАСТОМЕРНЫХ УПЛОТНИТЕЛЬНЫХ КОЛЕЦ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ  
ДЛЯ УСЛОВИЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАТЯГА**

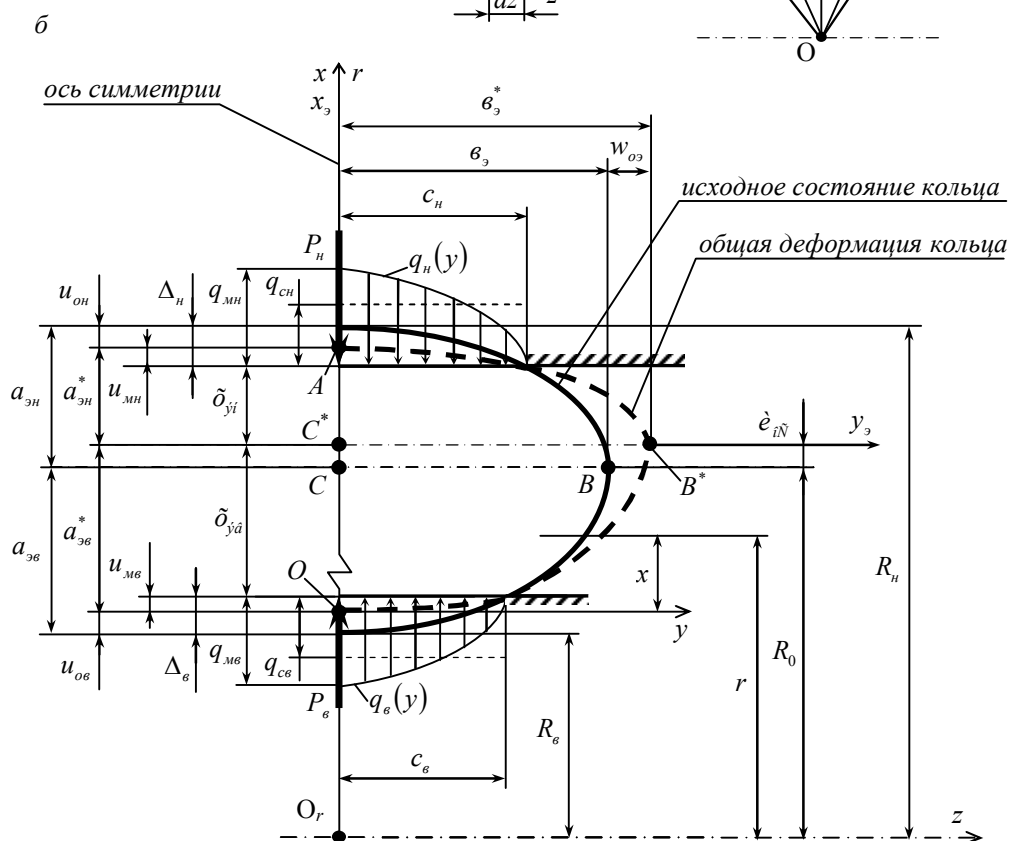
Наиболее распространенным и универсальным видом герметизирующих элементов гидравлических, пневматических и вакуумных систем современных машин, аппаратов и приборов являются эластичные кольца круглого и эллиптического сечений [1] из различных синтетических резин (эластомеров), которые, в отличие от манжет, шевронных и других уплотнителей, способны с большой эффективностью герметизировать одно- и двухстороннее давление.

Расчетная схема поставленной задачи представляет собой кольцо несимметричного сплюснутого овального профиля, имеющее в сечении два плавнсопряженных полуэллипса (рис. 1, а), что, по сравнению с более скручиваемым и менее надежным при эксплуатации круглым сечением ( $a_{эв} = a_{эн} = e_э$ ) [1], а также симметричным эллиптическим ( $a_{эв} = a_{эн} < e_э$ ), позволяет осуществлять за счет большего числа варьируемых параметров, уже на стадии математического моделирования, реализацию процесса регулирования (оптимизации) начальных контактных давлений и натягов.

В машиностроении и при проектировании строительных конструкций широкое распространение получил метод расчета колец большой и малой кривизны [2], основанный на модели жесткого криволинейного бруса, поперечные сечения которого при нагружении не деформируются, а лишь перемещаются и поворачиваются в своей плоскости. Для эластичных радиальных уплотнителей, монтируемых с натягом, этот способ решения данной задачи совершенно не пригоден ввиду большой деформативности сечения кольцевого элемента.

Известная справочно-нормативная методика расчета на прочность и жесткость эластомерных герметизирующих колец [1] базируется на некорректной, с физико-математической точки зрения, предельно-упрощенной теории линейного напряженного состояния материала ( $\sigma_\psi = \sigma_z = 0$ , рис. 1, а), которая не учитывает конструктивные особенности уплотнителя и схему его нагружения.

Данная работа посвящена аналитическому исследованию функциональных контактных характеристик  $P_n, P_v, c_n, c_v, q_{cv}, u_{mn}, u_{mv}$  по «жесткой» и деформированной ( $P_n^*, P_v^*, c_n^*, c_v^*, q_{cv}^*, u_{mn}^*, u_{mv}^*$ ) схемам в зависимости от нормированного контактного давления  $q_{cn} \geq 0$  (рис. 1) при рекомендуемом [1] диапазоне  $1,5 \text{ МПа}(\text{Н/мм}^2) \leq q_{cn} \leq 3 \text{ МПа}(\text{Н/мм}^2)$  для радиальных эластомерных уплотнителей с учетом температурного градиента  $\Delta\theta$ ,



В основу представляемой статьи положены следующие предпосылки, гипотезы и до-

пущения уточненной механико-математической модели [4], учитывающей (рис. 1, а) две компоненты напряжений из четырех ( $\sigma_r \neq 0$ ,  $\sigma_\psi \neq 0$ ,  $\sigma_z = \tau = 0$ ):

- материал уплотнителя – эластомер (синтетическая резина) – однородный, сплошной, изотропный и подчиняется закону Гука при наибольшей относительной линейной деформации  $|\varepsilon_{max}| \leq 0,25$  [1,6];

- не учитываются собственный вес конструкции (объемные силы) и трение на площадках контакта;

- контртела (цилиндр и поршень), по отношению к уплотнителю, предполагаются абсолютно жесткими;

- отсутствуют внутренние источники тепла в элементарном объеме кольца (точечные источники) [7];

- исследуемый процесс – изотермический и стационарный при постоянном температурном градиенте  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  ( $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$  – нормальный температурный режим);

- учитывается фактическая сжимаемость эластомера, при которой коэффициент Пуассона  $\mu = \mu(\theta) < 0,5$ , что особенно важно в случае  $\Delta\theta < 0$  [8];

- во всем диапазоне эксплуатационных температур  $\theta$  эластомер находится в высокоэластическом состоянии [1, 4, 6, 8, 9];

- коэффициент теплопроводности резины  $\lambda = \text{const}$  и не влияет при этом на температурное поле и напряженно-деформированное состояние уплотнителя, то есть не зависит от температуры  $\theta$  и координат  $r$ ,  $z$ ,  $x$ ,  $y$  произвольной точки кольца (рис. 1, б) [5];

- при рассмотрении местных (контактных) перемещений  $u_{mn}$ ,  $u_{mv}$  и геометрических параметров  $c_n$ ,  $c_s$  (рис. 1, б) принимается во внимание деформированное состояние кольца с допущением, что эллиптическая форма его сечения сохраняется;

- функция радиального перемещения  $u_o = u_o(r)$  не зависит от переменной  $z$ , а аналогичная горизонтальная составляющая  $w_o = w_o(z)$  – от аргумента  $r$ ; как следствие этого допущения, отсутствуют сдвиговые деформации ( $\gamma_{rzo} = 0$ ) и касательные напряжения ( $\tau_{rzo} = \tau_{zro} = 0$ ) в материале уплотнительного элемента [4,10];

- предусматривается возможное предварительное (монтажное) растяжение  $\bar{\varepsilon}_\psi$  кольца по внутреннему радиусу при  $r = R_g = R_0 - a_{\text{эв}}$ , то есть [1,4,6]

$$\varepsilon_\psi = u(R_g)/R_g = \bar{\varepsilon}_\psi = 0,01 \div 0,05. \quad (1)$$

Для понимания существа вопроса приводим самые необходимые соотношения из разработанной в [4] физико-математической модели с использованием оператора Лапласа  $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r \cdot \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$  в цилиндрических координатах  $r$  и  $z$  ( $R_g \leq r \leq R_n$ ,  $-b \leq z \leq b$ ):

- 1) условие стационарной теплопроводности  $\nabla^2 \theta = 0$ , которое при  $\theta = \text{const}$  выполняется тождественно [7];

- 2) разрешающее уравнение четвертого порядка

$$\nabla^2(\nabla^2 \varphi) = \nabla^4 \varphi = 0 \quad (2)$$

относительно функции  $\varphi = \varphi(r; z)$ , связанной с нормальными  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\psi$ ,  $\sigma_z$  и касательным  $\tau$  напряжениями известными дифференциальными зависимостями [10]:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \sigma_\psi = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \quad (3)$$

$$\tau = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \quad (4)$$

3) формулы радиального  $u = u(r)$  и осевого  $w = w(z)$  перемещений [4,11]:

$$u = -\frac{1 + \mu}{E_y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + J_\theta r, \quad w = \frac{1 + \mu}{E_y} \left[ 2(1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] + J_\theta z, \quad (5)$$

где  $E_y = E_y(\Phi_3)$  - условный модуль упругости уплотнителя эллиптического профиля, зависящий от фактора формы  $\Phi_3 = 0,25 \varepsilon_3 (a_{\varepsilon 3} + a_{\varepsilon 6}) / (a_{\varepsilon 3} a_{\varepsilon 6})$  [3];

$J_\theta$  - температурный функционал, характеризующий относительную термоупругую деформацию материала в направлении осей  $r, z$  (рис. 1) [4,5].

Функции  $\sigma_r, \sigma_\psi, \sigma_z, \tau$  и  $u$  должны удовлетворять (рис. 1, а) [11,12]:

а) статическим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{F_3} X &= \int_{F_3} \sigma_\psi dF_3 - R_0 [P_\varepsilon (1 - a_{\varepsilon 6} / R_0) - P_n (1 + a_{\varepsilon 3} / R_0)] = 0, \\ \sum_{F_{\varepsilon 3}} X &= \int_{F_{\varepsilon 3}} \sigma_\psi dF_{\varepsilon 3} + R_0 \left[ 2 \int_0^{\varepsilon_3} \sigma_r(z; R_0) dz + P_n (1 + a_{\varepsilon 3} / R_0) \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\tau(R_0; \pm \varepsilon_3) = 0, \sigma_z(R_0; \pm \varepsilon_3) = 0, \int_{F_c} \sigma_z dF_c = 0, \quad (7)$$

где  $F_3, F_{\varepsilon 3}$  - соответственно, площадь всего эллиптического сечения и его верхней (наружной) части;

$F_c$  - площадь сектора при  $z = 0$ ;

$P_\varepsilon = const, P_n = const$  - равномерно распределенные по окружностям радиусами  $R_\varepsilon$  и  $R_n$  нагрузки, представляющие собой равнодействующие функций реактивных давлений  $q_\varepsilon = q_\varepsilon(y)$  и  $q_n = q_n(y)$ , имеющих максимумы  $q_{\varepsilon \max}, q_{n \max}$  и средние давления  $q_{\varepsilon c}, q_{nc}$ , связанные с  $P_\varepsilon, P_n$  и параметрами  $c_\varepsilon, c_n$ , характеризующими линейные размеры (полуширину) областей контакта, следующим образом (рис. 1, б) [13]:

$$q_{\varepsilon c} = P_\varepsilon / (2c_\varepsilon), q_{nc} = P_n / (2c_n); \quad (8)$$

б) кинематическому краевому соотношению (1) для зависимости  $u(r)$  при  $r = R_\varepsilon = R_0 - a_3$ , учитывающему монтажное растяжение кольца [1, 4, 6].

Принимая во внимание симметрию расчетной модели (рис. 1), аппроксимируем функцию напряжений  $\varphi(r; z)$  аналитическим выражением вида [10, 11]

$$\varphi = C_1 z \cdot \ln r + C_2 r^2 z + C_3 z^3, \quad (9)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  - константы, вычисляемые из условий (1), (6) и (7) с учетом формул напряжений (3) и (4) [11]:

$$C_1 = [R_0 P_n (1 + \kappa_{Rn}) (A_{22} - A_{12}) - R_0 P_\varepsilon (1 - \kappa_{R\varepsilon}) A_{22}] / D, \quad (10)$$

$$C_2 = [R_0 P_n (1 + \kappa_{Rn}) (A_{11} - A_{21}) + R_0 P_\varepsilon (1 - \kappa_{R\varepsilon}) A_{21}] / D, \quad (11)$$

$$C_3 = -2C_2(2 - \mu)/[3(1 - \mu)]; \quad (12)$$

$A_{11}, A_{12}(\text{мм}^2), A_{21}, A_{22}(\text{мм}^2)$  - коэффициенты, опубликованные в статье [11];

$D = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$  -  $(\text{мм}^2)$  детерминант системы двух алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_1, C_2$  [11];

$\kappa_{R\theta} = a_{\theta\theta}/R_0, \kappa_{Rn} = a_{nn}/R_0$  - параметры, характеризующие кривизну внутренней и наружной частей кольца.

Равнодействующие  $P_\theta, P_n$  реактивных сил  $q_\theta(y), q_n(y)$  связаны, согласно [11,12], функциональной зависимостью

$$P_\theta = (\beta_2/\beta_1)P_n + \beta_3/\beta_1, \quad 0 \leq P_n \leq [P_n], \quad (13)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3(H/\text{мм}) > 0$  - постоянные коэффициенты, имеющие вид [11].

Формула предельно допустимого значения равнодействующей  $[P_n]$  выведена авторами в работе [11] из граничного условия физической линейности материала кольца  $|\varepsilon_{\max}| \leq 0,25$  [1]:

$$[P_n] = \frac{E_y D R_0 (1 - \kappa_{R\theta})^2 (0,25 - J_\theta) - (1 + \mu)(A_{22}\Omega_1 + A_{21}\Omega_2)}{(1 + \mu)[A_{22}\Omega_3 + 2R_0^2(1 - \kappa_{R\theta})\Omega_4 + A_{12}(1 + \kappa_{Rn})]}, \quad (14)$$

где  $\Omega_1(H/\text{мм}), \Omega_2(H \cdot \text{мм}), \Omega_3, \Omega_4$  - конструктивные характеристики уплотнительного элемента, аппроксимируемые зависимостями [11].

Продолжая решение сформулированной задачи, вводим дополнительную предпосылку о возможности применения фундаментальных зависимостей Герца-Штаермана для эллиптических функций  $q_\theta(y), q_n(y)$  и половинных размеров  $c_\theta, c_n$  цилиндрических поверхностей контакта (рис. 1, б) [10,14]:

$$q_\theta = q_\theta(y) = \frac{2P_\theta}{\pi c_\theta^2} \sqrt{c_\theta^2 - y^2} = \frac{q_{m\theta}}{c_\theta} \sqrt{c_\theta^2 - y^2}, \quad q_{m\theta} = \frac{2P_\theta}{\pi c_\theta} = \frac{4}{\pi} q_{c\theta}, \quad -c_\theta \leq y \leq c_\theta; \quad (15)$$

$$q_n = q_n(y) = \frac{2P_n}{\pi c_n^2} \sqrt{c_n^2 - y^2} = \frac{q_{mn}}{c_n} \sqrt{c_n^2 - y^2}, \quad q_{mn} = \frac{2P_n}{\pi c_n} = \frac{4}{\pi} q_{cn}, \quad -c_n \leq y \leq c_n; \quad (16)$$

$$c_\theta = 2\sqrt{P_\theta (\epsilon_\theta^*)^2 (1 - \mu^2) / (\pi a_{\theta\theta}^* E_y)}, \quad c_n = 2\sqrt{P_n (\epsilon_n^*)^2 (1 - \mu^2) / (\pi a_{nn}^* E_y)}, \quad (17)$$

где  $a_{nn}^*, a_{\theta\theta}^*, \epsilon_n^*, \epsilon_\theta^*$  - деформированные полуоси эллипсов в сечении кольца (рис. 1, б).

Геометрические характеристики  $c_\theta$  и  $c_n$  должны удовлетворять двум неравенствам в точках  $O$  и  $A$  расчетной модели (рис. 1, б) [14]:

$$c_n \ll (\epsilon_n^*)^2 / a_{nn}^*, \quad c_\theta \ll (\epsilon_\theta^*)^2 / a_{\theta\theta}^*, \quad (18)$$

где  $(\epsilon_n^*)^2 / a_{nn}^*$  и  $(\epsilon_\theta^*)^2 / a_{\theta\theta}^*$  - радиусы кривизны эллиптических образующих поперечного профиля деформированного кольцевого уплотнителя в сечении  $y = 0$ .

С математической точки зрения корректность использования классических формул (15)-(17) следует, прежде всего, из осевой симметрии решаемой задачи и первоначального соприкосновения взаимодействующих тел по замкнутому круговому контуру, то есть по линии. При этом модель плоского деформированного состояния, положенная в основу зависимостей (15)-(17), является адекватной и применительно к данной конструкционной (неклассической) задаче [2], по крайней мере, для областей контакта кольца с цилиндри-

ческими поверхностями в пределах границ местных перемещений  $u_{mn}$ ,  $u_{me}$  при соблюдении условий (рис. 1, б):

$$|u_{mn}| \ll a_{эн}^*, |u_{me}| \ll a_{эв}^*. \quad (19)$$

Задавшись по рекомендациям [1] нормативной величиной среднего контактного давления  $1,5 \leq q_{сн} \leq 3 \text{ Н/мм}^2$  и используя формулы (8), (17), получаем следующие соотношения:

$$c_n = 8 q_{сн} (\epsilon_3^*)^2 (1 - \mu^2) / (\pi a_{эн}^* E_y), \quad (20)$$

$$P_n = 2 c_n q_{сн}. \quad (21)$$

Местные (контактные) перемещения  $u_{mn}$ ,  $u_{me}$  зависят от размеров  $c_n$ ,  $c_e$  и определяются из уравнений деформированных эллипсов (рис. 1, б) [12,13]:

$$x_3^2 / (a_{эн}^*)^2 + y_3^2 / (\epsilon_3^*)^2 = 1, \quad x_3^2 / (a_{эв}^*)^2 + y_3^2 / (\epsilon_3^*)^2 = 1, \quad (22)$$

которые решаем при  $y_3 = \pm c_n$  и  $y_3 = \pm c_e$  относительно  $x_3 = x_{эн}$  и  $x_3 = x_{эв}$ . Принимая во внимание знаки искоемых перемещений  $u_{mn} < 0$  и  $u_{me} > 0$  в системе отсчета  $x_3 C^* y_3$  (рис. 1, б), имеем:

$$u_{mn} = - (a_{эн}^* - |x_{эн}|) = - a_{эн}^* \left( 1 - \sqrt{1 - c_n^2 / (\epsilon_3^*)^2} \right), \quad (23)$$

$$u_{me} = a_{эв}^* - |x_{эв}| = a_{эв}^* \left( 1 - \sqrt{1 - c_e^2 / (\epsilon_3^*)^2} \right). \quad (24)$$

Формулы (13), (20), (21) представляют собой систему трех нелинейных уравнений относительно параметров  $c_n$ ,  $P_n$  и  $P_e$  в зависимости от  $q_{сн}$ .

Соотношения (20), (22)-(24) включают деформированные полуоси эллипсов  $a_{эв}^*$ ,  $a_{эн}^*$ ,  $\epsilon_3^*$ , связанные, согласно рис. 1, с перемещениями  $u_{ов}$ ,  $u_{оС}$ ,  $u_{он}$ ,  $w_{оэ}$ , соответственно, точек  $O$ ,  $C$ ,  $A$  и  $B$ , для определения которых предварительно находим функции  $u = u(r)$  и  $w = w(z)$ , руководствуясь (5), (9) и (12):

$$u = - (1 + \mu) (C_1 / r + 2 C_2 r) / E_y + J_\theta r, \quad R_e \leq r \leq R_n; \quad (25)$$

$$w = \{ 4 C_2 \mu (1 + \mu) / [E_y (1 - \mu)] + J_\theta \} z, \quad -\epsilon_3 \leq z \leq \epsilon_3. \quad (26)$$

Подставив (13) в (10), (11), будем иметь, после исключения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  из (25), (26), кинематические характеристики  $u_{ов}$ ,  $u_{оС}$ ,  $u_{он}$ ,  $w_{оэ}$ :

$$u_{ов} = u_o(R_e) = - (1 + \mu) R_0 [P_n (\xi_1 / R_e + 2 R_e \xi_2) - \xi_3 (A_{22} / R_e - 2 R_e A_{21})] / (E_y D) + J_\theta R_e, \quad (27)$$

$$u_{оС} = u_o(R_0) = - (1 + \mu) [P_n (\xi_1 + 2 R_0^2 \xi_2) - \xi_3 (A_{22} - 2 R_0^2 A_{21})] / (E_y D) + J_\theta R_0, \quad (28)$$

$$u_{он} = u_o(R_n) = - (1 + \mu) R_0 [P_n (\xi_1 / R_n + 2 R_n \xi_2) - \xi_3 (A_{22} / R_n - 2 R_n A_{21})] / (E_y D) + J_\theta R_n, \quad (29)$$

$$w_{оэ} = w_o(\pm \epsilon_3) = \pm \{ 4 \mu (1 + \mu) R_0 / [E_y (1 - \mu) D] \cdot \times \\ \times \{ P_n (1 + \kappa_{Rn}) (A_{11} - A_{21}) + [(\beta_2 / \beta_1) P_n + \beta_3 / \beta_1] (1 - \kappa_{Re}) A_{21} \} + J_\theta \} \cdot \epsilon_3, \quad (30)$$

где  $\xi_1 (\text{мм}^2)$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3 (\text{Н/мм})$  - коэффициенты:

$$\xi_1 = (1 + \kappa_{Rn}) (A_{22} - A_{12}) - (\beta_2 / \beta_1) (1 - \kappa_{Re}) A_{22}, \quad (31)$$

$$\xi_2 = (1 + \kappa_{Rn})(A_{11} - A_{21}) + (\beta_2/\beta_1)(1 - \kappa_{R\theta})A_{21}, \quad (32)$$

$$\xi_3 = (\beta_3/\beta_1)(1 - \kappa_{R\theta}). \quad (33)$$

Далее, представляем размеры полуосей эллипсов после общих деформаций (рис. 1, б), согласно [4]:

$$e_{\vartheta}^* = e_{\vartheta} + |w_{o\vartheta}|, \quad a_{\vartheta\theta}^* = a_{\vartheta\theta} - u_{o\theta} + u_{oC}, \quad a_{\vartheta n}^* = a_{\vartheta n} - u_{oC} + u_{on}, \quad (34)$$

где радиальные параметры  $u_{o\theta}$ ,  $u_{oC}$ ,  $u_{on}$  приняты положительными, но при их подстановке в (34) необходимо учитывать фактические знаки  $u_{o\theta}$ ,  $u_{oC}$ ,  $u_{on}$ .

После раскрытия первой и последней формул (34) с учетом (28)-(30), получаем:

$$e_{\vartheta}^* = e_{\vartheta} + e_{\vartheta} \cdot \{4\mu(1 + \mu)R_0[P_n\xi_2 + (\beta_3/\beta_1)(1 - \kappa_{R\theta})A_{21}]/[E_y(1 - \mu)D] + J_{\theta}\}, \quad (35)$$

$$a_{\vartheta n}^* = a_{\vartheta n} + P_n\xi_4 + \xi_5 - J_{\theta}(R_0 - R_n); \quad (36)$$

где  $\xi_4$  (мм<sup>2</sup>/H),  $\xi_5$  (мм) - новые коэффициенты:

$$\xi_4 = (1 + \mu)[\xi_1(1 - R_0/R_n) + 2R_0\xi_2(R_0 - R_n)]/(E_y D), \quad (37)$$

$$\xi_5 = (1 + \mu)\xi_3[A_{22}(R_0/R_n - 1) + 2R_0A_{21}(R_0 - R_n)]/(E_y D). \quad (38)$$

Выражая из равенства (21) размер  $c_n$  и подставляя его в левую часть зависимости (20), приводим ее к виду:

$$16(1 - \mu^2)q_{cn}^2(e_{\vartheta}^*)^2/(\pi E_y) - P_n a_{\vartheta n}^* = 0. \quad (39)$$

Заменяя в (39) геометрические характеристики  $a_{\vartheta n}^*$ ,  $e_{\vartheta}^*$ , согласно (35), (36), получаем квадратное уравнение

$$P_n^2 + P_n \left[ \frac{2q_{cn}^2 \xi_2 \xi_6 (1 + \xi_6 \xi_7 + J_{\theta}) \xi_8 e_{\vartheta}^2 - a_{\vartheta n} - \xi_5 + J_{\theta}(R_0 - R_n)}{q_{cn}^2 \xi_2^2 \xi_6^2 \xi_8 e_{\vartheta}^2 - \xi_4} \right] + \frac{q_{cn}^2 \xi_8 \xi_9}{q_{cn}^2 \xi_2^2 \xi_6^2 \xi_8 e_{\vartheta}^2 - \xi_4} = 0 \quad (40)$$

для вычисления равнодействующей  $P_n \geq 0$  по заданному среднему контактному давлению  $q_{cn} \geq 0$  и исходным физико-геометрическим параметрам деформируемого кольца, которое представляем в более компактной канонической форме [13]:

$$P_n^2 + P_n \xi_{10} + \xi_{11} = 0. \quad (41)$$

Соотношения (40), (41) включают шесть проектных параметров  $\xi_6$  (мм/H),  $\xi_7$  (H/мм),  $\xi_8$  (мм<sup>2</sup>/H),  $\xi_9$  (мм<sup>2</sup>),  $\xi_{10}$  (H/мм),  $\xi_{11}$  (H<sup>2</sup>/мм<sup>2</sup>):

$$\xi_6 = 4\mu(1 + \mu)R_0/[E_y(1 - \mu)D], \quad \xi_7 = (\beta_3/\beta_1)(1 - \kappa_{R\theta})A_{21}, \quad \xi_8 = 16(1 - \mu^2)/(\pi E_y), \quad (42)$$

$$\xi_9 = [\xi_6 \xi_7 (2 + 2J_{\theta} + \xi_6 \xi_7) + J_{\theta}(2 + J_{\theta}) + 1] e_{\vartheta}^2, \quad (43)$$

$$\xi_{10} = [2q_{cn}^2 \xi_2 \xi_6 (1 + \xi_6 \xi_7 + J_{\theta}) \xi_8 e_{\vartheta}^2 - a_{\vartheta n} - \xi_5 + J_{\theta}(R_0 - R_n)]/(q_{cn}^2 \xi_2^2 \xi_6^2 \xi_8 e_{\vartheta}^2 - \xi_4), \quad (44)$$

$$\xi_{11} = q_{cn}^2 \xi_8 \xi_9 / (q_{cn}^2 \xi_2^2 \xi_6^2 \xi_8 e_{\vartheta}^2 - \xi_4). \quad (45)$$

Корни  $P_{n1,2}$  (H/мм) уравнения (41) имеют вид:

$$P_{n1,2} = -\xi_{10}/2 \pm \sqrt{(\xi_{10}/2)^2 - \xi_{11}}, \quad (46)$$

или, принимая во внимание (44), (45):

$$P_{n1,2} = -\frac{2q_{cn}^2 \xi_2 \xi_6 (1 + \xi_6 \xi_7 + J_{\theta}) \xi_8 e_{\vartheta}^2 - a_{\vartheta n} - \xi_5 + J_{\theta}(R_0 - R_n)}{2(q_{cn}^2 \xi_2^2 \xi_6^2 \xi_8 e_{\vartheta}^2 - \xi_4)} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[ \frac{2q_{cn}^2 \xi_2 \xi_6 (1 + \xi_6 \xi_7 + J_0) \xi_8 \theta_3^2 - a_{\varepsilon n} - \xi_5 + J_0 (R_0 - R_n)}{2(q_{cn}^2 \xi_2^2 \xi_6^2 \xi_8 \theta_3^2 - \xi_4)} \right]^2 - \frac{q_{cn}^2 \xi_8 \xi_9}{q_{cn}^2 \xi_2^2 \xi_6^2 \xi_8 \theta_3^2 - \xi_4}}. \quad (47)$$

На основании физико-механического смысла рассматриваемой контактной задачи и проведенных численных исследований нелинейной зависимости (41) можно констатировать, что в случае  $q_{cn} = P_n = 0$  параметр  $\xi_{11} = 0$ , а при  $q_{cn} > 0$  и  $P_n > 0$  коэффициенты  $\xi_{10}$  и  $\xi_{11}$  имеют знаки  $\xi_{10} < 0$ ,  $\xi_{11} > 0$ . Как следствие этого факта в общем решении (46) уравнения (41) перед квадратным корнем должен быть знак «-», то есть

$$P_n = -\xi_{10}/2 - \sqrt{(\xi_{10}/2)^2 - \xi_{11}}. \quad (48)$$

В качестве наглядной иллюстрации и апробации выведенных функциональных формул контактных характеристик  $P_\theta$ ,  $P_n$ ,  $c_\theta$ ,  $c_n$ ,  $q_{c\theta}$ ,  $u_{m\theta}$ ,  $u_{mn}$  в зависимости от  $q_{cn}$  приводим конкретный пример расчета и проверку соблюдения неравенств (18), (19) для кольца, имеющего симметричное эллиптическое сечение, из эластомера СКН-18 с удельным весом  $\rho_0 = 1300 \text{ кг/м}^3$ , твердостью  $H_0 = 80(HJRD)$ , модулем упругости  $E_0 = 10 \text{ Н/мм}^2$  и коэффициентом Пуассона  $\mu_0 = 0,475$  [1,5,6] при следующих исходных данных [11]:  $a_{\varepsilon\theta} = a_{\varepsilon n} = a_\theta = 2,3 \text{ мм}$ ;  $\theta_3 = 3 \text{ мм}$ ;  $\bar{\varepsilon}_\psi = 0,03$ ;  $q_{cn} = 1,5 \text{ МПа} = 1,5 \text{ Н/мм}^2$  [1];  $R_\theta = 27 \text{ мм}$ ;  $R_0 = R_\theta + a_\theta = 29,3 \text{ мм}$ ;  $R_n = R_0 + a_\theta = 31,6 \text{ мм}$ ; фактор формы  $\Phi_\theta = 0,65$  [3]; условный модуль упругости [3]  $E_y = 14,2533 \text{ Н/мм}^2 (HJRD)$  (в зависимости от  $\Phi_\theta$  и  $E = E(0) = E_0$  при  $\theta^0 = 20^\circ \text{C}$ );  $\theta = \theta^0 = 20^\circ \text{C}$  - нормальный температурный режим.

Соответствующий порядок определения параметров  $c_n$ ,  $P_n$ ,  $P_\theta$ ,  $c_\theta$ ,  $q_{c\theta}$ ,  $u_{mn}$ ,  $u_{m\theta}$ , после вычисления коэффициентов  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  и детерминанта  $D$ , согласно [11], формулируется следующим образом:

• По «жесткой» (недеформированной) модели уплотнителя с заменой  $a_{\varepsilon\theta}^*$ ,  $a_{\varepsilon n}^*$ ,  $\theta_3^*$  на  $a_{\varepsilon\theta}$ ,  $a_{\varepsilon n}$ ,  $\theta_3$ :

- 1) расчет контактных характеристик  $c_n$ ,  $P_n$  и  $P_\theta$  в соответствии с (20), (21), (13);
- 2) определение размера  $c_\theta$  и давления  $q_{c\theta}$  с использованием левых зависимостей (17), (8) и проверка условий (18), то есть

$$c_n \ll (\theta_3)^2 / a_{\varepsilon n}, \quad c_\theta \ll (\theta_3)^2 / a_{\varepsilon\theta}; \quad (49)$$

- 3) вычисление местных перемещений  $u_{mn}$ ,  $u_{m\theta}$  точек  $A$  и  $O$  на основании (23), (24) с проверкой неравенств  $|u_{mn}| \ll a_{\varepsilon n}$ ,  $|u_{m\theta}| \ll a_{\varepsilon\theta}$ .

• С учетом изменения размеров полуосей в процессе нагружения кольца ( $a_{\varepsilon n} \rightarrow a_{\varepsilon n}^*$ ,  $a_{\varepsilon\theta} \rightarrow a_{\varepsilon\theta}^*$ ,  $\theta_3 \rightarrow \theta_3^*$ ) при обозначениях искомых параметров со «звездочкой» -  $P_n^*$ ,  $P_\theta^*$ ,  $c_n^*$ ,  $c_\theta^*$ ,  $q_{c\theta}^*$ ,  $u_{mn}^*$ ,  $u_{m\theta}^*$ :

- 1) коэффициенты  $\xi_1 - \xi_{11}$  по формулам (31)-(33), (37), (38), (42)-(45);
- 2) параметры  $P_n^*$ ,  $c_n^*$ ,  $u_{\theta\theta}$ ,  $u_{\theta C}$ ,  $u_{\theta n}$ ,  $w_{\theta\theta}$  согласно зависимостям (48), (21), (27)-(30);
- 3) размеры полуосей эллипсов  $\theta_3^*$ ,  $a_{\varepsilon\theta}^*$ ,  $a_{\varepsilon n}^*$  после общих деформаций, руководствуясь (34);



4) характеристики  $P_n^*$ ,  $c_n^*$ ,  $q_{сн}^*$ ,  $u_{мн}^*$ ,  $u_{мв}^*$  контактного взаимодействия поверхностей по формулам (13), (17) – левая, (8) – левая, (23), (24);

5) проверка соблюдения неравенств (18), (19):

$$c_n^* << (c_n^*)^2 / a_{эн}^*, c_n^* << (c_n^*)^2 / a_{эв}^*; |u_{мн}^*| << a_{эн}^*, |u_{мв}^*| << a_{эв}^*. \quad (50)$$

Результаты численного расчета, выполненного по представленной выше методике, показаны на графиках рис. 2. Значения радиусов кривизны  $(\rho_3)^2 / a_{эн}^*$ ,  $(\rho_3)^2 / a_{эв}^*$ ,  $(\rho_3)^2 / a_{эн}^*$ ,  $(\rho_3)^2 / a_{эв}^*$ , а также параметров  $c_n$ ,  $c_n^*$ ,  $a_{эн}$ ,  $a_{эв}$ ,  $\rho_3$ ,  $u_{мн}$ ,  $u_{мв}$ ,  $c_n^*$ ,  $c_n^*$ ,  $a_{эн}^*$ ,  $a_{эв}^*$ ,  $\rho_3^*$ ,  $u_{мн}^*$ ,  $u_{мв}^*$  при заданных граничных давлениях  $q_{сн} = 1,5 \text{ МПа}$  и  $q_{сн} = 3 \text{ МПа}$  приведены в таблицах 1 и 2, из которых следует, что условия (18), (19) выполняются.

Таблица 1

Граничное давление $q_{сн}$ [1]	$c_n$	$(\rho_3)^2 / a_{эн}$	$c_n^*$	$(\rho_3)^2 / a_{эв}$	$a_{эн}$	$a_{эв}$	$u_{мн}$	$u_{мв}$
$\ddot{H}\ddot{a}$	$\ddot{H}\ddot{a}$							
1,5	0,81	3,91	0,89	3,91	2,3	2,3	-0,08	0,10
3,0	1,62	3,91	1,72	3,91	2,3	2,3	-0,37	0,42

Таблица 2

Граничное давление $q_{сн}$ [1]	$c_n^*$	$(\rho_3^*)^2 / a_{эн}^*$	$c_n^*$	$(\rho_3^*)^2 / a_{эв}^*$	$a_{эн}^*$	$a_{эв}^*$	$u_{мн}^*$	$u_{мв}^*$
$\ddot{H}\ddot{a}$	$\ddot{H}\ddot{a}$							
1,5	0,86	4,15	0,95	4,17	2,22	2,21	-0,09	0,11
3,0	2,32	5,6	2,47	5,68	1,99	1,96	-0,56	0,64

На основании разработанной методики решения контактной задачи, проиллюстрированной графиками рис. 2, и проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1) расчет параметров  $P_n$ ,  $P_n^*$ ,  $c_n$ ,  $c_n^*$ ,  $u_{мн}$ ,  $u_{мв}$  при среднем контактном давлении  $q_{сн} \leq 1,1 \text{ МПа}$  ( $\text{Н/мм}^2$ ) можно вести по упрощенной (недеформированной) схеме, так как погрешность вычислений не превышает 2,5 %;

2) при рекомендуемом [1] диапазоне изменения нормируемого контактного напряжения  $1,5 \leq q_{сн} \leq 3 \text{ МПа}$  ( $\text{Н/мм}^2$ ) определение проектных характеристик  $P_n^*$ ,  $P_n^*$ ,  $c_n^*$ ,  $c_n^*$ ,  $u_{мн}^*$ ,  $u_{мв}^*$  необходимо выполнять по предложенной выше уточненной методике с учетом изменения в процессе деформации полуосей эллипсов уплотнительного кольца, так как

погрешность при расчете по «жесткой» схеме составляет уже от 5 до 30 % и более;

3) численные значения давлений  $q_{св}$ ,  $q_{св}^*$  по внутреннему диаметру можно определять по недеформируемой модели в пределах  $0 \leq q_{сн} \leq 3 \text{ МПа (Н/мм}^2\text{)}$ , то есть  $q_{св} \approx q_{св}^*$ , что подтверждается сопоставлением соответствующих зависимостей  $q_{св} = q_{св}(q_{сн})$  и  $q_{св}^* = q_{св}^*(q_{сн})$ .

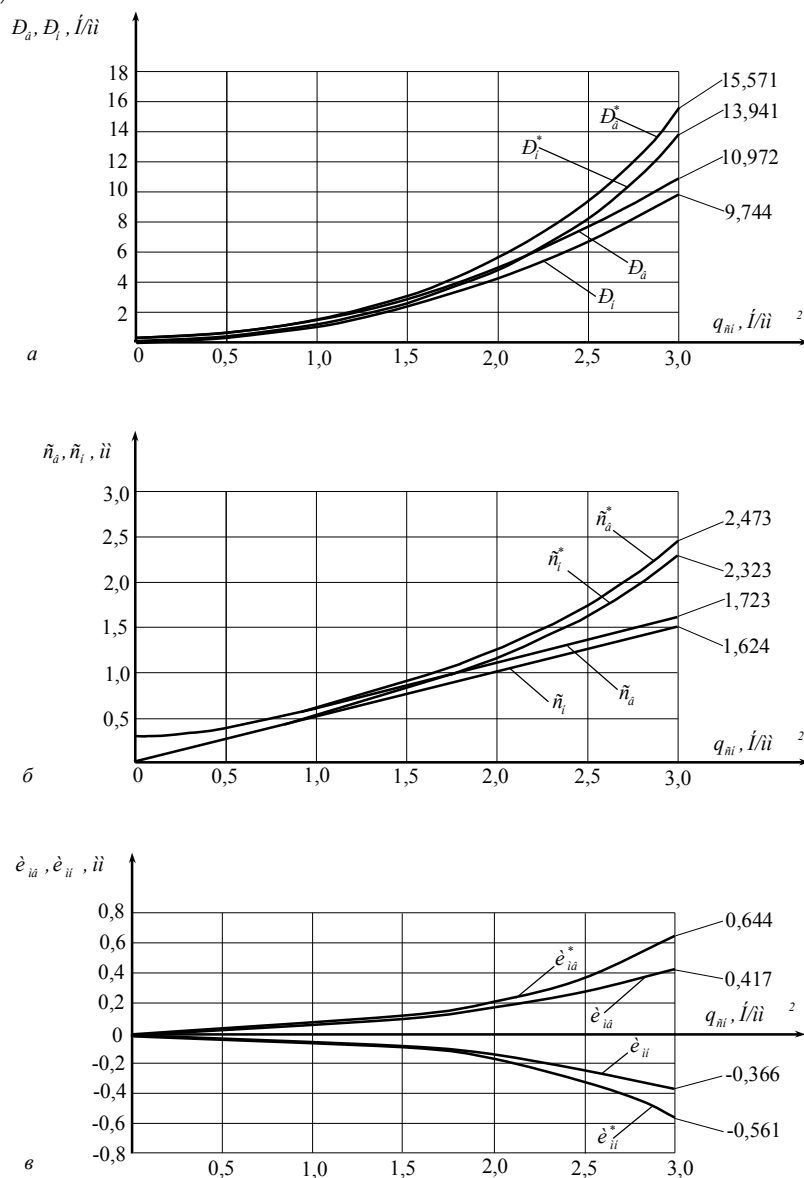


Рисунок 2

При проектировании уплотнителей главнейшим конструктивно-технологическим параметром (наряду с контактными давлениями  $q_{сн}$  и  $q_{св}$ ) является общий натяг  $\Delta \geq 0$  по всему сечению. Учитывая предполагаемые знаки (направления) перемещений  $u_{ов} > 0$ ,

$u_{он} > 0$ ,  $u_{оС} > 0$ ,  $u_{мв} > 0$ ,  $u_{мн} < 0$  в системах отсчета  $zO_r r$  и  $yOx$  (рис. 1, б), аппроксимируем  $\Delta$  следующим образом [4]:

$$\Delta = a_{эв} + a_{эн} - (a_{эв}^* - u_{мв} + a_{эн}^* + u_{мн}). \quad (51)$$

После подстановки в (51) соответствующих формул из (34) и раскрытия скобок, получаем

$$\Delta = \Delta_э + \Delta_н = u_{ов} + u_{мв} - u_{он} - u_{мн}, \quad (52)$$

где  $\Delta_э, \Delta_н \geq 0$  - монтажные натяги, соответственно, по внутренней и наружной поверхностям кольца, контактирующего с поршнем и цилиндром (рис. 1, б), которые можно выразить из общего соотношения (51) с использованием (34):

$$\Delta_э = a_{эв} - (a_{эв}^* - u_{мв}) = u_{ов} - u_{оС} + u_{мв}, \quad \Delta_н = a_{эн} - (a_{эн}^* + u_{мн}) = u_{оС} - u_{он} - u_{мн}. \quad (53)$$

Например, для рассмотренного выше уплотнительного кольца из СКН-18 при  $u_{ов} = 0,81 \text{ мм}$ ,  $u_{мв} = 0,111 \text{ мм}$ ,  $u_{он} = 0,638 \text{ мм}$ ,  $u_{мн} = -0,091 \text{ мм}$  и средним контактным давлением  $q_{сн} = 1,5 \text{ МПа} = 1,5 \text{ Н/мм}^2$ , согласно (52), (53), будем иметь:

$$\Delta = 0,81 + 0,111 - 0,638 - (-0,091) = 0,374 \text{ мм}, \quad \Delta_э = 0,81 - 0,718 + 0,111 = 0,203 \text{ мм}, \\ \Delta_н = 0,718 - 0,638 - (-0,091) = 0,171 \text{ мм}.$$

Полученные формулы и разработанный алгоритм решения этой актуальной фундаментально-прикладной неклассической (конструкционной) задачи механики [2] позволят инженеру-проектировщику количественно оценивать и регулировать (оптимизировать) напряженно-деформированное состояние эластомерных радиальных уплотнительных колец эллипсообразного и круглого сечений, которые широко применяются в машинах и механизмах.

#### Список литературы

1. Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник / Л.А. Кондаков, А.И. Голубев, В.В. Гордеев и др.; Под общ. ред. А.И. Голубева, Л.А. Кондакова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1994. - 448 с.
2. Биргер И.А. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, В.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. - М.: Машиностроение, 1979. - 702 с.
3. Абдеев Б.М. Условный модуль упругости и фактор формы резиновых уплотнительных колец несимметричного эллиптического сечения / Б.М. Абдеев, Т.Ф. Брим, А.Ж. Кульсеитов // Вестник ВКГТУ. - 2007. - №1. - Усть-Каменогорск, 2007. - С. 36-43.
4. Абдеев Б.М. Уточненная физико-математическая модель напряженно-деформированного состояния радиальных эластомерных уплотнительных колец эллиптического сечения для условий предварительного натяга / Б.М. Абдеев, Т.Ф. Брим, Ж.О. Кульсеитов // Вестник ВКГТУ. - 2006. - №4. - Усть-Каменогорск, 2006. - С. 30-43.
5. Абдеев Б.М. Методика и алгоритм расчета механических и теплофизических характеристик резины с учетом температурного градиента / Б.М. Абдеев, А.А. Кравцов // Вестник ВКГТУ. - 2004. - № 3. - Усть-Каменогорск, 2004. - С. 25-34.
6. Кондаков Л.А. Уплотнения гидравлических систем. - М.: Машиностроение, 1972. - 240 с.
7. Витольд Новацкий. Вопросы термоупругости. - Пер. с польского. - М.: Изд-во АН СССР, 1962. - 364 с.
8. Аврущенко В.Х. Резиновые уплотнители. - Л.: Химия, 1978. - 136 с.
9. Гуль В.Е. Структура и механические свойства полимеров / В.Е. Гуль, В.Н. Кулезнов. - М.: ВШ, 1979. - 352 с.
10. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. - М.: Наука, 1975. - Т. 1. - 832 с.
11. Абдеев Б.М. Общие термоупругие осесимметричные деформации радиальных эластомерных уплотнительных колец эллиптического сечения / Б.М. Абдеев, Т.Ф. Брим, А.Ж. Кульсеитов // Материалы Междунар. НПК «Аманжоловские чтения». - 2007. - Усть-Каменогорск: Изд-во ВКГУ им. С. Аманжолова, 2007. - Ч. 3. - С. 30-36.
12. Абдеев Б.М. К решению осесимметричной контактной задачи термоупругости о радиальном сжатии резинового уплотнительного кольца эллиптического сечения / Б.М. Абдеев, Т.Ф. Брим, А.Ж. Кульсеитов. «Наука и образование - ведущий фактор стратегии «Ка-

- захстан - 2030»: Тр. X Юбилейной Междунар. науч. конф. - Караганда: Изд-во КарГТУ, июнь 2007. - Вып. 2. - С. 5-7.
13. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. - 608 с.
14. Штаерман И.Ф. Контактная задача теории упругости. - М.; Л.: Гостехиздат, 1949. - 270 с.

Получено 17.12.07

УДК 532.542

Ш.С. Аманжолова

ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

#### ВОПРОСЫ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ ПО ПУТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Рассмотрим задачу о движении по горизонтальной плоскости прямоугольного резервуара, частично заполненного однородной идеальной несжимаемой тяжелой жидкостью. Допустим, что резервуар с жидким наполнением движется по некоторому горизонтальному круговому пути, т.е. скорость  $\bar{u}$  точки О во все время движения постоянна по модулю, а траекторией точки О является окружность радиуса  $k$  (рис. 1).

$$u = \text{const}, \quad k = \text{const}. \quad (1)$$

Тогда бесконечная система дифференциальных уравнений, описывающая колебание жидкости в резервуаре, движущемся по пути постоянной кривизны, будет иметь вид:

$$\ddot{q}_{k,n} + g\lambda_{k,n} \cdot q_{k,n} = -\left(\alpha_{k,0} + \frac{\gamma_{k,n}}{k}\right) \cdot \lambda_{k,n} \cdot \dot{u} - \beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n} \cdot \frac{u^2}{k}. \quad (2)$$

При выполнении условий (1) примет следующий вид:

$$\ddot{q}_{k,n} + \sigma_{k,n}^2 \cdot q_{k,n} = -\frac{\beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n}}{k} \cdot u^2. \quad (3)$$

Решения этих уравнений можно представить в виде системы

$$q_{k,n} = A_{k,n} \cdot \cos \sigma_{k,n} t + B_{k,n} \cdot \sin \sigma_{k,n} t + \frac{\beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n}}{k\sigma_{k,n}^2} \cdot u^2 \cos \sigma_{k,n} t - \frac{\beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n}}{k\sigma_{k,n}^2} u^2, \quad (4)$$

где  $A_{k,n}$ ,  $B_{k,n}$  - произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Для условия, когда отсутствуют начальные скорости частиц жидкости на свободной поверхности, будет иметь место

$$q_{k,n} = \left(A_{k,n} + \frac{\beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n}}{k\sigma_{k,n}^2} u^2\right) \cos \sigma_{k,n} t - \frac{\beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n}}{k\sigma_{k,n}^2} u^2. \quad (5)$$

Допустим, что нам задано начальное отклонение свободной поверхности жидкости в виде

$$(\zeta_1)_{t=0} = \zeta_{10} = c, \quad (0 < c < 1). \quad (6)$$

Для рассматриваемого случая отклонение свободной поверхности будет иметь следующий вид:

$$c_{0,2n} = 0; \quad c_{0,2n+1} = -\frac{2b^3 \ell c}{\pi^3 (2n+1)^3 \cdot \operatorname{th} \left[ \frac{\pi h (2n+1)}{b} \right]}. \quad (7)$$

Тогда, подставив в (4) выражение (7), получаем

$$q_{0,2n+1} = -\left( \frac{2\ell b^2 c}{\pi^2 (2n+1)^2} + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k \sigma_{0,2n+1}^2} u^2 \right) \cos \sigma_{0,2n+1} t - \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k \sigma_{0,2n+1}^2} u^2. \quad (8)$$

В движении жидкости участвуют нечетные главные колебания, это значит, что свободная поверхность жидкости представляет собой суперпозицию поперечных пространственных волн нечетных индексов.

$$\zeta_1 = -\frac{2}{b\ell} \sum \left[ \left( \frac{2\ell b^2 c}{\pi^2 (2n+1)^2} + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k \sigma_{0,2n+1}^2} u^2 \right) \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k \sigma_{0,2n+1}^2} u^2 \right] \times \times \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} y. \quad (9)$$

Колебания свободной поверхности, описываемые выражением (6), смещают центр тяжести жидкого объема только в поперечном направлении.

Определим результирующую силу давлений жидкости на стенки сосуда  $\bar{R}$ . Проекции этой силы на оси координат  $x, y, z$  соответственно будут иметь следующий вид:

$$R_{x=0} = 0;$$

$$R_y = -\frac{4m}{\pi^2 \ell h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{0,2n+1}^2}{(2n+1)^2} \left( \frac{u^2 \beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k \sigma_{0,2n+1}^2} - \frac{\ell b g_{0,2n+1}}{2} \right) \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t;$$

$$R_z = -mg.$$

Давление жидкости на стенки сосуда при равномерном движении резервуара по круговому пути выражается в виде периодической силы, действующей на боковые стенки сосуда (рис. 1, а), а движение представляет собой вынужденные колебания частиц жидкости под действием внешней силы

$$F_{0,2n+1} = -\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot \frac{u^2}{k}. \quad (11)$$

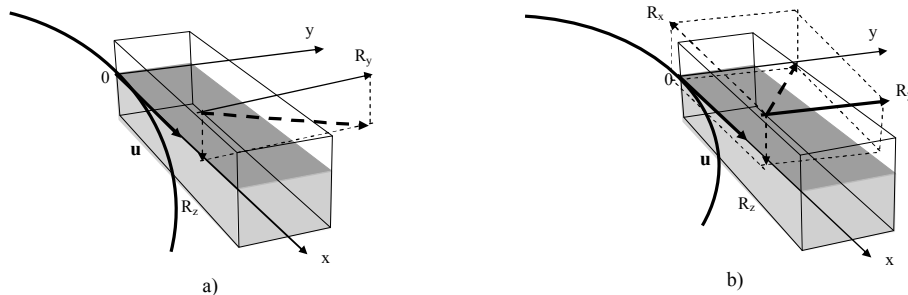


Рисунок 1 – Давление жидкости на стенки при движении резервуара по круговому пути: а)  $u = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ ; б)  $u = At$ ,  $k = \text{const}$

Для случая, когда резервуар движется равномерно по прямому пути, т.е. когда

$$u = \text{const}, \quad k = \infty, \quad (12)$$

движение жидкости представляет собой собственные колебания жидкости

$$\ddot{q}_{k,n} + \sigma_{r,n}^2 \cdot q_{k,n} = 0. \quad (13)$$

При начальных условиях (6) будем иметь

$$q_{0,2n+1} = -\frac{2\ell b^2 c}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos \sigma_{0,2n+1} t. \quad (14)$$

Уравнение свободной поверхности жидкости примет вид

$$\zeta_1 = -\frac{2\ell b^2 c}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \sigma_{0,2n+1} t}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} y. \quad (15)$$

Результирующая гидродинамическая сила в проекциях на оси координат  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} R_x &= 0; \\ R_y &= -\frac{8b^2 c m}{\pi^2 h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{0,2n+1}^2}{(2n+1)^2} \cos \sigma_{0,2n+1} t; \\ R_z &= -mg. \end{aligned} \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что при прямолинейном равномерном движении резервуара давление жидкости на стенки сосуда зависит от начальных условий. При начальном отклонении свободной поверхности от невозмущенного положения в виде наклонной поверхности (6) и отсутствии начальных скоростей частиц жидкости на свободной поверхности давление жидкости на стенки сосуда представляет собой периодическую поперечную силу давления на боковые стенки (рис.2, а).

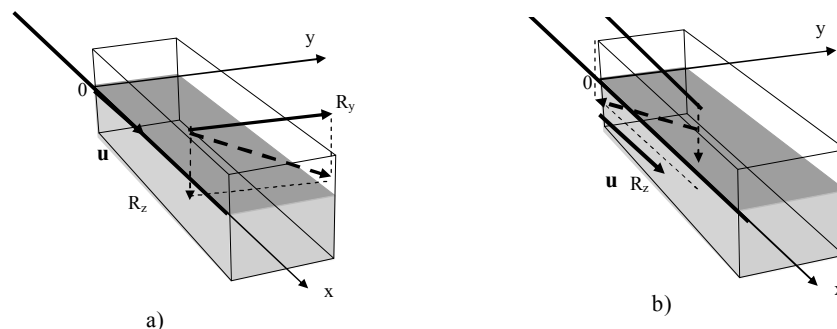


Рисунок 2 – Давление жидкости на стенки сосуда при движении резервуара по прямому пути:  
а)  $u = \text{const}$ ,  $k = \infty$ ; б)  $u = At + B$ ,  $k = \infty$

Рассмотрим случай, когда резервуар движется равнопеременно без начальной скорости по круговому пути:

$$u = At, \quad k = \text{const}, \quad (17)$$

где  $A$  – некоторая постоянная.

В данном случае система дифференциальных уравнений (2) будет иметь следующий вид:

$$\ddot{q}_{k,n} + \sigma_{k,n}^2 \cdot q_{k,n} = -\left(\alpha_{k,n} + \frac{\gamma_{k,n}}{k}\right) \cdot \lambda_{k,n} \cdot A - \beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n} \cdot \frac{A^2 t}{k}, \quad (18)$$

и описывает вынужденные колебания жидкости под действием внешней силы, изменяю-

щейся по линейному закону.

При начальном условии (6) и отсутствии начальных скоростей частиц жидкости на свободной поверхности решения системы дифференциальных уравнений (18) равны:

$$q_{0,2n+1} = \left( \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} - \frac{\gamma_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k} \cdot A + \frac{2\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k\sigma^4_{0,2n+1}} \cdot A^2 \right) \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k\sigma^2_{0,2n+1}} \cdot A^2 t^2 - \left( \frac{\gamma_{0,2n+1}}{kg\sigma_{0,2n+1}} \cdot A + \frac{2\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k\sigma^4_{0,2n+1}} \cdot A^2 \right). \quad (19)$$

Уравнение свободной поверхности жидкости, как известно, определяется выражением

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{r,n}(t) \cdot \psi_{k,n}, \quad (20)$$

где

$$\psi_{k,n} = \frac{2}{b\ell} \cdot \cos \frac{k\pi}{2\ell} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot$$

(21)

Функции  $\psi_{k,n}$  выражают главные формы колебаний жидкости и нормированы условием

$$\int_0^b \int_0^{2\ell} \psi^2_{k,n} dx dy = 1, \quad (22)$$

$q_{k,n}(t)$  – некоторые функции, зависящие от времени.

Для определения уравнения свободной поверхности жидкости для рассматриваемого случая подставим (19) в выражение (20) и получим

$$\zeta_1 = \frac{2}{\ell b} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} - \frac{\gamma_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k} A + \frac{2\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k\sigma^2_{0,2n+1}} A^2 \right) \cos \sigma_{0,2n+1} t + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k\sigma^2_{0,2n+1}} A^2 t^2 - \left( \frac{\gamma_{0,2n+1}}{kg\sigma_{0,2n+1}} A + \frac{2\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k\sigma^4_{0,2n+1}} A^2 \right) \right] \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} t. \quad (23)$$

Свободная поверхность жидкости представляет собой колеблющиеся поперечные волны нечетных индексов с возрастающими со временем амплитудами. При построении решений предполагается, что амплитуды колебаний жидкости малы по сравнению с глубиной и что интенсивность ускорений движения резервуара такова, что резонансные колебания не разрушаются, т.е. амплитуда колебаний жидкости не должна быть больше стоковской [4]. Для задач расчета промышленных объектов с резервуарами с жидким заполнением в подавляющем большинстве имеются случаи образования на поверхности жидкости длинных волн. Поэтому вводится ограничение, что при резонансных колебаниях амплитуда жидкости не должна быть больше стоковской, иначе произойдет разрушение колебаний жидкости, и тогда процесс её движения описать математически будет невозможно.

Однако, как видно из результатов расчета для конкретного случая, даже в линейной постановке при первом же приближении возникают длинные волны колебаний жидкости, возрастающие с течением времени.

Определение предельных значений интенсивности движения резервуара, при которых не происходит разрушения резонансных колебаний, представляет чрезвычайно трудную

задачу, которую необходимо решать в нелинейной постановке для реальной жидкости.

Давление жидкости на стенки сосуда определяется следующими выражениями:

$$R_x = -\left(9,5 \frac{\ell}{b} - b\right) \cdot \frac{A}{2k} m; \quad (24)$$

$$R_y = -\left(\ell - 0,17 \frac{b}{\ell}\right) \frac{2A}{b} m - \frac{4m}{\pi^2 \ell h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[ \frac{2\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k \sigma_{0,2n+1}^2} A^2 - \right. \\ \left. - \sigma_{0,2n+1}^2 \left( \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} - \frac{\gamma_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k} A + \frac{2\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{k \sigma_{0,2n+1}^4} A^2 \right) \cos \sigma_{0,2n+1} t \right]; \quad (25)$$

$$R_z = -mg. \quad (26)$$

При равноускоренном движении резервуара по круговому пути жидкость давит на задние стенки сосуда с постоянной силой  $R_x$ ; в поперечном направлении давление жидкости на боковые стенки резервуара выражается силой  $R_y$ , направленной во внешнюю сторону поворота (рис. 1, б).

Пусть резервуар движется равнопеременно по прямому пути, т.е.

$$u = At + B, \quad k = \infty. \quad (27)$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2) примет вид

$$\ddot{q}_{k,0} + \sigma_{k,0}^2 q_{k,0} = -\lambda_{k,0} \cdot \alpha_{k,0} \cdot A; \quad (28)$$

её решение запишем в виде системы

$$q_{2k+1,0} = \frac{\lambda_{2k+1,0} \cdot \alpha_{2k+1,0}}{\sigma_{2k+1,0}^2} (1 - \cos \sigma_{2k+1,0} t) A \quad (29)$$

при условии, что начальное отклонение свободной поверхности задано в виде (6) и начальные скорости частиц жидкости на свободной поверхности равны нулю.

Свободная поверхность жидкости представляет собой продольные пространственные волны нечетных индексов

$$\zeta_1 = \frac{2A}{\ell b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{2k+1,0} \cdot \alpha_{2k+1,0}}{\sigma_{2k+1,0}^2} (1 - \cos \sigma_{2k+1,0} t), \quad (30)$$

и её колебания смещают центр жидкого объёма в продольном направлении.

Гидродинамические силы давления жидкости на боковые стенки резервуара

$$R_x = -\frac{8Am}{\pi^2 b h} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{2k+1,0} \cdot \alpha_{2k+1,0} \cdot \cos \sigma_{2k+1,0} t; \quad (31)$$

$$R_y = 0.$$

При равноускоренном движении резервуара по прямому пути жидкость давит на задние стенки сосуда. При равнозамедленном движении резервуара, т.е. при торможении, когда  $A < 0$ , жидкость давит на передние стенки полости (рис. 2, б).

В статье дано схематическое представление гидродинамических сил давления жидкости на стенки при движении резервуара по круговому пути (рис. 1) и по прямолинейному пути (рис. 2) с различными режимами движения. Составляющие сил давления жидкости, не изменяющиеся во время движения резервуара, на рисунках обозначены пунктирными линиями, что позволяет наглядно иллюстрировать динамику поведения жидкости при заданных условиях перемещения резервуара.



## Список литературы

1. Аманжолова Ш.С. Задача о собственных колебаниях жидкости в полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда // Вестник ВКГТУ. – 2006. – № 2. – Усть-Каменогорск, 2006. – С.60-66.
2. Аманжолова Ш.С. Вынужденные колебания жидкости в резервуаре, имеющем форму параллелепипеда // Вестник ВКГТУ. – 2006. – № 3. – Усть-Каменогорск, 2006. – С.55-61.
3. Аманжолова Ш.С. Уравнения свободной поверхности жидкости в полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда // Региональный вестник Востока. – 2006. – № 3. – Усть-Каменогорск, 2006. – С.27-34.
4. Колесников К.С. Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
5. Моисеев Н.Н. Численные методы расчета собственных колебаний ограниченного объема жидкости / Н.Н. Моисеев, А.А. Петров. – М.: ВЦ АН СССР, 1966. – 269 с.
6. Моисеев Н.Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев. – М.: Наука, 1965. – 439 с.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича, И. Стриган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
8. Численные методы в механике жидкости. – М.: Мир, 1973. – 304 с.
9. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

Получено 22.10.07

УДК 532.542

**Ш.С. Аманжолова**

ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

**К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ ПО ПУТИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ**

Пусть по горизонтальной плоскости движется резервуар в форме прямоугольного параллелепипеда, частично заполненный однородной несжимаемой идеальной тяжелой жидкостью. Стенки резервуара предполагаем абсолютно твердыми. Тогда, при линейной постановке задачи, согласно теории динамики тела с полостями, содержащими жидкость, движение жидкости относительно стенок резервуара для данной задачи будет описываться уравнениями вида [7]

$$\ddot{q}_{k,n} + g\lambda_{k,n} \cdot q_{k,n} = -\alpha_{k,n} \cdot \lambda_{k,n} \cdot W_x - \beta_{0,n} \cdot \lambda_{k,n} W_y - \gamma_{k,n} \cdot \lambda_{k,n} \cdot \dot{\omega}. \quad (1)$$

Эта бесконечная система уравнений выражает изменение амплитуды вынужденных колебаний жидкости со временем. При  $k=n=0$  собственное значение  $\lambda_{0,0}=0$ , и соответствующее уравнение будет описывать равновесие жидкости. Многочисленными экспериментальными работами ([6] и другими) показано, что при поступательных перемещениях резервуаров образуются поверхностные волны с одним узловым диаметром без узловой окружности, имеющие симметрию относительно вертикальной поперечной плоскости, проходящей через середину продольного направления.

Рассмотрим случаи непоступательного движения резервуара с жидкостью по закругляющемуся и выпрямляющемуся путям при условии, что начальные скорости частиц жидкости на свободной поверхности равны нулю.

Пусть резервуар движется равномерно по закругляющемуся пути, т.е.

$$u = \text{const}, \quad \frac{1}{k} = Et, \quad (2)$$

где  $u$  – скорость некоторой точки твердой части резервуара;  $k$  – радиус кривизны пути, по которому движется резервуар;  $E$  – некоторая постоянная (рис. 1,а).

При таком режиме движения резервуара система дифференциальных уравнений (1) примет вид

$$\ddot{q}_{k,n} + \sigma_{k,n}^2 \cdot q_{k,n} = -\beta_{k,n} \cdot \lambda_{k,n} \cdot uEt - \gamma_{k,n} \cdot \lambda_{k,n} uE. \quad (3)$$

Допустим, что нам задано начальное отклонение свободной поверхности жидкости в виде

$$(\zeta_1)_{t=0} = \zeta_{10} = c, (0 < c < 1). \quad (4)$$

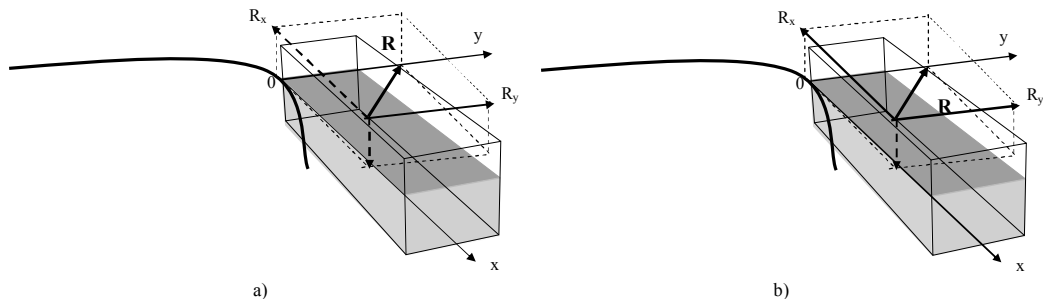


Рисунок 1 – Движение резервуара по закругляющемуся пути (переменной кривизны): а)  $u = \text{const}$ ,  $1/k = Et$ ; б)  $u = At + B$ ,  $1/k = Et$

При этих начальных условиях полученная система дифференциальных уравнений будет иметь решения в виде

$$q_{0,2n+1} = \left( \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} - \frac{\gamma_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} uE}{\sigma_{0,2n+1}^2} \right) \cos \sigma_{0,2n+1} t - \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot uE}{\sigma_{0,2n+1}^2} \sin \sigma_{0,2n+1} t + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot uE}{\sigma_{0,2n+1}^2} + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot uE}{\sigma_{0,2n+1}^2}. \quad (5)$$

Уравнение свободной поверхности жидкости выразится следующим образом:

$$\zeta_1 \frac{2}{\ell b} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} - \frac{\gamma_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}^2} \right) \cos \sigma_{0,2n+1} t - \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} uE \sin \sigma_{0,2n+1} t}{\sigma_{0,2n+1}^2} + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} uEt}{\sigma_{0,2n+1}^2} + \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} uE}{\sigma_{0,2n+1}^2} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} y. \quad (6)$$

Для определения гидродинамических сил давления жидкости на стенки резервуара воспользуемся следующим выражением [5]:

$$\bar{R} = \int_{\tau} g \text{rad} p d\tau.$$

Продольная составляющая сил давления жидкости на стенки сосуда

$$R_x = - \left( 9,5 \frac{\ell}{b} - b \right) \cdot \frac{uE}{2} m. \quad (7)$$

Поперечная составляющая гидродинамических сил определяется выражением следующего вида:

$$R_y = -2 \left( \ell - 0,17 \frac{b}{\ell} \right) \cdot uEm + \frac{4m}{\pi^2 \ell b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{0,2n+1}}{(2n+1)^2} \left[ \left( \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} - \frac{\gamma_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot uE}{\sigma_{0,2n+1}^2} \right) \cos \sigma_{0,2n+1} t - \frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot uE \sin \sigma_{0,2n+1} t}{\sigma_{0,2n+1}^2} \right]. \quad (8)$$

Сравним значения сил давления жидкости на боковые стенки полости при равномерном движении резервуара по путям постоянной и переменной кривизны [4]. При движении резервуара с жидкостью по закругляющемуся пути появляется дополнительная поперечная гидродинамическая сила

$$R_y = -2\left(\ell - 0,17\frac{b}{\ell}\right) \cdot uEm - \frac{4m}{\pi^2 \ell b} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{\beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}^2} \cdot uE \sin \sigma_{0,2n+1} t \right], \quad (9)$$

которая отсутствует при движении резервуара по пути постоянной кривизны.

При равномерном движении резервуара по выпрямляющемуся пути, т.е. при

$$u = \text{const}, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{N + Et} \quad (10)$$

дифференциальные уравнения колебания жидкости примут вид

$$\ddot{q}_{k,n} + \sigma_{k,n}^2 q_{k,n} = -\frac{\beta_{k,n} \cdot \lambda_{k,n} \cdot u^2}{N + Et} + \frac{\gamma_{k,n} \cdot \lambda_{k,n} \cdot Eu}{(N + Et)^2}. \quad (11)$$

При начальном условии (4) решения этих уравнений будут иметь следующий вид:

$$q_{0,2n+1} = \frac{\ell b}{2} \cdot \vartheta_{0,2n+1} \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t + \frac{u \gamma_{0,2n+1}}{Ng} \sin \sigma_{0,2n+1} t + \\ + \frac{u}{g} (u \beta_{0,2n+1} - \gamma_{0,2n+1} \cdot \sigma_{0,2n+1}) \int_0^t \frac{\sin \sigma_{0,2n+1} (t - \tau)}{N + Et} d\tau. \quad (12)$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^t \frac{\sin \sigma_{0,2n+1} (t - \tau)}{N + Et} d\tau = \frac{1}{E} \cos \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right] \cdot si \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right] - \\ - \frac{1}{E} \sin \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right] \cdot ci \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right]. \quad (13)$$

Согласно свойствам интегральных синусов и косинусов в качестве первого приближения можно взять

$$si \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right] \approx -\frac{\cos \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right]}{\frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et)}, \quad (14)$$

$$ci \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right] \approx \frac{\sin \left[ \frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et) \right]}{\frac{\sigma_{0,2n+1}}{E} (N + Et)} \quad (15)$$

и записать исходный интеграл в следующем виде:

$$\int_0^t \frac{\sin \sigma_{0,2n+1} (t - \tau)}{N + Et} dt = -\frac{1}{\sigma_{0,2n+1} (N + Et)} - \frac{\cos \sigma_{0,2n+1} t}{N \cdot \sigma_{0,2n+1}}. \quad (16)$$

Подставив вычисленное значение интеграла в выражение (11), получим

$$q_{0,2n+1} = \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} \cdot \cos(\sigma_{0,2n+1}t) + \frac{u\gamma_{0,2n+1}}{Ng} \sin(\sigma_{0,2n+1}t) - \frac{u}{g} \left( \frac{u\beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}} - \gamma_{0,2n+1} \right) \left[ \frac{1}{(N+Et)\sigma_{0,2n+1}} + \frac{\cos(\sigma_{0,2n+1}t)}{N\sigma_{0,2n+1}} \right]. \quad (17)$$

Уравнение свободной поверхности жидкости для рассматриваемого случая примет вид

$$\zeta_1 = \frac{2}{\ell b} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} \cdot \cos(\sigma_{0,2n+1}t) + \frac{u\gamma_{0,2n+1}}{Ng} \sin(\sigma_{0,2n+1}t) - \left( \frac{u\beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}} - \gamma_{0,2n+1} \right) \frac{u}{g(N+Et)} \right] \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi}{b} y. \quad (18)$$

Свободная поверхность жидкости представляет собой суперпозицию пространственных поперечных волн с уменьшающимися амплитудами.

Определим гидродинамические силы для данного режима движения резервуара:

$$R_x = \left( 9,5 \frac{\ell}{b} - b \right) \cdot \frac{uEm}{2(N+Et)^2}; \quad (19)$$

$$R_y = 2 \left( \ell - 0,17 \frac{b}{\ell} \right) \frac{uEm}{(N+Et)^2} + \frac{4m}{\pi^2 \ell h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{0,2n+1}}{(2n+1)^2} \cdot \left[ \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} \cdot \cos(\sigma_{0,2n+1}t) + \frac{u\gamma_{0,2n+1}}{Ng} \sin(\sigma_{0,2n+1}t) + 2 \left( \frac{u\beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}} - \gamma_{0,2n+1} \right) \frac{uE^2}{g\sigma_{0,2n+1}^2(N+Et)^3} + \frac{u\sigma_{0,2n+1}}{gN} \left( \frac{u\beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}} - \gamma_{0,2n+1} \right) \cos \sigma_{0,2n+1}t \right]. \quad (20)$$

При равномерном движении резервуара по выпрямляющемуся пути появляется продольная гидродинамическая сила, которая давит на передние стенки сосуда; уменьшается по мере выпрямления пути и исчезает при установлении прямолинейного движения системы тело-жидкость (рис. 2,а).

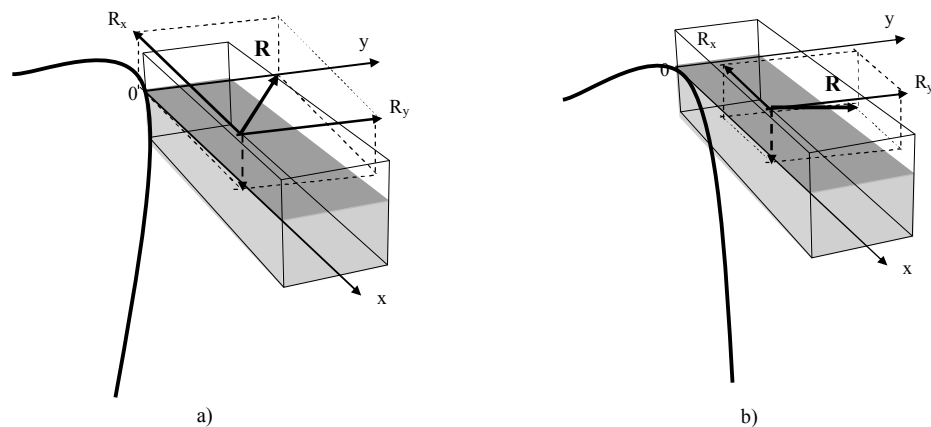


Рисунок 2 – Давление жидкости при движении резервуара по выпрямляющемуся пути (переменной кривизны): а)  $u = \text{const}$ ,  $1/k = 1/(N + Et)$ ; б)  $u = At+B$ ,  $1/k=1/(N+Et)$

Продольная и поперечная гидродинамические силы достигают своего наибольшего значения в начале выпрямления пути. Значения этих сил существенным образом зависят от начальной кривизны выпрямляющегося пути и от размеров резервуара: чем больше кривизна пути до его выпрямления, тем большего значения достигает гидродинамическая сила давления жидкости на стенки сосуда; чем уже резервуар в поперечном сечении, тем больше давление жидкости на передние и боковые стенки.

Рассмотрим равнопеременное движение резервуара по закругляющемуся пути:

$$u = At + B, \quad \frac{1}{k} = Et. \quad (21)$$

В таком случае колебания жидкости в полости описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{q}_{0,n} + \sigma_{0,n} \cdot q_{0,n} = -\beta_{0,n} \cdot \lambda_{0,n} \cdot A^2 t^3 - 2ABE\beta_{0,n}\lambda_{0,n}t^2 - \\ - (B^2\beta_{0,n} \cdot \lambda_{0,n} + 2A\gamma_{0,n} \cdot \lambda_{0,n}) \cdot Et - BE\gamma_{0,n} \cdot \lambda_{0,n}. \quad (22)$$

Их решениями при нулевых начальных условиях на свободной поверхности жидкости будет

$$\ddot{q}_{0,2n+1} = \frac{A^2}{g} \beta_{0,2n+1} t^3 + \frac{2ABE}{g} \beta_{0,2n+1} t^2 + \frac{1}{g} \left( 2AE\gamma_{0,2n+1} + B^2 E \beta_{0,2n+1} - \frac{6A^2 \beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}^2} \right) t + \\ + \frac{BE}{g} \cdot \left( \gamma_{0,2n+1} + \frac{4A\beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}} \right) - \frac{BE}{g} \cdot (\gamma_{0,2n+1} + 4A\beta_{0,2n+1}) \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t - \\ - \frac{1}{g\sigma_{0,2n+1}} \cdot \left( \frac{6A^2 \beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}^2} - BE\gamma_{0,2n+1} \right) \cdot \sin \sigma_{0,2n+1} t. \quad (23)$$

Определим результирующие силы давлений жидкости на передние и боковые стенки полости:

$$R_x = - \left( 9,5 \frac{\ell}{b} - b \right) \cdot \left( At + \frac{B}{2} \right) \cdot Em; \quad (24)$$

$$R_y = -4 \left( \ell - 0,17 \frac{b}{\ell} \right) \cdot \left( At + \frac{B}{2} \right) \cdot Em - \frac{4m}{\pi^2 \ell b g} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \times \\ \times \left[ -3A^2 \cdot \beta_{0,2n+1} \cdot t^2 + 4ABE \cdot \beta_{0,2n+1} \cdot t + BE \cdot (\gamma_{0,2n+1} + 4A\beta_{0,2n+1}) \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t + \right. \\ \left. + \left( \frac{6A^2 \beta_{0,2n+1}}{\sigma_{0,2n+1}} - BE\gamma_{0,2n+1} \right) \cdot \frac{\sin \sigma_{0,2n+1} t}{\sigma_{0,2n+1}} \right]. \quad (25)$$

При ускоренном движении резервуара по закругляющемуся пути на задние стенки полости жидкость давит с возрастающей силой, а при торможении резервуара на повороте эта продольная сила давит через определенное время на передние стенки. На боковые стенки сосуда давит возрастающая поперечная сила  $R_y$ , которая при торможении резер-

вуара на повороте действует на внутреннюю боковую стенку, стараясь развернуть поворот в обратную сторону (рис. 1,б).

Рассмотрим равнопеременное движение резервуара по выпрямляющемуся пути, т.е. случай перехода резервуара с кругового пути на прямой:

$$u = At + B, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{N + Et}. \quad (26)$$

Система (1) примет вид

$$\ddot{q}_{0,n} + \sigma_{0,n}^2 q_{0,n} = -\beta_{0,n} \cdot \lambda_{0,n} \cdot \frac{(At + B)^2}{N + Et} - \gamma_{0,n} \cdot \lambda_{0,n} \cdot \frac{AN - BE}{(N + Et)^2}. \quad (27)$$

При начальном условии (4) и равенстве нулю начальных скоростей частиц жидкости на свободной поверхности, решения системы дифференциальных уравнений (27) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} q_{0,2n+1} = & \left[ \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} + \frac{\gamma_{0,2n+1}}{g} \left( A - \frac{BE}{N} \right) \right] \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t + \\ & + \frac{B^2 \beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot \sin \frac{\sigma_{0,2n+1}}{2} \left( \frac{N}{E} + t \right)}{E \sigma_{0,2n+1} \cdot (N + Et)} + \frac{2A(A - 2B)}{Eg} \beta_{0,2n+1} \cdot \ell n \left( 1 + \frac{E}{N} t \right) + \\ & + \frac{A^2 \beta_{0,2n+1} t^2 + 2AB \beta_{0,2n+1} t + (AN - BE) \cdot \gamma_{0,2n+1}}{g(N + Et)} - \frac{2A^2 \beta_{0,2n+1} t}{Eg}. \end{aligned} \quad (28)$$

Определим давление жидкости на стенки сосуда

$$R_x = - \left( 9,5 \frac{\ell}{b} - b \right) \cdot (AN - EB) \cdot \frac{m}{2(N + Et^2)}; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} R_y = & - \left( \ell - 0,17 \frac{b}{\ell} \right) \cdot (AN - BE) \cdot \frac{2}{(N + Et)^2} m + \frac{4m}{\pi^2 \ell h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_{0,2n+1}^2}{(2n+1)^2} \times \\ & \times \left\{ - \left[ \frac{\ell b}{2} g_{0,2n+1} + \frac{\gamma_{0,2n+1}}{g} \left( A - \frac{BE}{N} \right) \right] \cdot \cos \sigma_{0,2n+1} t + \frac{B^2 \beta_{0,2n+1} \cdot \lambda_{0,2n+1} \cdot \sin \frac{\sigma_{0,2n+1}}{2} \left( \frac{N}{E} + t \right)}{E \cdot \sigma_{0,2n+1} (N + Et)^2} + \right. \\ & + E^2 \cdot \frac{A \cdot \beta_{0,2n+1} \cdot t^2 + 2AB \cdot \beta_{0,2n+1} \cdot t + (AN + BE) \cdot \gamma_{0,2n+1}}{g(N + Et)^4} + 2EA \cdot \beta_{0,2n+1} \cdot \frac{t + B}{g(N + Et)^3} - \\ & \left. - \frac{2A \cdot \beta_{0,2n+1}}{g(N + Et)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

При вычислении  $R_y$  пренебрегли членами ряда, содержащими множители

$$\frac{\cos \sigma_{0,2n+1}t}{(N+Et)^3}, \frac{\sin \sigma_{0,2n+1}t}{(N+Et)^4}. \quad (31)$$

Продольная гидродинамическая сила при ускорении движения резервуара на выпрямлении пути давит на задние стенки полости, при торможении резервуара на выпрямлении пути эта сила давит на передние стенки сосуда. Значение этой силы стремится к нулю при переходе к прямолинейному пути движения резервуара (рис. 2,б).

Поперечная гидродинамическая сила давлений жидкости на стенки сосуда своего наибольшего значения достигает в начале выпрямления пути и не изменит своего направления при ускоренном движении резервуара. При торможении резервуара на выпрямлении пути эта сила через некоторое время может изменить свое направление и при достижении достаточного значения эта сила в состоянии развернуть корпус резервуара в обратную сторону поворота, что влечет за собой возникновение потери заданного режима движения системы тело- жидкость.

Сравнивая полученные результаты для гидродинамических сил давления жидкости на стенки ёмкости на выпрямлении пути при различных режимах движения в выражениях (19), (20) и (29), (30), можно сказать, что движение резервуара по выпрямляющемуся пути будет наиболее устойчивым при ускоренном режиме движения системы тело- жидкость. При таком режиме движения резервуара сохраняется направление действия гидродинамических сил на боковые стенки рассматриваемой ёмкости.

Сравним результаты расчетов движения системы тело- жидкость по закругляющемуся пути при различных режимах движения резервуара. Из полученных выражений для гидродинамических сил давления жидкости при различных режимах движения механической системы тело- жидкость (7), (8) и (24), (25) следует, что наиболее безопасным с точки зрения устойчивости движения резервуара является равномерное движение на повороте. При входе на поворот результирующая гидродинамическая сила давлений жидкости на боковые стенки резервуара возрастает с течением времени и по достижении определенного значения будет угрожать устойчивости к опрокидыванию ёмкости.

#### Список литературы

1. Аманжолова Ш.С. Задача о собственных колебаниях жидкости в полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда // Вестник ВКГТУ им. Д.Серикбаева. - 2006. - №2. - Усть-Каменогорск, 2006. - С.60-66.
2. Аманжолова Ш.С. Вынужденные колебания жидкости в резервуаре, имеющем форму параллелепипеда // Вестник ВКГТУ им. Д.Серикбаева. - 2006. - №3. - Усть-Каменогорск, 2006. - С.55-61.
3. Аманжолова Ш.С. Уравнения свободной поверхности жидкости в полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда // Региональный вестник Востока. - 2006. - №3. - Усть-Каменогорск, 2006. - С.27-34.
4. Аманжолова Ш.С. О движении твердого тела с полостью, содержащей жидкость, под действием внешней периодической силы // Сб. по вопросам математики и механики. - Алма-Ата, 1988. - Вып.8. - С.105-109.
5. Колесников К.С. Динамика ракет. - М.: Машиностроение, 1980. - 376 с.
6. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1978. - 248 с.
7. Моисеев Н.Н. Численные методы расчета собственных колебаний ограниченного объема жидкости / Н.Н. Моисеев, А.А. Петров. - М.: ВЦ АН СССР, 1966. - 269 с.
8. Моисеев Н.Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев. - М.: Наука, 1965. - 439 с.
9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича, И. Стриган. - М.: Наука, 1979. - 830 с.
10. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. - М.: Наука, 1977. - 342 с.

Получено 15.10.07

УДК 625.7/8

**Б.Н. Глотов, Георг. Г. Пивень**  
КарГТУ, г. Караганда

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО  
РУЧНОГО МОЛОТКА РГМ-6**

Конструктивная схема гидравлического ручного молотка РГМ – 6, отличающаяся рядом конструктивных признаков от разработанных ранее технических решений, является одним из вариантов реализации перспективной структурной схемы  $X_2X_5X_7$ , характеризующейся структурными признаками: напорная, постоянной структуры, прямого действия, подготовленного вытеснения с позиционной обратной связью в управлении распределительным устройством [1]. Для проведения комплекса исследований, направленных на определение особенностей рабочего цикла, рациональных конструктивных параметров, обеспечивающих конкурентоспособные показатели назначения, разработана математическая модель рабочего процесса, включающая: уравнения движения подвижных элементов (поршня-бойка, корпуса, клапана, рукоятки); уравнения расходов рабочей жидкости для камер холостого и рабочего хода и сливной гидролинии; логические соотношения, определяющие структуру математической модели.

Математическая модель разработана с учетом допущений, апробированных при моделировании гидравлических импульсных систем [2], в соответствии с расчетной схемой, приведенной на рис. 1. В качестве точки отсчета принята точка контакта поршня-бойка с хвостовиком инструмента и введены координаты:  $X, Y, Z, U$  – соответственно описывающие текущее положение поршня-бойка, корпуса, клапана, рукоятки;  $X_0, Y_0, Z_0, U_0$  – соответственно координаты начальных положений подвижных элементов;  $\delta = (X - Z)$  – обобщенная координата, характеризующая взаимное положение поршня-бойка и корпуса;  $\gamma = (U - Z)$  – обобщенная координата, характеризующая взаимное положение корпуса и рукоятки;  $W = (U - X)$  – обобщенная координата, характеризующая взаимное положение рукоятки и поршня-бойка. За положительное направление действия сил принято направление координат от забоя.



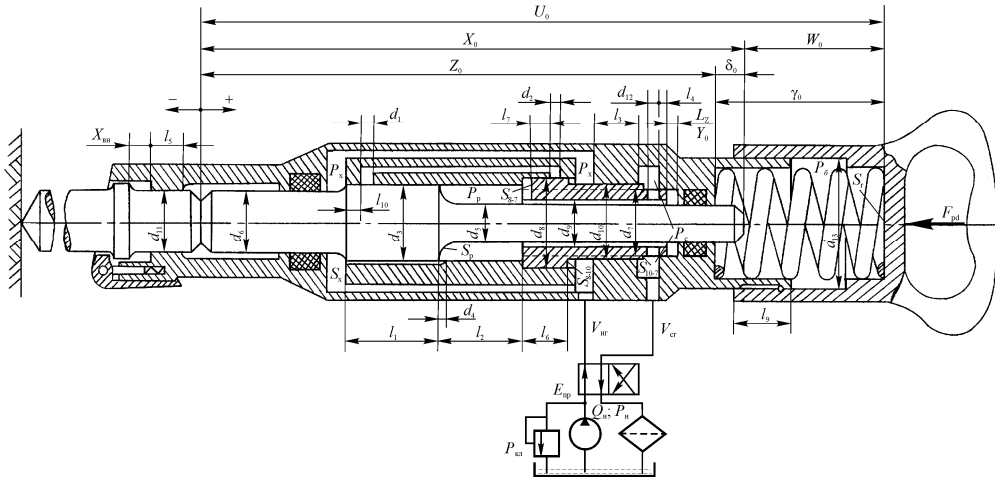


Рисунок 1 – Расчетная схема РГМ-6

На основании принципа работы и в соответствии с расчетной схемой гидравлического молотка РГМ-6, дифференциальные уравнения движения подвижных элементов имеют следующий вид:

$$\ddot{X} = \{P_x \cdot S_x - P_p \cdot S_p - (P_b - P_2) \cdot S_{d5} - [\pi \cdot f \cdot h \cdot (n_1 \cdot d_6 \cdot P_x + n_2 \cdot d_5 \cdot P_p) + K_u \cdot f_1 \cdot d_3 \times$$

$$\times l_1 \cdot P_x] \cdot \text{sgn}(\dot{X} - \dot{Z}) - M_b \cdot g + M_z \cdot \ddot{Y} \cdot t_1\} / (M_b + M_z \cdot t_1); \quad (1)$$

$$\ddot{Z} = \{P_p \cdot S_p \cdot t_{k1} - P_x \cdot S_x \cdot (P_b - P_2) \cdot S_{14-5} - F_{pr} + [P_x \cdot S_{8-10} + P_c \cdot S_{10-7} - P_p \cdot (S_{8-3} - S_{7-5})] \times$$

$$\times t_{k1} - (M_k + M_z \cdot t_{k1}) \cdot g - [\pi \cdot f \cdot h \cdot (n_1 \cdot d_6 \cdot P_x + n_2 \cdot d_5 \cdot P_p) + K_u \cdot f_1 \cdot d_3 \cdot l_1 \cdot P_x] \times$$

$$\times \text{sgn}(\dot{Z} - \dot{X}) - K_u \cdot f_1 \cdot d_{11} \cdot l_5 \cdot P_2 \cdot \text{sgn} \dot{Z} - K_u \cdot f_1 \cdot d_{13} \cdot l_9 \cdot P_b \cdot \text{sgn}(\dot{Z} - \dot{U}) - [P_x \cdot K_u \times$$

$$\times f_1 \cdot (d_{10} \cdot l_3 + d_8 \cdot l_6) + K_u \cdot f_1 \cdot d_7 \cdot (Y - Z + l_4) \cdot P_p] \cdot \text{sgn}(\dot{Z} - \dot{Y})\} / (M_k + M_z \cdot t_{k1}); \quad (2)$$

$$\ddot{Y} = \{P_p \cdot S_{8-7} - P_x \cdot S_{8-10} - P_c \cdot S_{10-7} - [P_x \cdot K_u \cdot f_1 \cdot (d_{10} \cdot l_3 + d_8 \cdot l_6) + K_u \cdot f_1 \cdot d_7 \cdot (Y - Z +$$

$$+ l_4) \cdot P_p] \cdot \text{sgn}(\dot{Y} - \dot{Z}) - M_z \cdot g\} / M_z; \quad (3)$$

$$\ddot{U} = [(P_b - P_2) \cdot S_r + F_{pr} - F_{pd} - K_u \cdot f_1 \cdot d_{13} \cdot l_9 \cdot P_b \cdot \text{sgn}(\dot{U} - \dot{Z}) - M_r \cdot g] / M_r; \quad (4)$$

$$t_{k1} = \begin{cases} 0, & \text{при } \dot{Y} \neq 0, \\ 1, & \text{при } \dot{Y} = 0, \end{cases} \quad t_{k2} = \begin{cases} 1, & \text{при } \dot{Y} \neq 0, \\ 0, & \text{при } \dot{Y} = 0, \end{cases} \quad t_1 = \begin{cases} 1, & \text{при } \dot{X} > \dot{Y}; \dot{X} > 0; \delta_1 > l_2, \\ 0, & \text{при } \delta_1 < l_2, \\ 0, & \text{при } \delta_1 - l_2 < Y - Z. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения расходов рабочей жидкости в камерах холостого и рабочего хода описаны с использованием формулы

$$\dot{P} = P \cdot E_{np} \cdot (\dot{V}_{cжс} - \dot{V} \cdot V_{cжс} / V) / V, \quad (6)$$

в которой текущие объемы и объемы сжатия вычисляются следующим образом:

$$\dot{V}_x^{cжс} = Q_n - Q_{d4} - Q_{y3} - Q_{y8} - Q_{y10} - Q_{d2} - \dot{V}_x; \quad (7)$$

$$V_x = V_m + V_{xo} + S_x \cdot \delta_1 - S_{8-10} \cdot (Y - Z); \quad (8)$$

$$\dot{V}_x = S_x \cdot (\dot{X} - \dot{Y}) - S_{8-10} \cdot (\dot{Y} - \dot{Z}); \quad (9)$$

$$\dot{V}_p^{сж} = Q_{d4} + Q_{y3} + Q_{y8} + Q_{d2} - Q_{y7} - Q_{d12} - \dot{V}_p; \quad (10)$$

$$V_p = V_{po} - S_p \cdot \bar{\sigma}_1 - S_{8-7} \cdot (Y - Z); \quad (11)$$

$$\dot{V}_p = S_{8-7} \cdot (\dot{Y} - \dot{Z}) - S_p \cdot (\dot{X} - \dot{Z}). \quad (12)$$

Расход рабочей жидкости через отверстия  $d_2$ ,  $d_4$ ,  $d_{12}$  описан с использованием уравнения расхода через дроссель, в котором функции изменения площадей переливных отверстий имеют следующий вид:

$$S_{d1} = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{\sigma}_1 \leq l_{10}, \\ 2 \cdot a_1 \cdot (d_1 - \bar{\sigma}_1 + l_{10}), & \text{при } \bar{\sigma}_1 > l_{10}, \\ 2 \cdot a_1, & \text{при } \bar{\sigma}_1 > l_{10} + d_1, \end{cases} \quad (13)$$

$$S_{d4} = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{\sigma}_1 \geq d_4, \\ 2 \cdot d_4 \cdot l_9, & \text{при } 0 \leq \bar{\sigma}_1 < d_4, \end{cases} \quad (14)$$

$$S_{d2} = \begin{cases} S_{d2}, & \text{при } S_{d2} < S_{d1}, \\ S_{d1}, & \text{при } S_{d2} \geq S_{d1}, \end{cases} \quad (15)$$

$$S_{d2} = \begin{cases} 0, & \text{при } Y - Z \geq l_7, \\ 4 \cdot a_2 \cdot (Y - Z - l_7), & \text{при } Y - Z < l_7, \end{cases} \quad (16)$$

$$S_{d12} = \begin{cases} 0.785 \cdot n_4 \cdot d_{12}^2, & \text{при } Y - Z \leq 0, \\ 0.785 \cdot n_4 \cdot d_{12} \cdot (d_{12} - Y + Z), & \text{при } Y - Z < d_{12}, \\ 0, & \text{при } Y - Z \geq d_{12}, \end{cases} \quad (17)$$

где  $l_9$  – ширина пускового канала, м;

$l_{10}$  – величина перекрытия переливного канала  $d_1$ , м;

$a_1$ ,  $a_2$  – соответственно длина переливного канала  $d_1$  и  $d_2$ , м;

$n_2$  – количество отверстий  $d_{12}$ .

Утечки рабочей жидкости через зазоры  $d_{e10}$ ,  $d_{e7}$  сопряжений  $d_{10} - l_3$ ,  $d_7 - l_{h7}$  и через зазоры  $d_{e8}$ ,  $d_{e3}$  сопряжений  $d_8 - l_{h8}$ ,  $d_3 - l_{h3}$  описаны следующими уравнениями:

$$Q_{y8} = \begin{cases} Q'_{y8} = \frac{\pi \cdot d_8 \cdot d_{e8}^3 \cdot l_{h8} \cdot (P_x - P_p) \cdot t_{p1} \cdot u_{k1}}{12 \cdot n_u}, \\ Q''_{y8} = F_u \cdot \pi \cdot d_8 \cdot d_{e8} \cdot \left( \frac{2 \cdot |P_x - P_p|}{r} \right)^{0.5} \cdot t_{xr} \cdot t_{p1} \cdot u_{k2}, \end{cases} \quad (18)$$

$$l_{h8} = \begin{cases} 0, & \text{при } Y - Z \geq l_7, \\ \frac{1}{(l_7 - Y + X)}, & \text{при } Y - Z < l_7, \end{cases} \quad (19)$$

$$t_{p1} = \begin{cases} 0, & \text{при } Y - Z \geq l_7, \\ 1, & \text{при } Y - Z < l_7, \end{cases} \quad t_{p2} = \begin{cases} 0, & \text{при } Y - Z < l_7, \\ 1, & \text{при } Y - Z \geq l_7, \end{cases} \quad (20)$$

$$u_{k1} = \begin{cases} 1, & \text{при } Q'_{y8} < Q''_{y8}, \\ 0, & \text{при } Q'_{y8} \geq Q''_{y8}, \end{cases} \quad u_{k2} = \begin{cases} 1, & \text{при } Q'_{y8} \geq Q''_{y8}, \\ 0, & \text{при } Q'_{y8} < Q''_{y8}, \end{cases} \quad (21)$$

$$Q'_{y3} = \begin{cases} Q'_{y3}, & \text{при } Q'_{y3} \leq Q''_{y3}, \\ Q''_{y3}, & \text{при } Q'_{y3} > Q''_{y3}, \end{cases} \quad (22)$$

$$Q'_{y3} = \frac{\pi \cdot d_3 \cdot d_{e3}^3 \cdot l_{h3} \cdot (P_x - P_p)}{12 \cdot n_u}, \quad (23)$$

$$Q'_{y3} = F_u \cdot \pi \cdot d_3 \cdot d_{e3} \cdot \left( \frac{2 \cdot |P_x - P_p|}{r} \right)^{0.5} \cdot t_{xr}, \quad (24)$$

$$l_{h3} = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{\sigma}_1 < d_4, \\ \frac{1}{\bar{\sigma}_1 - d_4}, & \text{при } \bar{\sigma}_1 \geq d_4, \\ l_1, & \text{при } l_{h3} < l_1, \end{cases} \quad (25)$$

$$Q_{y7} = \frac{\pi \cdot d_7 \cdot d_{e7}^3 \cdot l_{h7} \cdot (P_x - P_p)}{12 \cdot n_u}, \quad (26)$$

$$l_{h7} = \begin{cases} 0, & \text{при } Y - Z \leq d_{12}, \\ \frac{1}{Y - Z - d_{12}}, & \text{при } Y - Z > d_{12}, \end{cases} \quad (27)$$

где  $l_{h3}$ ,  $l_{h7}$ ,  $l_{h8}$  – соответственно длина зазора по диаметрам  $d_3$ ,  $d_7$ ,  $d_8$ .

$$t_{xr} = \text{sgn}(P_x - P_p); \quad t_{r1} = \text{sgn}(P_p - P_c); \quad t_{lb} = \text{sgn}(P_c - P_b). \quad (28)$$

Уравнение расходов рабочей жидкости для сливной гидролинии

$$\dot{P}_c = P_c + \frac{E_{np} \cdot [Q_{y10} + Q_{y7} + Q_{d12} + S_{10-7} \cdot (Y - Z) - Q_{dcz}]}{V_c}, \quad (29)$$

где  $Q_{dcz}$  – расход рабочей жидкости в сливной гидролинии, определяемый уравнением расхода через дроссель.

С учетом рассмотренных зависимостей дифференциальные уравнения (7), (9), (29) математической модели примут следующий вид:

$$\dot{V}_x^{cm} = Q_n - F_u \cdot (S_{d4} + \pi \cdot d_8 \cdot d_{e8} \cdot t_{p1} \cdot u_{k2} + S_{d2}) \cdot \left( \frac{2 \cdot |P_x - P_p|}{r} \right)^{0.5} \cdot t_{xr} - \pi \cdot d_8 \cdot d_{e8}^3 \cdot l_{h8} \times \quad (30)$$

$$\times (P_x - P_p) \cdot t_{p1} \cdot u_{k1} / (12 \cdot n_u) - Q'_{y3} - \pi \cdot d_{10} \cdot d_{e10}^3 \cdot (P_x - P_c) - \dot{V}_x;$$

$$\dot{V}_p^{cm} = F_u \cdot (S_{d4} + \pi \cdot d_8 \cdot d_{e8} \cdot t_{p1} \cdot u_{k2} + S_{d2}) \cdot \left( \frac{2 \cdot |P_x - P_p|}{r} \right)^{0.5} \cdot t_{xr} + Q'_{y3} + \pi \cdot d_8 \cdot d_{e8}^3 \cdot l_{h8} \times \quad (31)$$

$$\times t_{rl} - \dot{V}_p;$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_c = & E_{np} \cdot P_c \cdot [\pi \cdot d_{10} \cdot d_{e10}^3 \cdot (P_x - P_c) / (12 \cdot n_u \cdot L_3) + S_{10-7} \cdot (Y - Z) + \pi \cdot d_7 \cdot d_{e7}^3 \cdot l_{h7} \cdot (P_p - P_c) - \\ & - F_u \cdot S_{cz} \cdot \left( \frac{2 \cdot |P_c - P_b|}{r} \right)^{0.5} \cdot t_{lb} + F_u \cdot S_{d12} \cdot \left( \frac{2 \cdot |P_p - P_c|}{r} \right)^{0.5} \cdot t_{rl}. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, рабочий процесс гидравлического ручного молотка рассматриваемой

конструкции описывается системой дифференциальных уравнений (1) – (4), (9), (12), (30) – (32), алгебраических зависимостей (8), (11), (13) – (19), (23) – (28) и логических выражений (5), (20) – (22).

Разработанная математическая модель является частью программного средства, предназначенного для исследования динамических режимов работы, определения рациональных энергетических, силовых и кинематических параметров гидравлического молотка. Модель позволяет получить полную картину рабочего цикла с учетом переходных процессов, а возможность моделирования последовательности рабочих циклов позволяет в полной мере отразить функционирование создаваемого ручного молотка.

Результаты моделирования рабочего процесса представляются в виде типовых диаграмм, получаемых в табличном и графическом виде. На типовой диаграмме (рис. 2), полученной при решении математической модели с подачей насоса  $Q_n = 0,0005 \text{ м}^3/\text{с}$ , изображены графики изменения по времени давления в камерах холостого  $P_x$  и рабочего  $P_p$  хода и в сливной гидролинии  $P_c$  (кривые 1, 2, 3); скорости (кривые 4, 5, 6) и перемещения (кривые 8, 9, 7) корпуса, клапана и поршня-бойка. Для описания особенностей рабочего цикла основные его моменты выделены вертикальными штриховыми линиями, обозначенными цифрами I, II, III.

Линия I соответствует началу переходного процесса, наступающего после соударения поршня-бойка с хвостовиком инструмента со скоростью  $\dot{X}_y = 9,11 \text{ м/с}$  (кривая 6), сопровождающегося отскоком и остановкой поршня-бойка, выбегом и торможением корпуса, закрытием клапана. Переходный процесс соответствует участку I – II, длительность которого  $t_y$  составляет 0,0035 с. Анализ этого участка показывает, что в момент соударения переливной канал  $d_l$  (рис. 1) не перекрывается участком поршня-бойка  $d_3$ , то есть не создается сопротивления перетеканию рабочей жидкости, и удар наносится без загиба кривой скорости поршня-бойка. Клапан при этом остается неподвижным, а переливной канал  $d_2$  открыт полностью. Так как камеры рабочего и холостого хода соединены и давление в них практически одинаковое (равное соответственно 9,72 и 9,71 МПа), то происходит движение корпуса в сторону рукоятки с нарастающей скоростью  $\dot{Z}_{p.x}$  до тех пор, пока не перекроется канал  $d_l$ . После его перекрытия камеры разобщаются. Давление  $P_x$  начинает повышаться, а давление  $P_p$  снижается, так как объем камеры рабочего хода увеличивается за счет движения корпуса. Это приводит к началу торможения корпуса и закрытию клапана под действием давления в камере напора, равного давлению  $P_x$ , со скоростью  $\dot{Y}_3$  (линия II). Перемещение клапана на закрытие приводит к перекрытию канала  $d_2$ , открытию канала  $d_{l2}$ , связывающего камеру рабочего хода с камерой слива и сливной гидролинией, и остановке клапана упором корпуса.

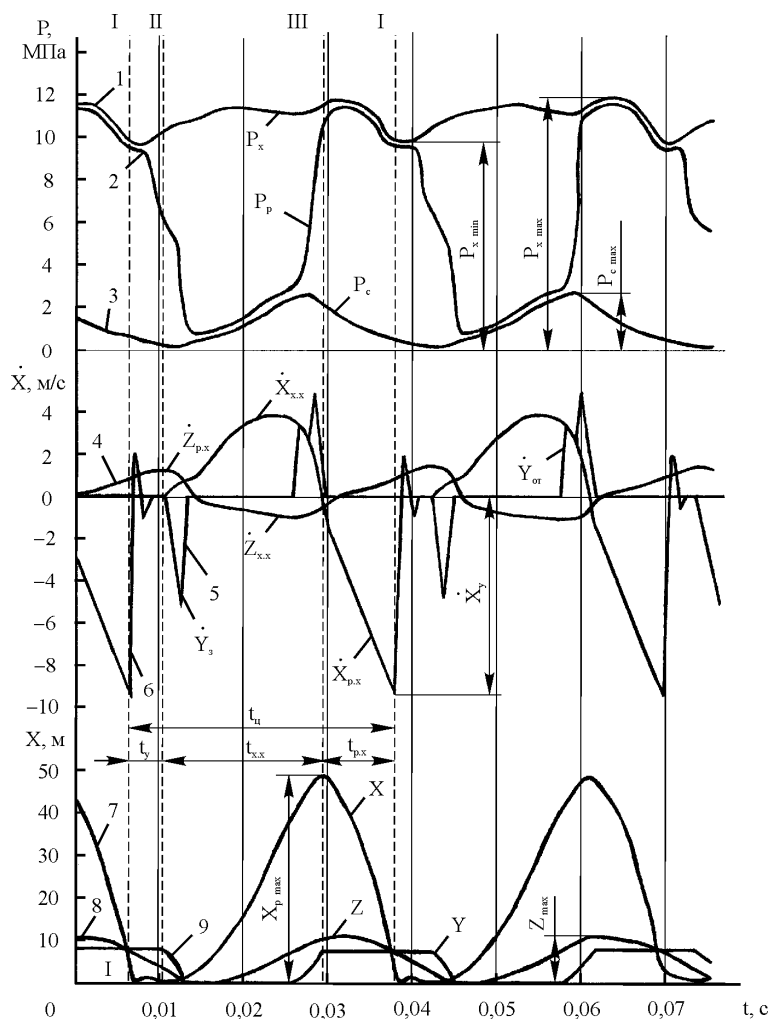


Рисунок 2 – Диаграмма РГМ-6К

Открытие канала  $d_{12}$  сопровождается падением давления  $P_p$  с 6,4 МПа до давления  $P_c = 0,8$  МПа (кривые 2 и 3), торможением и остановкой корпуса (кривая 4). Повышение давления жидкости в камере холостого хода (кривая 1) обуславливает перемещение поршня-бойка (участок II – III) с возрастающей скоростью  $\dot{X}_{x.x}$  (кривая 6), максимальное значение которой достигает 3,9 м/с, и движение корпуса в сторону инструмента (кривая 4), максимальная скорость которого  $\dot{Z}_{p.x}$  достигает 0,97 м/с. В конце холостого хода поршень-боек входит в контакт с клапаном и начинается его перемещение на пути перекрытия  $l_7$ , равного 0,003 м, с падающей скоростью. На этом участке скорости движения поршня-бойка и клапана равны.

После выбора пути  $l_7$  открывается переливной канал  $d_2$ , и закрывается канал  $d_{12}$ , т. е. происходит соединение камеры холостого хода с камерой рабочего хода и отсоединение последней от сливной гидролинии. Давление в камере рабочего хода повышается до давления в камере холостого хода (кривые 1 и 2), равного 11,4 МПа, что обуславливает тор-

можение и остановку поршня-бойка и корпуса (кривые 4 и 6). Клапан под действием давления в камере рабочего хода на площадь  $S_{8.7}$  перемещается в крайнее правое (рис. 1) положение и останавливается, проходя путь  $L_z = 0,008$  м, и полностью открывает переливной канал  $d_2$ . Давление в сливной гидролинии (кривая 3) начинает снижаться, так как в нее поступают только утечки из камер напора и рабочего хода. Линия III соответствует концу холостого хода поршня-бойка, который за время  $t_{x.x} = 0,0183$  с, проходит путь  $X_p = 0,045$  м.

Под действием давления рабочей жидкости в камере рабочего хода на активную площадь поршня-бойка он начинает совершать рабочий ход, двигаясь с возрастающей скоростью  $\dot{X}_{p.x}$  к инструменту (участок III–I, кривые 6 и 7). Одновременно в сторону рукоятки с возрастающей скоростью  $\dot{Z}_{p.x}$  (кривые 4 и 8) движется корпус. Рабочий ход поршня-бойка, характеризуемый временем  $t_{p.x} = 0,0099$  с, сопровождается падением давления в камерах холостого и рабочего хода с 11,7 до 9,6 МПа. В конце рабочего хода поршень-боек наносит удар по хвостовику инструмента со скоростью  $\dot{X}_y = 9,11$  м/с (кривая 6, линия I), сопровождающийся отскоком. На этом рабочий цикл, характеризуемый временем  $t_u = 0,0317$  с, заканчивается.

Анализ полученной диаграммы показывает, что поршень-боек обеспечивает энергию удара 62,2 Дж при частоте ударов 31,5 Гц. За рабочий цикл гидропривод совершает работу 208,2 Дж, а КПД гидравлического молотка составляет 29,9%. Наибольшее давление гидропривода составляет 11,7 МПа.

Таким образом, разработанное программное средство позволяет выполнять комплекс теоретических исследований по установлению закономерностей влияния конструктивных параметров молотка на его показатели назначения.

#### Список литературы

1. Янцен И.А. Основание выбора конструкции ручного гидромолотка / И.А. Янцен, Б.Н. Гло-тов, Георг.Г. Пивень // Тр. ун-та. – Караганда: КарГТУ, 1999. – Вып. 4. – С. 41–44.
2. Гловтов Б.Н. Теоретические вопросы создания ручного гидравлического молотка / Б.Н. Гло-тов, Георг.Г. Пивень. – Караганда: КарГТУ, 2000. – 81 с.

Получено 30.10.07

УДК 631.316.02

**В.Г. Гниломёдов**

СГСА, г. Самара

**А.А. Нугманов**

ЗКАУ им. Жангир хана, г. Уральск

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЯГОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОЙ  
КУЛЬТИВАТОРНОЙ ЛАПЫ ПРИ ОБРАБОТКЕ СУХИХ И ТВЕРДЫХ ПОЧВ

Согласно основным исследованиям по определению тягового сопротивления почвообрабатывающих рабочих органов, технологический процесс комбинированной культиваторной лапы при взаимодействии с обрабатываемым слоем почвы будет представлять работу двугранного клина, так как высота  $h_L$  лапы одинакова по всей ширине  $B$ , т.е.  $h_L = \text{const}$  (рис. 1), в сочетании с вертикальной режущей пластиной, установленной на середине клина.

Следовательно, если допустить, что обрабатываемая однородная столбчатая структура сухой почвы не имеет трещин, которые будут только снижать сопротивление почвы, то тяговое сопротивление комбинированной культиваторной лапы должно быть определено как сумма тяговых сопротивлений её составных элементов и отвечать условию:

$$P = P_P + P_L + P_D + P_C + P_{\Pi} + P_V \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $P_P$  – тяговое сопротивление вертикальной режущей пластины, Н;

$P_L$  – тяговое сопротивление режущих кромок лапы, Н;

$P_D$  – тяговое сопротивление на деформацию почвы, Н;

$P_C$  – тяговое сопротивление на сдвиг почвы, Н;

$P_{\Pi}$  – тяговое сопротивление на подъем пласта почвы, Н;

$P_V$  – тяговое сопротивление по преодолению инерции почвы, Н.

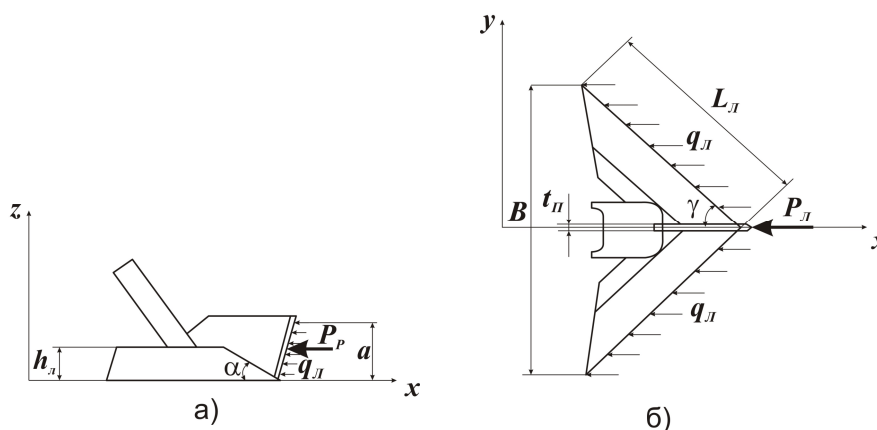


Рисунок 1 – Схема сил сопротивления почвы резанию: а) в вертикальной плоскости; б) в горизонтальной плоскости

Режущая кромка вертикальной пластины производит сжатие почвы впереди себя, разрезает и затем раздвигает её в стороны, разделяя столбчатую фракцию на два пласта. Учитывая малый объем почвы, воздействующий на лезвие, влиянием скорости на усилие внедрения вертикальной режущей пластины можно пренебречь [1], тогда её тяговое сопротивление (рис. 1, а)

$$P_P = q_L \cdot t_{\Pi} \cdot a, \quad (2)$$

где  $q_L$  – удельное сопротивление почвы резанию, приходящееся на единицу лобового сечения лезвия, Н/м<sup>2</sup>;





$\alpha$  – угол наклона передней плоскости клина к дну борозды, град;

$\psi_1$  – угол сдвига почвы в продольно-вертикальной плоскости, град, равный [2]:

$$\psi_1 = \frac{\pi - \alpha - \varphi - \varphi'}{2}, \quad (8)$$

где  $\varphi$  – угол трения почвы о поверхность клина, град;

$\varphi'$  – угол внутреннего трения почвы, град.

Спроецировав силу  $D$  и силу трения  $f \cdot N_1$ , возникающую на режущей кромке, на горизонтальную ось  $x$ , получим соответственно:

- тяговое сопротивление на деформацию почвы

$$P_D = \tau_{\max} \cdot F \cdot \cos \psi_1, \quad (9)$$

- тяговое сопротивление на сдвиг почвы

$$P_C = f \cdot N_1 \cdot \cos \alpha = f \cdot \tau_{\max} \cdot F \cdot \sin(\alpha + \psi_1) \cdot \cos \alpha. \quad (10)$$

При этом следует учитывать то, что угол наклона передней плоскости клина зависит от геометрических параметров лапы и равен:

$$\alpha = \arcsin(\sin \gamma \cdot \sin \beta), \quad (11)$$

где  $\beta$  – угол постановки рабочей поверхности крыла лапы ко дну борозды, град.

Фронтальная компоновка рабочих органов почвообрабатывающих и посевных машин является самой рациональной, и предлагается 3- или 4-рядная конфигурация их расстановок. Сеялки фирмы «Flexi-Coil» (Флекси-Койл) также имеют выбор 3- или 4-рядной расстановки сошников и культиваторных лап.

Следует отметить, что при таких конфигурациях расстановки рабочие органы работают в различных условиях и площади плоскостей сдвига будут иметь разную величину, соответственно:

- для первого ряда, обычно, – условия заблокированного резания (выступ закрыт с двух сторон):

$$F_1 = \frac{a \cdot (B + a \cdot \operatorname{ctg} \psi_2)}{\sin \psi_1}, \quad (12)$$

где  $\psi_2$  – угол сдвига почвы в поперечно-вертикальной плоскости, град;

- для второго ряда – условия полублокированного резания (выступ открыт с одной стороны):

$$F_2 = \frac{a \cdot (B + 0,5 \cdot a \cdot \operatorname{ctg} \psi_2)}{\sin \psi_1}, \quad (13)$$

- для третьего ряда – условия свободного резания (выступ открыт с обеих сторон):

$$F_2 = \frac{a \cdot B}{\sin \psi_1}, \quad (14)$$

Тяговое сопротивление  $P_{\Pi}$  на подъем пласта по наклонной рабочей поверхности  $BC$  (рис. 3) определяется усилием подпора почвы, затрачиваемого непосредственно на подъем почвы и преодоление сил трения на лапе. Примем допущение, что высота пласта почвы на клине равна глубине обработки

$$h_{\Pi} \approx a, \quad (15)$$

а длина рабочей поверхности зависит от высоты  $h_{\text{Л}}$  лапы  $AC = \frac{h_{\text{Л}}}{\sin \alpha}$ .

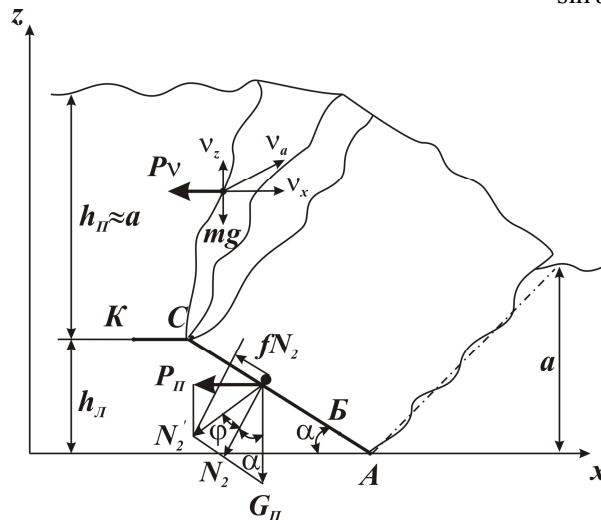


Рисунок 3 – Схема сил, действующих на наклонной рабочей поверхности BC

Нормальное давление на рабочую поверхность

$$N_2 = G_{\text{П}} \cdot \cos \alpha = \rho \cdot \frac{h_{\text{Л}}}{\sin \alpha} \cdot B \cdot a \cdot \cos \alpha, \quad (16)$$

где  $G_{\text{П}}$  – сила тяжести пласта почвы, Н;

$\rho$  – плотность почвы, Н/м<sup>3</sup>,

Сила трения на поверхности клина равна  $fN_2$ , а равнодействующая сил  $N_2$  и  $fN_2$  будет  $N_2' = \frac{N_2}{\cos \varphi}$ . Проецируя силу  $N_2'$  на горизонтальную ось  $x$ , находим составляющую

$P_{\text{П}}$  тягового сопротивления лапы:

$$P_{\text{П}} = N_2' \cdot \sin(\alpha + \varphi). \quad (17)$$

Подставляя значения сил  $N_2$  и  $N_2'$  в формулу (17) и проведя преобразование, получим:

$$P_{\text{П}} = \rho \cdot B \cdot a \cdot h_{\text{Л}} \cdot \text{ctg} \alpha \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha). \quad (18)$$

Влияние скорости движения культиваторной лапы на её тяговое сопротивление, затрачиваемое на динамическое воздействие по преодолению инерции и отбрасыванию почвы в стороны (рис. 3), определяется по зависимости [3]:

$$P_v = \frac{a \cdot B \cdot \rho}{g} \cdot v^2 \cdot \sin \alpha \cdot \text{tg}(\alpha + \varphi), \quad (19)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$v$  – скорость движения рабочего органа, м/с.

Подставив в выражение (1) значения соответствующих составляющих  $P_p$  (2),  $P_{\text{Л}}$  (5),  $P_{\text{Д}}$  (9),  $P_{\text{С}}$  (10),  $P_{\text{П}}$  (18) и  $P_v$  (19), получим уравнение тягового сопротивления комби-

нированной стрелчатой лапой в общем виде:

$$P = q_{\text{Л}} \cdot t_{\text{Л}} \cdot a + \frac{q_{\text{Л}} \cdot t_{\text{Л}} \cdot B}{\sin \gamma} + \tau_{\text{max}} \cdot F \cdot \cos \psi_1 + f \cdot \tau_{\text{max}} \cdot F \cdot \sin(\alpha + \psi_1) \cdot \cos \alpha + \\ + \rho \cdot a \cdot B \cdot h_{\text{Л}} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha) + \frac{\rho \cdot a \cdot B \cdot v^2 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{g}. \quad (20)$$

После перегруппировки составляющих уравнения (20) получим расчетную формулу для определения тягового усилия одной комбинированной стрелчатой лапы:

$$P = q_{\text{Л}} \cdot \left[ t_{\text{Л}} \cdot a + \frac{t_{\text{Л}} \cdot B}{\sin \gamma} \right] + \tau_{\text{max}} \cdot F \cdot [\cos \psi_1 + f \cdot \sin(\alpha + \psi_1) \cdot \cos \alpha] + \\ + \rho \cdot a \cdot B \cdot \left[ h_{\text{Л}} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha) + \frac{v^2}{g} \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right]. \quad (21)$$

Анализируя выражение (21), видно, что:

- первый блок формулы показывает суммарное сопротивление, затрачиваемое на резание почвы;

- второй - суммарное сопротивление, затрачиваемое на деформацию и скалывание (сдвиг) почвы в плоскости  $F$ , которая, в зависимости от условий работы, должна приниматься как  $F_1$  (12) или  $F_2$  (13), или  $F_3$  (14);

- третий - суммарное сопротивление, затрачиваемое на перемещение и отброс почвы.

Задаваясь конструктивными параметрами рабочих органов и технологической схемой 3- или 4-рядной их расстановки на раме почвообрабатывающего или посевного орудия, используя уравнение (21) в дополненном виде, можно определить среднее тяговое сопротивление машины в целом:

$$P_{\text{ПО}} = N_{\text{О}} \cdot q_{\text{Л}} \cdot \left[ t_{\text{Л}} \cdot a + \frac{t_{\text{Л}} \cdot B}{\sin \gamma} \right] + \\ + (N_1 \cdot F_1 + N_2 \cdot F_2 + N_3 \cdot F_3) \cdot \tau_{\text{max}} \cdot [\cos \psi_1 + f \cdot \sin(\alpha + \psi_1) \cdot \cos \alpha] + \\ + N_{\text{О}} \cdot \rho \cdot a \cdot B \cdot \left[ h_{\text{Л}} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha) + \frac{v^2}{g} \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right], \quad (22)$$

где  $N_{\text{О}}$  – общее число рабочих органов на почвообрабатывающем орудии или сеялке, шт.;

$N_1$  – число рабочих органов, взаимодействующих с почвой по принципу блокированного резания, шт.;

$N_2$  – число рабочих органов, взаимодействующих с почвой по принципу полублокированного резания, шт.;

$N_3$  – число рабочих органов, взаимодействующих с почвой по принципу свободного резания, шт.

Аналитические зависимости (21) и (22) устанавливают функциональную взаимосвязь:

$$P = f(B, \gamma, \alpha, h_{\text{Л}}, t_{\text{Л}}, \psi_1, \varphi, q_{\text{Л}}, \tau_{\text{max}}, \rho, a, v) \rightarrow \min, \\ P_{\text{ПО}} = f(P, N_{\text{О}}, N_1, N_2, N_3) \rightarrow \min.$$

Таким образом, полученные теоретические зависимости не противоречат общепринятым законам земледельческой механики, а только уточняют и дополняют её положения для различных конструкций рабочих органов и условий работы почвообрабатывающих и

ПОСЕВНЫХ МАШИН.

Список литературы

1. Афонин Е.Д. Метод определения коэффициента рациональной формулы В.П. Горячкина / Афонин Е.Д. и др. // Механизация и электрификация сельского хозяйства.-1982.- №4.- С.42-44.
2. Горячкин В.П. Собрание сочинений. - М.: Колос, 1968. - Т.2-456 с.
3. Синеоков Г.Н. Теория и расчет почвообрабатывающих машин / Г.Н. Синеоков, Н.М. Панов.- М.: Машиностроение, 1977.-328с.

Получено 20.11.07

УДК 625.7.084

**М.В. Дудкин**

ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОТПЕЧАТКА ГИБКОГО ВАЛЬЦА КАТКА  
И ЗОНЫ ДЕФОРМАЦИИ В УПЛОТНЯЕМОМ МАТЕРИАЛЕ**

Уплотнение является завершающей операцией строительства дорожного покрытия, и качество его проведения определяет безубыточность строительства.

Современная уплотняющая техника становится не только дороже из года в год, но и больше по массе и габаритам, что крайне невыгодно строительным организациям, так как происходит увеличение финансовых затрат на транспортирование такой техники, на ее содержание и эксплуатацию.

Актуальным становится вопрос создания такого оборудования, которое позволило бы адаптироваться к уплотняемому материалу в ходе процесса уплотнения и могло менять свои рабочие параметры с целью достижения максимального эффекта уплотнения, сохранив при этом качество уплотняемого покрытия.

На кафедре дорожных машин МАДИ (ГТУ) и кафедре технологических машин ВКГТУ им. Д. Серикбаева проведены совместные исследования процесса уплотнения дорожно-строительных материалов дорожным катком с гибким вальцом, применение которого дает возможность плавного, от прохода к проходу, регулирования величины контактного давления в зоне взаимодействия с уплотняемым материалом.

Укатка дорожного полотна осуществляется регулируемым статическим воздействием на материал через ведущий гибкий валец катка. В результате перекатывания вальца по уплотняемому материалу давление рабочего органа на поверхность под действием силы тяжести машины передается на материал через пятно контакта, соответствующее геометрическому отпечатку вальца в материале.

Причем, чем больше радиус вальца в зоне контакта с уплотняемым материалом, тем больше пятно и площадь контакта. Давление вызывает напряжение в материале, которое приводит к его деформации. При этом окончательная, необратимая деформация и порождает собой необходимый эффект уплотнения. Дальнейшее увеличение плотности материала может быть достигнуто лишь увеличением нагрузки на валец или уменьшением его радиуса, а следовательно, и пятна контакта. Уменьшаем радиус вальца в зоне контакта с уплотняемым материалом, значит уменьшаем пятно контакта и увеличиваем статическую

нагрузку на материал, не меняя массу катка. Выбор оптимальной массы катка, позволяющей при минимальном радиусе вальца достигать статического давления равного пределу прочности уплотняемого материала, может привести к сокращению типоразмеров катков в бригадном комплекте.

Время, необходимое для уплотнения асфальтобетонных смесей, занимает продолжительный промежуток, в течение которого смесь остывает и теряет свою способность к деформации. Но парадокс в том, что пока смесь горячая нельзя применять тяжелый каток, так как смесь излишней массой катка, создающей излишнее давление, превышающее предел прочности горячего асфальтобетона, выдавливается из-под вальцов, и происходит переуплотнение и разрыхление смеси. А небольшие размеры диаметров вальцов средних катков вызывают при уплотнении волнообразование перед ними, что приводит к нарушению ровности уплотняемого материала.

Именно с этими недостатками различных типоразмеров катков позволяет справиться каток с гибким вальцом, который позволяет увеличить радиус вальца в зоне контакта не увеличивая массы катка и, тем самым, предотвратить волнообразование, и, наоборот, увеличить контактное давление на материал, когда он начинает остывать, уменьшив радиус вальца и пятно контакта при сохранении действующей статической нагрузки на валец.

Для проектировочных расчетов гибких вальцов катка и разработки методики выбора оптимального радиуса гибкого вальца, необходимо знать глубину его внедрения в уплотняемый материал и длину горизонтальной проекции пятна контакта.

Дело в том, что гибкий валец, в отличие от жесткого, не оставляет в уплотняемом материале неизменный четкий геометрический след, а наоборот, под действием упругой деформации еще больше увеличивает радиус вальца в зоне контакта и уменьшает глубину проникновения в уплотняемый материал.

Это новое свойство гибкого вальца пока не рассматривалось ни одной методикой уплотнения материала, однако в результате анализа многочисленных экспериментов мы пришли к выводу, что геометрическое пятно контакта не представляет собой идеальный цилиндрический отпечаток, а его след смещен вверх на некоторую величину  $\Delta$ . Менее жесткая обечайка гибкого вальца за счет местной упругой деформации дополнительно слегка сжимается, распрямляясь в зоне пятна контакта, и, тем самым, уменьшает дугу и угол захвата уплотняемого материала вальцом катка. Мы же, принудительно изменив радиус гибкого вальца в зоне его контакта с уплотняемым материалом, принимаем его величину, рассчитанную по законам геометрии, без учета упругой деформации.

При качении обечайки гибкого вальца по уплотняемому материалу на поверхности их соприкосновения возникают большие контактные напряжения, что приводит к значительной упругой деформации (одностороннему сплющиванию) гибких вальцов, чего не происходило раньше, при укатке жесткими вальцами. В результате длина геометрического очага деформации увеличивается, причем приращение длины дуги захвата уплотняемого материала за счет упругого сплющивания вальцов составляет 30-100 %. Таким образом, формулы для расчета длины геометрического пятна деформации, выведенные для идеального недеформированного вальца, в этих случаях становятся непригодными. Но самое главное, непригодными становятся расчетные схемы для определения величины волнообразования. С учетом упругого деформирования вальца в них изменяется и глубина отпечатка вальца в материале, и дуга захвата материала, и угол наезда вальца на ма-

териал, и, наконец, величина пятна контакта вальца с уплотняемым материалом.

С позиций механики деформирования глубина уплотнения определяется границей пятна контакта.

Определим проекцию длины геометрического пятна контакта.

Обозначим величины местной упругой деформации вальца через  $\Delta_1$  и укатываемого материала через  $\Delta_2$  (рис. 1). Для того чтобы уплотняемый материал получил остаточную деформацию  $\Delta h$ , гибкий валец должен вначале сдавить его, внедрившись в материал на величину  $\Delta_1 + \Delta_2$ , и тогда линии контакта выразятся кривой  $A_2B_2C$ . Модуль упругости представляет собой меру жесткости материала. Материалы с высокой энергией межатомных связей характеризуются и большим модулем упругости.

Горизонтальная проекция этой линии может быть найдена из треугольников  $A_2DO$  и  $B_1CO$  (для традиционных жестких вальцов без учета волны материала перед вальцом).

Получим формулу для определения длины проекции дуги захвата с учётом упругого сжатия гибкого вальца:

$$l_{oc} = x_2 + \sqrt{R \cdot \Delta h + x_2^2}, \quad (1)$$

где  $x_2$  - участок геометрического очага деформации.

Достаточно точно участок геометрического пятна деформации с учётом упругой деформации вальцов определяется формулой

$$x_2 = 8 \cdot p_{cp} \cdot R \cdot \left( \frac{1 - \mu_g^2}{\pi \cdot E_g} + \frac{1 - \mu_m^2}{\pi \cdot E_m} \right), \quad (2)$$

где  $\mu_g, \mu_m$  - коэффициенты Пуассона материала вальцов и уплотняемого материала;

$E_g, E_m$  - модули упругости первого рода гибкого вальца и уплотняемого материала.

Модуль упругости  $E$  связан с другими упругими характеристиками материала посредством коэффициента Пуассона. Одноосное растяжение (сжатие)  $sz$  вызовет деформацию по этой оси -  $\epsilon_z$  и сжатие по боковым направлениям -  $\epsilon_x$  и -  $\epsilon_y$ , которые у изотропного материала равны между собой.

$P_{cp}$  - величина статического давления вальца, зависящая от массы катка и радиуса вальца. При увеличении радиуса в зоне контакта и соответственном увеличении площади пятна контакта у вальца просто не хватает жесткости, чтобы не сплюснуться под действием  $P_{cp}$  и упруго-пластической деформации.

Если пренебречь остаточной деформацией (восстановлением) укатываемой полосы, когда её толщина уменьшится за счет упругой деформации вальца по сравнению с его радиусом, и принять модуль упругости первого рода материала равным бесконечности, то получим формулу Дж.Г. Хичкока для расчёта длины геометрического пятна контакта с учётом упругого сплющивания гибкого вальца:

$$l_{oc} = 8 \cdot p_{cp} \cdot R \cdot \frac{1 - \mu_g^2}{\pi \cdot E_g} + \sqrt{R \cdot \Delta h + \left( 8 \cdot p_{cp} \cdot R \cdot \frac{1 - \mu_g^2}{\pi \cdot E_g} \right)^2}. \quad (3)$$

В принципе, по рисунку это видно, длина отпечатка вальца остается та же, но угол наезда вальца на материал и глубина проникновения вальца в материал (а они имеют определяющее значение при определении волнообразования перед вальцом) у гибкого вальца меньше, чем у традиционного жесткого. А раз глубина меньше, значит меньше будет и поперечный сдвиг материала, переходящий в его волну перед вальцом.

Длина геометрического очага деформации традиционного жесткого вальца определяется по формуле

$$l_{\theta} = \sqrt{R \cdot \Delta h - \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2} \approx \sqrt{R \cdot \Delta h}, \quad (4)$$

где  $R$  - радиус вальца.

При простейшем визуальном анализе формул видно, что они сильно отличаются по содержанию, хотя в числовом отношении это различие не столь велико. Чем больше глубина проникновения вальца в материал, тем больше его поперечный сдвиг. Глубина проникновения вальца в материал позволяет точнее определить волновое сопротивление качению вальца.

В данном решении осталось за чертой определение изменения угла наезда вальца на материал и изменение радиуса гибкого вальца в зоне его контакта с уплотняемым материалом, что для определения степени влияния упругой деформации вальца на интенсивность волнообразования и площадь пятна контакта должно быть обязательным.

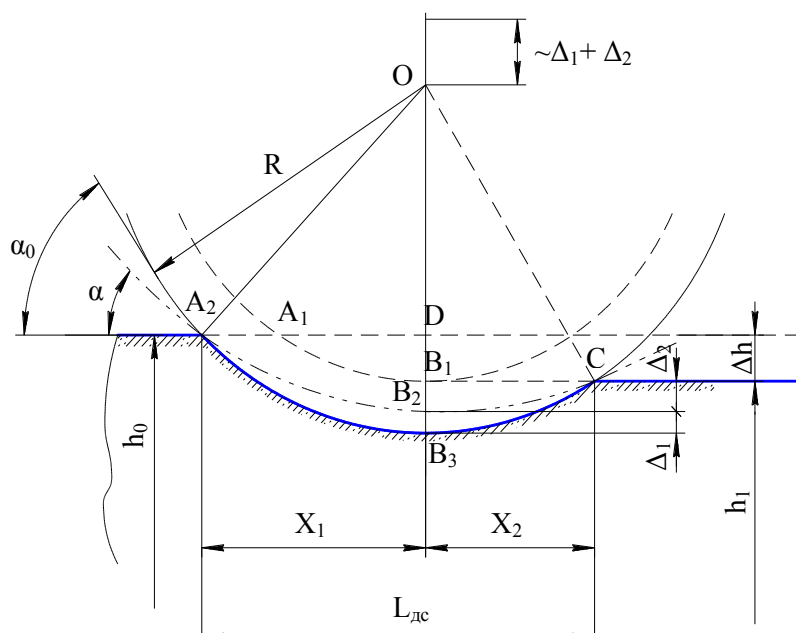


Рисунок 1 – Определение проекции длины геометрического пятна контакта гибкого вальца катка в уплотняемом материале

Уплотненный слой - это слой, параметры состояния которого отличаются от параметров основного распределенного материала. Однако граница раздела уплотненного и основного материала сильно размыта из-за того, что контролируемый параметр изменяется вблизи этой границы с весьма малым градиентом. Поэтому толщина уплотненного слоя определяется всегда с погрешностью, величина которой зависит от метода измерения и присущих ему погрешностей.

Понятие толщины уплотненного слоя является достаточно условным, а числовые значения, приведенные в различных источниках, могут отличаться на десятки процентов.





Рисунок 3 – Упрощенная схема поля напряжения при укатке материала гибким вальцом дорожного катка

При наиболее часто применяемых режимах уплотнения  $l \gg h_b$ .

Тогда

$$h \approx 0,7L. \quad (6)$$

Параметр  $h_b$  позволяет более точно определить длину дуги контакта вальца с уплотняемым материалом, поэтому его нельзя исключать из расчетов до определения величины горизонтальной проекции дуги контакта «а».

При взаимодействии рабочих органов катков с уплотняемым материалом создаются не только нормальные к его поверхности, но и касательные к ней (раскатывающие) усилия. При раскатывании происходит сдвиг верхних слоев материала относительно нижних. Возникающее при сдвиге волнообразование снижает эффективность и качество процесса уплотнения материала.

Горизонтальные перемещения частиц материала достигают иногда 0,05 м.

Координаты точки В, с которой начинается дуга контакта вальца с уплотняемым материалом (рис. 3), несколько отличаются от координат аналогичной точки А, рассмотренной в трудах Захаренко А.В. [3; 11] (рис. 2 и 4). Непонятно, почему точка А расположена ниже горизонта неуплотненного материала. При любом раскладе валец катка контактирует с неуплотненной поверхностью материала, накатываясь и вдавливаясь в неё, поэтому точка А должна быть не ниже горизонта неуплотненного материала, а при образовании волны материала перед вальцом катка даже выше горизонта. Это утверждение было проверено экспериментально, и в теоретических расчетах положение точки В принимается не ниже уровня горизонта неуплотненного материала. Да и сама волна материала перед вальцом не является просто перекатывающимся бугорчком материала, а имеет определенные границы начала сдвиговых деформаций в материале перед вальцом, которые увеличиваются с увеличением высоты волны материала. Кстати, и с увеличением высоты положения точки В. Расстояние от вальца до начала сдвиговых деформаций на поверхности материала связаны с очагом деформации всего материала по глубине и по длине. Очаг деформации материала, или зона его уплотнения будет начинаться в точке А' и закончится в точке С, где материал немного восстановится после прохода вальца катка за счет собственной остаточной деформации.



ния катками грунтов и асфальтобетонных смесей: Дисс.... д-ра. техн. наук. – Омск, 2005. – 325 с.

Получено 25.07.07

## **СДЕЛАЙТЕ НАМ КРАСИВО**

Осваивая выпуск новых моделей, специалисты АвтоВАЗа не забывают о совершенствовании автомашин, уже сходящих с конвейера. Так, изменился дизайн известной модели «Лада-110». На машине появилась новая, более удобная приборная панель, известная под индексом 2112. Прежде такую ставили только на автомобили малых серий, изготавливаемые на опытном производстве. Другим стало также рулевое колесо с подрулевыми переключателями. Автостроители не обошли вниманием и внешний вид автомобиля, разработав задние фонари оригинальной формы.

«Наука и жизнь» № 11, 2006

ПО СТРАНИЦАМ

