



УДК 62-762.444:539.3:539.32

Б.М. Абдеев, Т.Ф. Бrim  
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

ФАКТОР ФОРМЫ И МОДУЛЬ УПРУГОСТИ К РАСЧЕТУ ЭЛАСТОМЕРНЫХ  
УПЛОТНИТЕЛЬНЫХ КОЛЕЦ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Как показывают исследования [1,3-6], механические свойства резинотехнического изделия (РТИ) могут существенно отличаться от физико-механических характеристик эластомера, из которого изготовлено РТИ. Одной из причин подобного различия является так называемый фактор формы  $\Phi$ .

Особенно сильно проявляется влияние параметра  $\Phi$  при деформации сжатия, которая является основной для уплотнительных колец и герметизирующих прокладок, как в монтажном, так и в эксплуатационном режимах их работы. Размеры РТИ, подвергающихся сжатию, в каждый момент времени определяются не только сжимающей нагрузкой, но также и трением между контактирующими поверхностями уплотнителя и контргайки [1]. Поэтому сечение уплотнительного кольца может значительно раздаваться (деформироваться) в стороны.

Деформация герметизирующего резинотехнического изделия при наличии указанного краевого эффекта, связанного с трением на контактных поверхностях, характеризуется некоторым условным модулем  $E_y$ , присущим не материалу, а рассматриваемой детали.

Экспериментально апробированная и достаточно универсальная формула для  $E_y$  была предложена рядом ученых бывшего СССР [3-6]:

$$E_y = \kappa_\phi \cdot E = E \cdot (1 + \zeta \Phi^\delta), \quad (1)$$

где  $E$  - модуль упругости резины при чистом сжатии, которое имеет место только в случае смазанных и гладких контактирующих поверхностей;

$\kappa_\phi$  - коэффициент формы (параметр ужесточения [1,2])

$$\kappa_\phi = 1 + \zeta \Phi^\delta; \quad (2)$$

$\zeta$  - постоянная, зависящая от условий на поверхностях контакта эластомера с контргайкой и учитывающая краевой эффект, возникающий в уплотнительном кольце вследствие сил трения ( $0 \leq \zeta < 1$ );

$\delta$  - константа, на показатель которой влияют механические свойства резины и параметр  $\Phi \geq 0$ .

Например, если  $\Phi \leq 0,25$ , то при закрепленных контактных поверхностях (в резино-металлических элементах) коэффициент  $\delta$  близок к единице, а зависимость между  $E_y$  и  $E$  при различных  $\Phi$  носит линейный характер. С увеличением  $\Phi$  растет и константа  $\delta$ , достигая значения  $\delta = 1,6 \div 2,1$  и более для факторов формы  $\Phi \geq 1,25 \div 1,5$  [1].

Очевидно, что если опорные поверхности уплотнителя и контргнита идеально гладкие и хорошо смазанные, то трение будет практически отсутствовать. В этом случае  $\zeta \approx 0$  и условный модуль  $E_y$  при любых  $\Phi$  будет совпадать с  $E$ , то есть величина  $\zeta$  может меняться от  $\zeta \approx 0$  до  $\zeta \approx 1$  для резино-металлических сопряженных деталей, у которых прочная связь между эластомером и металлом исключает скольжение.

Таким образом, наличие модуля упругости  $E$  как упругой характеристики материала недостаточно для оценки напряженно-деформированного состояния резиновой детали. В этой связи проектно-нормативные источники рекомендуют пользоваться для практических расчетов уплотнительных колец экспериментально проверенной, эмпирической формулой условного модуля  $E_y$  [2,7,8]

$$E_y = \kappa_\phi \cdot E = E \cdot (1 + \Phi^2), \quad (3)$$

в которой (экспериментальные значения):  $\zeta = 1$ ;  $\delta = 2$ ;  $\Phi = 0,5$  и  $\kappa_\phi = 1,25$  - для торообразных уплотнителей;  $\Phi = 0,316$  и  $\kappa_\phi = 1,1$  - для колец прямоугольного сечения. При этом справочник по проектированию уплотнений [2] дает следующее соотношение к определению  $\Phi$  в зависимости от ширины контактной поверхности  $l$  и вертикального размера  $h$  посадочного места (сумма высот канавки и зазора между деталями) (рис.1):

$$\Phi = \frac{l}{2h}. \quad (4)$$

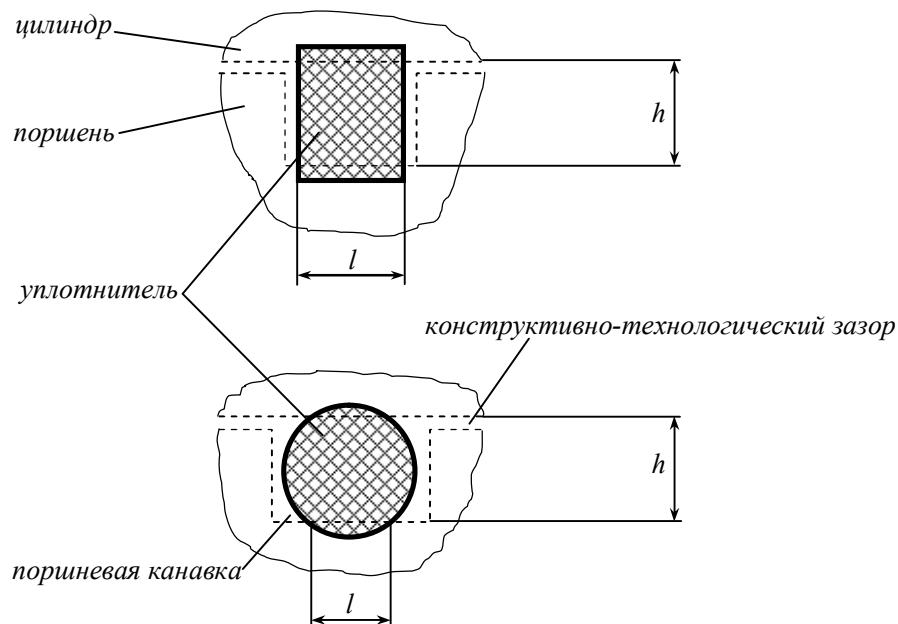


Рис. 1

По данным [1] в диапазоне

$$0 \leq \Phi \leq 0,75, \quad (5)$$

который охватывает уплотнительные кольца прямоугольного и круглого сечений [2,7,8],

расчетные и экспериментальные параметры  $E_y$  практически совпадают, и только при  $\Phi = 1,25$  модуль упругости  $E_y$ , найденный опытным путем и по формуле (3), отличается на величину, не превышающую 10 %.

В данной работе, на основе анализа и обобщения известных экспериментально-теоретических результатов, уточнены параметры  $\zeta$  и  $\delta$  общей формулы (1) для интервала  $0,75 \leq \Phi \leq 1,5$ , то есть увеличен в два раза диапазон изменения фактора формы  $\Phi$  при определении модуля  $E_y$  и расчетах РТИ. С этой же точки зрения следует отметить, что в пределах граничных значений

$$0,25 \leq \Phi \leq 1,5 \quad (6)$$

имеются и необходимые для оценки несущей способности РТИ допускаемые нормальные напряжения  $[\sigma]$  в зависимости от твердости  $H$  эластомера [1].

Кроме того, в представленной статье, базируясь на свойствах подобия и взаимной трансформации уравнений эллипса и окружности [10], выведена формула, позволяющая без проведения специального эксперимента (достаточно длительная и дорогостоящая процедура) определять аналитически фактор  $\Phi_\vartheta$  применительно к эллиптическим (овальным) профилям сечения уплотнительного кольца. Такие герметизирующие РТИ, предназначенные для УПС при внутреннем диаметре  $D = 50 \dots 500 \text{ мм}$ , в отличие от колец круглого сечения, не скручиваются и поэтому более надежны в эксплуатации [2,9]. Их типовые размеры и буквенные обозначения приведены в табличной форме на рис. 2 [9].

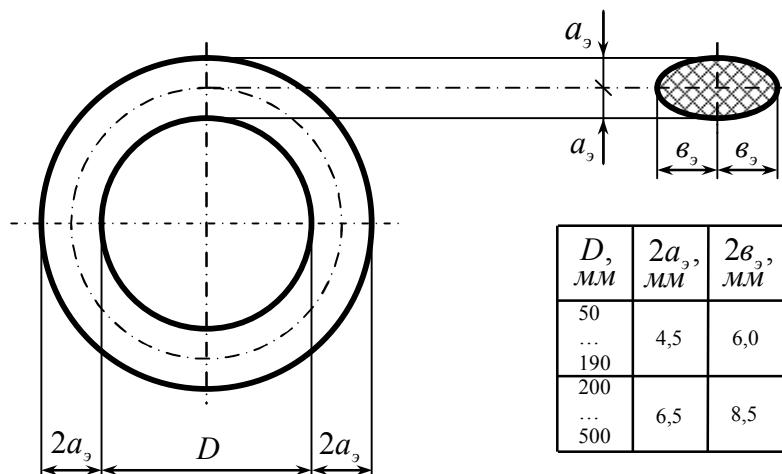


Рис. 2

Рассмотрим в системе  $xOy$  канонические (простейшие) уравнения эллипса с полуосами  $a_\vartheta < b_\vartheta$  и вписанной окружности, имеющей радиус  $\rho = a_\vartheta$  [10] (рис.3):

- эллипс

$$\frac{x^2}{a_\vartheta^2} + \frac{y^2}{b_\vartheta^2} = 1; \quad (7)$$

- окружность

$$x^2 + y^2 = a_s^2. \quad (8)$$

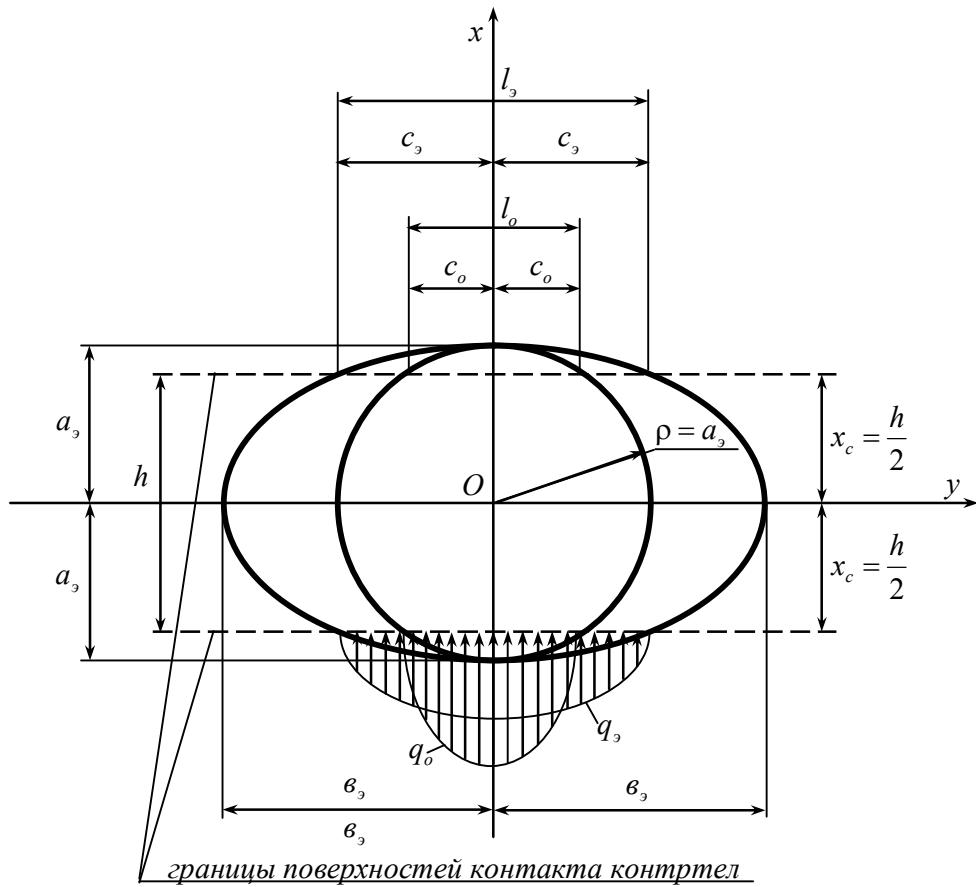


Рис. 3

Обозначим буквенными символами  $c_s$  и  $c_o$  параметры, характеризующие размеры поверхностей контакта с контрателом, соответственно, колец эллиптического и круглого сечений, по которым действуют распределенные реактивные усилия  $q_s$  и  $q_o$  (рис.3).

Полагая, что высота  $h$  посадочного места уплотнительного элемента для обоих профилей одна и та же, находим из уравнений (7), (8) координаты  $x_c$  расположения контактных сечений при  $y = \pm c_s$  и  $y = \pm c_o$ :

$$x_c = \frac{h}{2} = a_s \sqrt{1 - \frac{c_s^2}{b_s^2}}; \quad 9)$$

$$x_c = \frac{h}{2} = a_s \sqrt{1 - \frac{c_o^2}{a_s^2}}. \quad (10)$$

Приравнивая правые части выражений (9), (10), получаем соотношения между разме-

рами  $c_s$  и  $c_o$ :

$$c_s = c_o \frac{b_s}{a_s}. \quad (11)$$

В соответствии с поставленной задачей, расчетной схемой рис. 3 и общей формулой (4) аппроксимируем факторы формы  $\Phi_s$  и  $\Phi_o$  для эллиптического и круглого сечений уплотнительного кольца, учитывая, что  $\Phi_o = 0,5$  [2,8]:

$$\Phi_s = \frac{l_s}{2h} = \frac{c_s}{h}; \quad (12)$$

$$\Phi_o = \frac{l_o}{2h} = \frac{c_o}{h} = 0,5. \quad (13)$$

Выражаем  $h$  из соотношения (13) и подставляем результат в (12):

$$h = \frac{c_o}{\Phi_o} = 2c_o, \quad (14)$$

$$\Phi_s = 0,5 \frac{c_s}{c_o}. \quad (15)$$

Исключая параметр  $c_s$  из зависимости (15) с помощью (11), будем иметь, после сокращения на  $c_o$ , искомую формулу для определения  $\Phi_s$ :

$$\Phi_s = \Phi_o \frac{b_s}{a_s} = 0,5 \frac{b_s}{a_s}. \quad (16)$$

Далее, согласно общей постановке задачи и вышеуказанного предела (5) применения упрощенной формулы (3), находим коэффициенты  $\zeta$  и  $\delta$  зависимости (1), аппроксимирующей модуль упругости  $E_y = E_y(\Phi_s)$ , из следующих граничных условий, соответствующих увеличенному диапазону (6) изменения фактора формы  $\Phi = \Phi_s$ :

- при  $\Phi_s = 0,75$

$$E_y(0,75) = E [1 + \zeta(0,75)^\delta] = E [1 + (0,75)^2], \quad (17)$$

- при  $\Phi_s = 1,25$

$$E_y(1,25) = E [1 + \zeta(1,25)^\delta] = 1,1E [1 + (1,25)^2] \quad (18)$$

или

$$\begin{cases} \zeta(0,75)^\delta = 0,5625, \\ \zeta(1,25)^\delta = 1,81875; \end{cases} \quad (19)$$

откуда (из системы (19))

$$\zeta = \frac{0,5625}{(0,75)^\delta}, \quad (20)$$

$$\frac{0,5625}{(0,75)^\delta} (1,25)^\delta = 0,5625 \left( \frac{1,25}{0,75} \right)^\delta = 1,81875,$$

$$\left(\frac{1,25}{0,75}\right)^{\delta} = \frac{1,81875}{0,5625}, \delta \ln\left(\frac{1,25}{0,75}\right) = \ln\left(\frac{1,81875}{0,5625}\right);$$

то есть

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{1,81875}{0,5625}\right)}{\ln\left(\frac{1,25}{0,75}\right)} = \frac{1,17351}{0,51082} = 2,297, \quad (21)$$

а из (20)

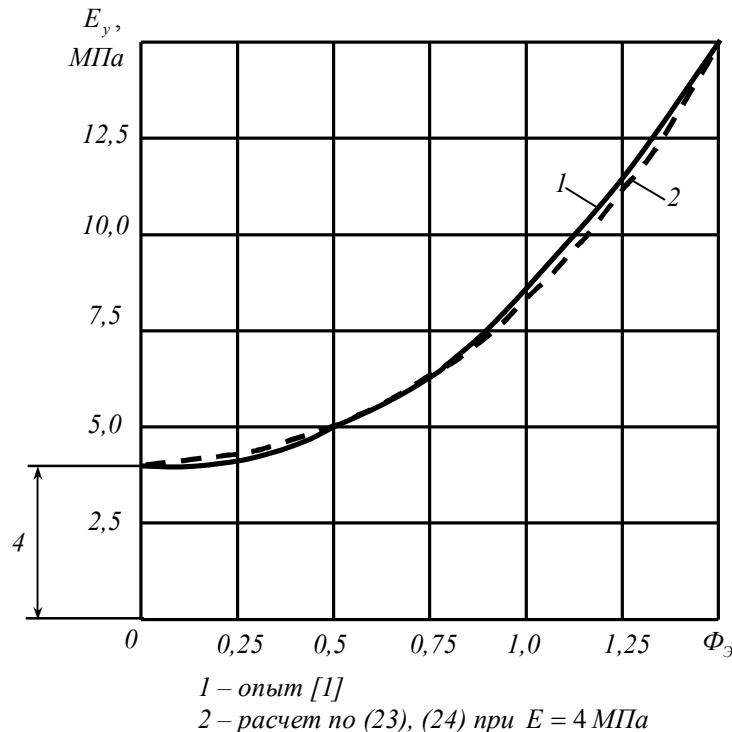
$$\zeta = \frac{0,5625}{(0,75)^{2,297}} = \frac{0,5625}{0,51644} = 1,089. \quad (22)$$

Принимая во внимание (1), (3), (21) и (22), представляем две расчетные формулы для модуля  $E_y$ :

$$E_y = E(1 + \Phi_3^2), \quad 0 \leq \Phi_3 \leq 0,75; \quad (23)$$

$$E_y = E(1 + 1,089\Phi_3^{2,297}), \quad 0,75 \leq \Phi_3 \leq 1,5. \quad (24)$$

В качестве иллюстрирующего примера на рис. 4 даны графики зависимостей  $E_y$  от  $\Phi_3$  для конструкционной резины марки 2959, имеющей модуль упругости  $E = 4 \text{ МПа}$  (основа - натуральный каучук (НК) [1]), построенные по экспериментальным данным [1] (кривая 1) и с использованием формул (23), (24) (кривая 2).



## Рис. 4

Отличие между опытной и расчетной кривыми, как следует из графика рис. 4, не выходит за пределы  $3,3 \div 4,7 \%$ , что говорит о достаточной точности формул (23), (24) и возможности их практического применения к определению модуля упругости  $E_y$  для уплотнительных колец эллиптического сечения при изменении фактора формы  $\Phi_3$  в пределах  $0,5 \leq \Phi_3 \leq 1,5$ . Этот интервал охватывает не только стандартные круглые ( $\Phi_3 = \Phi_0 = 0,5$  [2]) и овальные профили с факторами  $\Phi_3$ , соответственно равными (см. таблицу рис. 2 и формулу (16))  $\Phi_3 = 0,66$  и  $\Phi_3 = 0,65$ , но и вытянутые (сплюснутые) эллиптические сечения, имеющие

$$0,66 < \Phi_3 \leq 1,5. \quad (25)$$

Наибольшее значение  $\Phi_3 = 1,5$  соответствует предельному отношению полуосей  $b_3$  и  $a_3$  эллипса (рис. 2 и 3)

$$\left[ \frac{b_3}{a_3} \right]_{\max} = 3, \quad (26)$$

до которого корректность эмпирических зависимостей (23), (24) не вызывает сомнения. В то же время при  $\frac{b_3}{a_3} > 3$  будет проявляться в большей степени недостаток уплотнительных колец, имеющих овальное очертание периметра сечения, связанный с повышением силы трения и увеличением ширины УПС [2].

Установленное численное значение (26) зависимости между  $b_3$  и  $a_3$  позволяет значительно расширить номенклатуру эластомерных уплотнителей эллиптического сечения, по сравнению с выпускаемыми промышленностью резиновыми кольцами аналогичного профиля [2,9]. И в этом случае может возникнуть необходимость по реализации процесса математического моделирования напряженно-деформированного состояния герметизирующего элемента, а также в осуществлении процедуры регулирования контактных давлений и натягов при проектировании уплотнительного устройства путем подбора (оптимизации [11,12]) размеров  $b_3$  и  $a_3$ .

Аналогичная графикам рис. 4 корреляция между экспериментальными и расчетными величинами  $E_y$  с разницей не более 5% получается для других марок резины при  $0 \leq \Phi \leq 1,5$  [1].

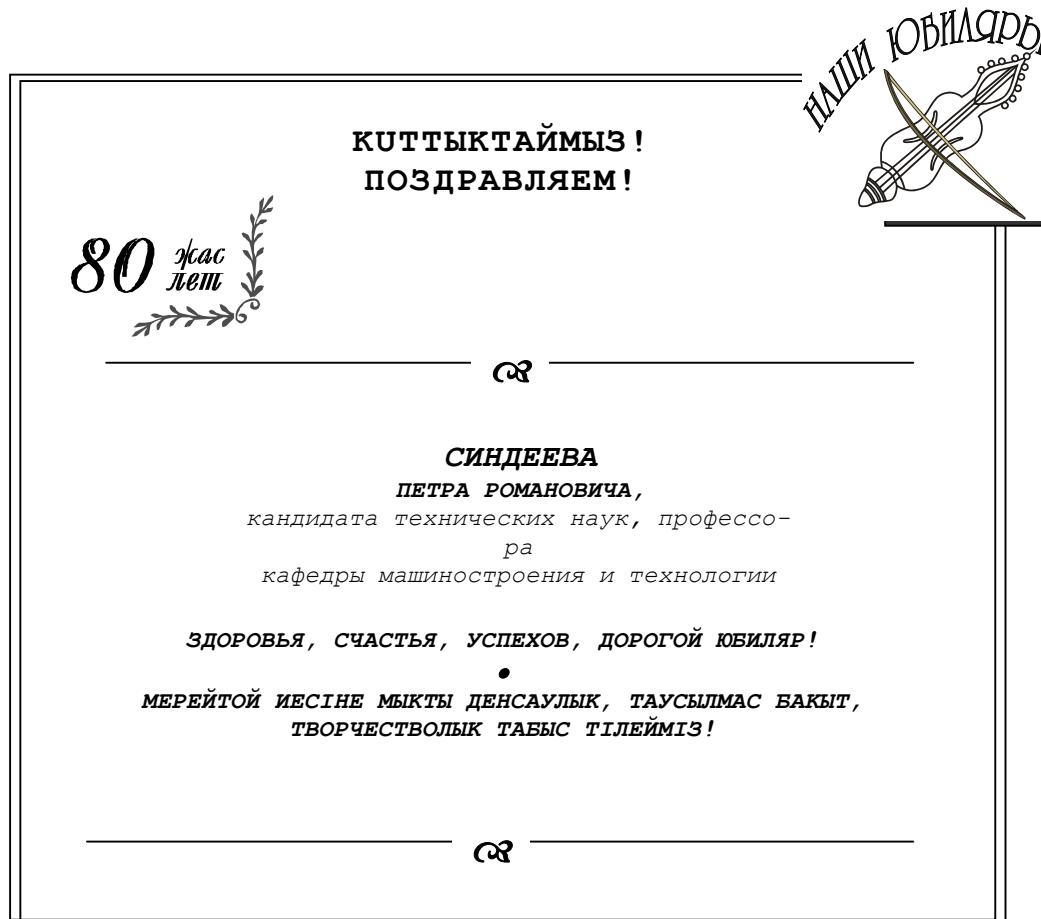
Результаты и выводы данной статьи могут быть непосредственно использованы для количественной оценки прочности и жесткости эластомерных уплотнительных колец овального (эллиптического) поперечного сечения.

## Список литературы

1. Потураев В.Н. Резиновые и резино-металлические детали машин. - М.: Машиностроение, 1966. - 300 с.
2. Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник / Под ред. А.И. Голубева, Л.А. Кондакова. - М.: Машиностроение, 1986. - 464 с.

3. Бартенев Г.М., Зайцева В.Д. О влиянии коэффициента формы на деформацию и морозостойкость резины //Каучук и резина. - 1962. - №7. - с. 16.
4. Бартенев Г.М., Лепетов В.А., Новиков В.И. Статическое сжатие резиновых плоских кольцевых прокладок //ДАН СССР. Т. 93. - 1953. - №1. - с. 15.
5. Бартенев Г.М., Новиков В.И. О модулях резины при статическом сжатии // ДАН СССР. Т. 91. - 1953. - №5. - с.1027.
6. Харитонов А.Т. Механические свойства резино-металлических элементов в поглощающих аппаратах автосцепки // Каучук и резина. - 1959. - №2. - с. 50.
7. Кондаков Л.А. Уплотнения гидравлических систем. - М.: Машиностроение, 1972. - 240 с.
8. Аврущенко Б.Х. Резиновые уплотнители. - Л.: Химия, 1978. - 136 с.
9. Справочник по уплотнительным устройствам судовых систем/ Г.К. Алмазов, В.В. Степанов, А.О. Поляков, В.А. Бурлешин. - Л.: Судостроение, 1979. - 259 с.
10. Бронштейн И.Н., Семендаев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: Гос. Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. - 608 с.
11. Фролов К.В. Методы совершенствования машин и современные проблемы машиноведения. - М.: Машиностроение, 1984. - 224 с.
12. Рейклейтис Г., Рейвиндрен А.А., Рекслел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн 1 / Пер. с англ. В.Я. Алтаева и В.И. Моторина. - М.: Мир, 1986.- 315 с.

Получено 2.08.06.



УДК532.542

Ш.С.Аманжолова  
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРЕ,  
ИМЕЮЩЕМ ФОРМУ ПАРАЛЛЕЛИПИПЕДА

Задача о вынужденных колебаниях жидкости в резервуарах является одной из задач классической гидродинамики, где для описания движений жидкости используются или переменные Лагранжа, или переменные Эйлера. В теории динамики тела с полостями, содержащими жидкость, как правило, пользуются переменными Эйлера, которые характеризуют состояние частиц жидкости, находящихся в разные моменты времени  $t$  в заданной точке пространства с координатами  $x, y, z$ . В линейной постановке задач движение жидкости относительно резервуара считается малым в том смысле, что произведениями перемещений частиц жидкости и их скоростей относительно стенок резервуара можно пренебречь.

В данной работе рассматривается задача о вынужденных колебаниях однородной идеальной нескимаемой тяжелой жидкости в резервуаре в форме прямоугольного параллелепипеда, движущегося по горизонтальной плоскости произвольным образом, в которой поставлены граничные условия для поведения жидкости и определен потенциал Жуковского. Стенки резервуара предполагаются абсолютно твердыми. Резервуар заполнен жидкостью частично.

Для решения задачи используется метод построения решения, предложенного Н.Н.Моисеевым и А.А.Петровым, согласно которому для определения потенциала абсолютных скоростей жидкости решается уравнение Лапласа с соответствующими граничными и начальными условиями [2]. Потенциал абсолютных скоростей жидкости  $\Phi$  представляется в виде суммы двух потенциалов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (1)$$

где  $\Phi_1$  - потенциал Жуковского, описывающего движение жидкости, полностью заполняющей полость, ограниченную стенками резервуара и твердой крышкой, совпадающей с невозмущенной свободной поверхностью жидкости и жестко связанной со стенками сосуда. Он зависит только от формы резервуара и никакие изменения вида движения резервуара не могут его изменить. Потенциал  $\Phi_2$  определяет малые вынужденные колебания жидкости в неподвижном сосуде, вызванные неравномерностью давлений при движении с потенциалом  $\Phi_1$ .

Выберем неподвижную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  таким образом, чтобы в начальный момент движения плоскость  $O_1x_1y_1$  совпадала с невозмущенной свободной поверхностью жидкости, а оси  $x_1, y_1, z_1$  были соответственно параллельны ребрам  $2l, b$  и  $a$  (рис. 1).

Обозначим через  $\rho$  плотность жидкости,  $\tau$  - объем области, занятой жидкостью в

данный момент времени,  $\Sigma$  - часть поверхности сосуда, смачиваемую жидкостью,  $S$  - свободную поверхность жидкости в невозмущенном состоянии.

Возьмем некоторую точку  $O$  полости. При движении резервуара по горизонтальной плоскости точка  $O$  будет описывать некоторую плоскую кривую. Будем предполагать, что тело движется таким образом, что за все время движения касательная к точки  $O$  параллельна ребру  $2l$  параллелепипеда. Другими словами, будем предполагать, что твердое тело неизменно связано с естественным трехгранником траектории точки  $O$  (рис.1).

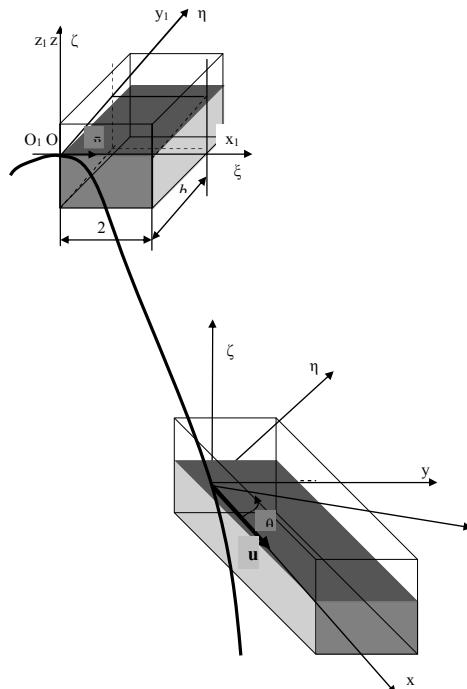


Рис. 1. Схематическое изображение движения резервуара в форме прямоугольного параллелепипеда, частично заполненного жидкостью, по горизонтальной плоскости

Введем две системы координат:  $O\xi\eta\zeta$  с вертикальной осью  $\zeta$ , которая движется поступательно, и  $Oxyz$ , оси которой  $x, y, z$  параллельны ребрам параллелепипеда соответственно  $2l, b, a$ . Будем предполагать, что в начальный момент времени системы координат  $Oxyz$  и  $Ox_1y_1z_1$  совпадают.

Обозначим через  $u$  и  $\omega$  векторы скорости точки  $O$  и угловой скорости резервуара. В силу принятых предположений о характере движения будем иметь

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{u}{k}, \quad (2)$$

где  $\theta$  - угол поворота сосуда относительно оси  $O\zeta$ ;  $k$  - радиус кривизны траектории точки  $O$ .

На рис. 1 дано схематическое изображение двух произвольных положений прямоугольного параллелепипеда с частичным заполнением жидкостью, движущегося по горизонтальной плоскости. Пусть траекторией некоторой точки  $O$  твердой части параллелепипеда является плоская кривая линия с переменным радиусом кривизны  $k$ .

В рассматриваемой задаче будем считать, что кривизна траектории  $\frac{1}{k}$  в общем случае является некоторой функцией по времени  $t$ . В таком случае предыдущая формула для угловой скорости резервуара справедлива при движении по траектории постоянной кривизны, т.е. при движении по круговому пути или при прямолинейном движении резервуара.

При расчете колебаний жидкости в резервуаре, движущегося в горизонтальной плоскости по пути, кривизна которого не постоянна, необходимо учитывать это обстоятельство, так как угол поворота резервуара  $\theta(t)$  относительно неподвижной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  будет переменной величиной от сложной функции.

В системе координат  $O\xi\eta\zeta$  резервуар с жидкостью вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Обозначим через  $h$  уровень заполнения резервуара жидкостью. В системе координат  $Oxyz$  уравнение невозмущенной свободной поверхности жидкости имеет вид  $z = 0$ . Уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости будем искать в виде  $z = \zeta(x, y, z)$ . Обозначим через  $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$  потенциал скоростей относительного движения жидкости в системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа в области  $\tau$

$$\Delta\Phi_1(x, y, z, t) = 0, \quad (3)$$

$$\Delta\Phi_2(x, y, z, t) = 0. \quad (4)$$

Согласно общепринятым установкам [2-4], граничные условия для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$\frac{d\hat{\Phi}_1}{dn} = v \quad \text{на поверхности } \Sigma; \quad (5)$$

$$\frac{d\hat{\Phi}_2}{dn} = 0 \quad \text{на поверхности } \Sigma; \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{\Phi}_1}{dz} = 0 \quad \text{на поверхности } S; \quad (7)$$

$$\frac{d\hat{\Phi}_2}{dz} = \frac{d\zeta}{dt} \quad \text{на поверхности } S; \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{\Phi}_2}{dt} + g\zeta = -W_x - W_y - \frac{d\hat{\Phi}_1}{dt} \quad \text{на поверхности } S. \quad (9)$$

Определение функции  $\Phi_1$  приводится к решению краевой задачи (3), (5), (7). Для определения потенциала скоростей вынужденных колебаний жидкости решается краевая задача (4), (6), (8) и (9). Решение этих двух краевых задач даст нам описание колебаний тяжелой жидкости в подвижной ёмкости в форме прямоугольного параллелепипеда, движущегося по горизонтальной плоскости.

Как уже было отмечено, при решении задач о вынужденных колебаниях идеальной однородной, несжимаемой, тяжелой жидкости в подвижной ёмкости в первом приближении движение жидкости считается потенциальным, а это условие приводит к задаче определения потенциалов скоростей собственных и вынужденных колебаний жидкости. Определение потенциалов скоростей для полостей заданной формы сводится, как известно, к решению задачи Неймана о разыскании функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа внутри области  $\tau$ , по заданным на границе области нормальным производным от неё. Если область  $\tau$  односвязна, то эта задача имеет, как известно, единственное решение

в виде однозначной гармонической функции; для многосвязной области решение будет многозначной функцией. Эта краевая задача путем введения функции Грина может быть приведена к интегральным уравнениям. Определим потенциал скоростей собственных колебаний жидкости, для чего решим уравнение Лапласа (3) с граничными условиями (5), (7).

Решение уравнения Лапласа (3) проводится в предположении, что амплитуды колебаний жидкости в резервуаре малы по сравнению с глубиной заполнения. Решение краевой задачи (3), (5), (7) будем искать в виде

$$\hat{O}_1 = \Psi \cdot \omega, \quad (10)$$

где функция  $\Psi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Psi = 0 \quad \text{в области } \tau \quad (11)$$

и граничному условию

$$\frac{d\Psi}{dn} = (\bar{r} \bar{x} \bar{n}) \cdot \bar{z}^0 \quad \text{на поверхности } \Sigma + S, \quad (12)$$

где  $\bar{r}^0$  - орт оси  $z$ .

Решение краевой задачи (11) - (12) зависит лишь от формы области  $\tau$  объема, занимаемого жидкостью. Функция  $\Psi$  называется потенциалом Жуковского, который подлежит определению для рассматриваемой задачи, т.е. для резервуара в форме прямоугольного параллелепипеда.

Для определения потенциала Жуковского рассмотрим граничное условие (12) для поверхности  $\Sigma + S$ , состоящей из смачиваемой поверхности полости резервуара и невозмущенной свободной поверхности жидкости.

Условие (12) можно записать в виде

$$\frac{d\Psi}{dn} = x \cos \beta - y \cos \alpha, \quad (13)$$

где через  $\alpha, \beta$  обозначены углы, образуемые вектором внешней нормали  $\bar{n}$  с осями  $Ox, Oy$ .

Запишем граничное условие (13) для каждой грани параллелепипеда

$$\frac{d\Psi}{dx} = \begin{cases} y & \text{при } x = 0, \\ -y & \text{при } x = 2l, \\ -x & \text{при } y = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{d\Psi}{dy} = \begin{cases} x & \text{при } y = b; \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{d\Psi}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = -h. \quad (16)$$

Положим  $\Psi = \Psi_1 - xy$ ; тогда функция  $\Psi_1$  в области  $\tau$ , занимаемой жидкостью, должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \Psi_1 = 0, \quad (17)$$

так как функция  $(x \cdot y)$  ему удовлетворяет.

Из условия (16) следует, что функция  $\Psi_1$  не зависит от  $z$ .

На стенках призмы и её верхнем и нижнем основаниях функция  $\Psi_1$  должна удовлетворять условиям

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = \begin{cases} 2y & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x = 2l; \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{d\Psi_1}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0, \\ 2x & \text{при } y = b. \end{cases} \quad (19)$$

Представим функцию  $\Psi_1$  в виде суммы

$$\Psi_1 = \Psi_1^I + \Psi_1^{II} + \Psi_1^{III} + \Psi_1^{IV}. \quad (20)$$

Границные условия (18) – (19) приводят к следующим граничным условиям для составляющих суммы (20):

$$\frac{d\Psi_1^I}{dx} = \begin{cases} 2y = b & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x = 2l; \end{cases} \quad (21)$$

$$\frac{d\Psi_1^I}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0, \\ 0 & \text{при } y = b; \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{d\Psi_1^{II}}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x = 2l; \end{cases} \quad (23)$$

$$\frac{d\Psi_1^{II}}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0, \\ 2x - 2l & \text{при } y = b; \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{d\Psi_1^{III}}{dx} = \begin{cases} b & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x = 2l; \end{cases} \quad (25)$$

$$\frac{d\Psi_1^{III}}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$\frac{d\Psi_1^{III}}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = b; \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x = 2l; \end{cases} \quad (27)$$

$$\frac{d\Psi_1^{III}}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0, \\ 2l & \text{при } y = b. \end{cases} \quad (28)$$

Функции  $\Psi_1^I$ ,  $\Psi_1^{II}$ ,  $\Psi_1^{III}$ ,  $\Psi_1^{IV}$  должны удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta\Psi_1^I = 0, \Delta\Psi_1^{II} = 0, \Delta\Psi_1^{III} = 0, \Delta\Psi_1^{IV} = 0. \quad (29)$$

Решения уравнений (29) с соответствующими граничными условиями (21) - (28) получаем в виде

$$\Psi_1^I = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{ch \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{b} \langle x - 2\ell \rangle \cos \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{b} y}{\langle 2\kappa+1 \rangle^3 sh \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} 2\ell}; \quad (30)$$

$$\Psi_1^{II} = -\frac{32\ell^2}{\pi^3} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{ch \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} y \cdot \cos \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} x}{\langle 2\kappa+1 \rangle^2 sh \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} b}; \quad (31)$$

$$\Psi_1^{III} = \frac{4u^2}{\pi^2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\langle -1 \rangle^\kappa ch \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{b} y \cdot \cos \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{b} x}{\langle 2\kappa+1 \rangle^3 sh \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} 2\ell}; \quad (32)$$

$$\Psi_1^{IV} = \frac{16\ell^2}{\pi^2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\langle -1 \rangle^\kappa ch \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} y \cdot \cos \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} x}{\langle 2\kappa+1 \rangle^2 sh \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} b}. \quad (33)$$

Вычислив значения  $\Delta\Psi_1^I$ ,  $\Delta\Psi_1^{II}$ ,  $\Delta\Psi_1^{III}$ ,  $\Delta\Psi_1^{IV}$  и сделав соответствующие преобразования, получим исходную функцию  $\Psi$  в виде ряда

$$\Psi_1(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi \langle 2\kappa+1 \rangle^3} + \frac{\langle -1 \rangle^\kappa}{\langle 2\kappa+1 \rangle^2} \right] \times \\ \times \left[ \frac{b^2 ch \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{b} \langle x - 2\ell \rangle \cos \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{b} y}{sh \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{b} 2\ell} - \frac{4\ell^2 ch \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} y \cdot \cos \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} x}{sh \frac{\langle 2\kappa+1 \rangle \pi}{2\ell} b} \right]. \quad (34)$$

Из выражения (34) очевидно, что потенциал Жуковского  $\Psi$  зависит лишь от формы

сосуда, в котором заключена жидкость.

Подставив выражение потенциала Жуковского (34) в уравнение (10), получим выражение для потенциала  $\Phi_1(x, y, z, t)$ :

$$\Phi_1 = -xy\omega + \frac{4\omega}{\pi^2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi \langle 2\kappa + 1 \rangle^3} + \frac{\langle -1 \rangle^\kappa}{\langle 2\kappa + 1 \rangle^2} \right] \times \\ \times \left[ \frac{b^2 \operatorname{ch} \frac{\langle 2\kappa + 1 \rangle \pi}{b} \langle x - 2\ell \rangle \cos \frac{\langle 2\kappa + 1 \rangle \pi}{b} y}{\operatorname{sh} \frac{2\langle 2\kappa + 1 \rangle \pi}{b} \ell} - \frac{4\ell^2 \operatorname{ch} \frac{\langle 2\kappa + 1 \rangle \pi}{2\ell} y \cdot \cos \frac{\langle 2\kappa + 1 \rangle \pi}{2\ell} x}{\operatorname{sh} \frac{2\langle 2\kappa + 1 \rangle \pi}{2\ell} b} \right]. \quad (35)$$

#### Список литературы

1. Аманжолова Ш.С. Движение горизонтального цилиндрического резервуара с жидкостью под действием вертикальных сил: Сборник по вопросам механики и прикладной математики. - Алма-Ата, 1978. - С.46-50.
2. Моисеев Н.Н. Численные методы расчета собственных колебаний ограниченного объема жидкости / Н.Н. Моисеев, А.Л. Петров. - М.: ВЦ АН СССР, 1966. - 269с.
3. Моисеев Н.Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев. - М.: Наука, 1965. - 439 с.
4. Численные методы в механике жидкости. - М.: Мир, 1973. - 304 с.

Получено 24.04.06.

УДК 539.3:624.04

**Н.Т. Жадрасинов**

КарГТУ, г. Караганда

**С.К. Ельмуратов**

ПГУ им. С. Торайгырова, г. Павлодар

#### ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии цилиндрической оболочки. Уравнение равновесия элемента оболочки имеет вид

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{N}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \sqrt{a} \vec{q} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $a$  – фундаментальный определитель метрического тензора;  $\vec{N}^\alpha = \vec{N}^{\alpha\beta} \cdot \vec{e}_\beta$  – вектор внутренних усилий ( $\alpha, \beta = 1, 2$ );  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \vec{n}$  – локальный базис системы координат  $x^1, x^2$ ;  $x^1, x^2$  – гауссовые координаты;  $\vec{q}$  – вектор внешней нагрузки.

Систему криволинейных координат  $x^1, x^2$  определим таким образом, чтобы размеры ячейки сетки  $\Delta x^1, \Delta x^2$  были равны единице.

Преобразуем уравнение равновесия (1) к разностному виду

$$0,5 \left[ \left( N^{1\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i+0,5; j+0,5} + \left( N^{1\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i+0,5; j-0,5} - \left( N^{1\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i-0,5; j+0,5} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( N^{1\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i-0,5;j-0,5} + \left( N^{2\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i+0,5;j+0,5} - \left( N^{2\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i+0,5;j-0,5} + \\
 & + \left( N^{2\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i-0,5;j+0,5} - \left( N^{2\beta} \cdot \vec{e}_\beta \right)_{i-0,5;j-0,5} + \left( Q^1 \cdot \vec{e}_3 \right)_{i+0,5;j} - \left( Q^1 \cdot \vec{e}_3 \right)_{i-0,5;j} + \\
 & + \left( Q^2 \cdot \vec{e}_3 \right)_{i;j+0,5} - \left( Q^2 \cdot \vec{e}_3 \right)_{i;j-0,5} + \left( q^\beta \cdot \vec{e}_\beta + q^3 \cdot \vec{e}_3 \right)_{i;j} \Big] = 0. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Проектируя слагаемые векторного уравнения (2) на векторы взаимного локального базиса  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  в точке  $(i, j)$ , получим систему трех скалярных уравнений равновесия элемента оболочки с центром в узле  $(i, j)$ . Выражения для перерезывающих сил  $Q^\beta$  получаются из условия равенства нулю главного момента внутренних усилий и моментов, действующих на элемент оболочки

$$\frac{\partial \sqrt{a} \bar{M}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \left[ \vec{e}_\alpha \times \vec{N}^\alpha \right] \cdot \sqrt{a} = 0, \tag{3}$$

где  $\bar{M}^\alpha = c_{\beta\gamma} \cdot M^{\alpha\beta} \cdot \vec{e}^\gamma$  – вектор внутренних моментов;  $c_{\beta\gamma}$  – дискриминантный тензор, компоненты которого принимают значения

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = \sqrt{a}, \quad c_{21} = -\sqrt{a}.$$

Заменяя в (3) производные их разностными аналогами и умножая скалярно левую часть уравнения на векторы  $\vec{e}_{2(i+0,5;j)}$  и  $\vec{e}_{1(i;j+0,5)}$ , получим выражения для перерезывающих сил [1].

Компоненты тензоров мембранных усилий и внутренних моментов могут быть выражены через компоненты тензоров мембранных  $\varepsilon_{\beta\alpha}$  и изгибных  $\mu_{\beta\alpha}$  деформаций соотношениями

$$\begin{aligned}
 N^{\beta\alpha} &= \frac{Eh}{1-v^2} \left[ v \cdot a^{\beta\alpha} \cdot a^{\gamma\omega} \varepsilon_{\gamma\omega} + (1-v) \cdot a^{\beta\gamma} \cdot a^{\alpha\omega} \cdot \varepsilon_{\gamma\omega} \right]; \\
 M^{\beta\alpha} &= \frac{Eh}{12(1-v^2)} \left[ v \cdot a^{\beta\alpha} \cdot a^{\gamma\omega} \mu_{\gamma\omega} + (1-v) \cdot a^{\beta\gamma} \cdot a^{\alpha\omega} \cdot \mu_{\gamma\omega} \right].
 \end{aligned}$$

Тангенциальные деформации  $\varepsilon_{\beta\alpha}$  определим через компоненты вектора перемещений  $u_\beta$  в точке  $(i+0,5;j+0,5)$ , находящейся в центре ячейки:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11(i+0,5;j+0,5)} &= 0,5 \left( u_{1_{i+1;j+1}} + u_{1_{i+1;j}} - u_{1_{i;j}} \right); \\
 \varepsilon_{22(i+0,5;j+0,5)} &= 0,5 \left( u_{2_{i+1;j+1}} \cdot a_{2_{i+1;j+1}}^{2(i+1;j+1)} + u_{2_{i;j}} \cdot a_{2_{i+0,5;j+0,5}}^{2(i;j+1)} - u_{2_{i+1;j}} \cdot a_{2_{i+0,5;j+0,5}}^{2(i+1;j)} - \right. \\
 & \quad \left. - u_{2_{i;j}} \cdot a_{2_{i+0,5;j+0,5}}^{2i;j} + u_{3_{i+1;j+1}} \cdot a_{2_{i+0,5;j+0,5}}^{3i+1;j+1} + u_{3_{i;j+1}} \cdot a_{2_{i+0,5;j+0,5}}^{3i;j+1} - \right. \\
 & \quad \left. - u_{3_{i+1;j}} \cdot a_{2_{i+0,5;j+0,5}}^{3i+1;j} - u_{3_{i;j}} \cdot a_{2_{i+0,5;j+0,5}}^{3i;j} \right).
 \end{aligned}$$

Изгибные деформации

$$\begin{aligned}
 \mu_{11(i;j)} &= v_{1i+0,5;j} - v_{1i-0,5;j}; \\
 \mu_{22(i;j)} &= v_{2i;j+0,5} - v_{1i;j-0,5}; \\
 \mu_{12(i+0,5;j+0,5)} &= 0,5 \left( v_{1_{i+0,5;j+1}} a_{2_{i+0,5;j+1}}^{2i+0,5;j+0,5} - v_{1_{i+0,5;j}} a_{2_{i+0,5;j}}^{2i+0,5;j+0,5} + \right. \\
 & \quad \left. + v_{2_{i+1;j+0,5}} - v_{1_{i;j+0,5}} \right).
 \end{aligned}$$

Дискретные выражения для тангенциальных деформаций и углов поворота удовлетворяют условиям жесткого смещения. На основе предлагаемой методики решена задача о

рассеченный цилиндре (рис. 1).

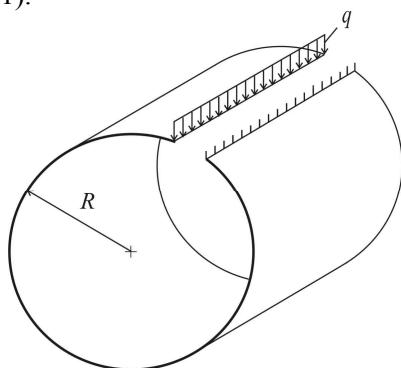


Рис. 1. Расчетная схема разомкнутой цилиндрической оболочки

Цилиндр длиной  $l$ , радиусом  $r$  и толщиной стенки  $h$  имеет одну защемленную и другую свободную кромки вдоль защемления. Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  действует вдоль разомкнутой свободной кромки. На рис. 2 приведен график относительной погрешности максимального прогиба, полученного методом криволинейных сеток (кривая 1).

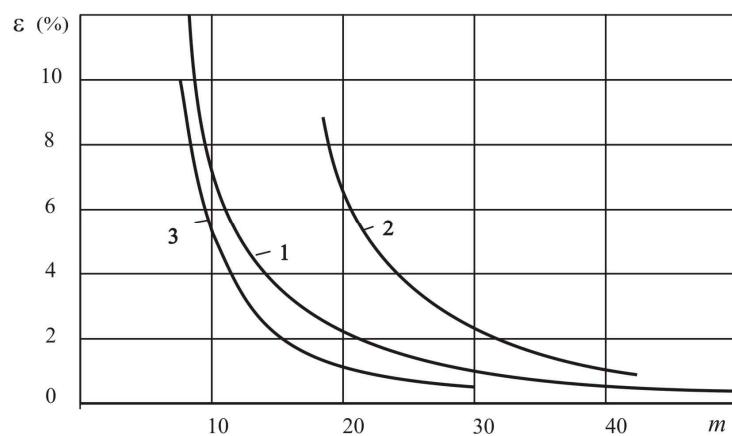


Рис. 2. График сходимости решения для рассеченной цилиндрической оболочки

Для сравнения приведены аналогичные зависимости, полученные в работе [2] в виде кривой 2 и в работе [3] в виде кривой 3. Результаты решения приведенных задач позволяют сделать вывод о том, что приведенная методика может успешно применяться в расчетах тонкостенных оболочек, деформированное состояние которых характеризуется наличием жестких смещений. Метод криволинейных сеток, обладая достаточной простотой, не уступает по сходимости более трудоемкому методу конечных элементов.

#### Список литературы

1. Ельмуратов С.К., Жадрасинов Н.Т. Построение разрешающих уравнений тонкой оболочки в векторной форме // Вестн. ПГУ. Сер. физико-математическая. - Павлодар, ПГУ, 2005. - №2. - С. 18-28.

2. Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М. Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования //Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Будивельник, 1978. - Вып. 32. - С. 3-10.
3. Сахаров А.С., Соловей Н.А. Исследование устойчивости оболочек методом конечных элементов в задачах пластин и оболочек // Пространственные конструкции зданий и сооружений. - М., 1977. - Вып. 3. - С. 10-15.

Получено 23.08.06.

---

УДК 621.3

**А.А. Самойлов, А.В. Бреус**  
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

**ИЗМЕРЕНИЕ ВЛАЖНОСТИ В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ СВЧ МЕТОДОМ**

Получение информации о технологических параметрах и их изменениях в ходе технологических процессов представляет собой первоочередную задачу при автоматизации этих процессов. Поэтому разработка и создание высокоэффективных измерительных устройств и их основных функциональных элементов – датчиков – заслуживают большого внимания специалистов в области автоматики и измерительной техники.

Одним из основных технологических параметров, определяющих качество бесчисленного множества материалов, добываемых, перерабатываемых или синтезируемых различными отраслями промышленности и сельского хозяйства, является влажность.

Наиболее перспективной областью применения влагомеров (в том числе и сверхвысокочастотных (СВЧ)) являются автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУ ТП). Наличие систем контроля влажности повышает качество АСУ ТП, их эффективность, и в целом ряде случаев позволяет поднять на новую качественную ступень саму технологию производства.

В настоящее время большое количество технологических процессов является поточно-непрерывными, что накладывает свой отпечаток на требования к современным влагомерам. Как бы ни была высока точность дискретных измерений, обеспечить качественное управление процессом в условиях реального производства не представляется возможным, так как информационная емкость единицы дискретного измерения мала по сравнению с объемом продукции, перерабатываемой за время измерения.

Разработанная информационно-вычислительная система (влагомер) промышленного назначения позволяет проводить экспрессный контроль влажности твёрдых материалов (в том числе монолитных, порошкообразных и гранулированных) как дискретно, так и непрерывно (в потоке).

В качестве метода измерения, в результате проведенного анализа различных методов, был выбран СВЧ метод определения влажности, по поглощению СВЧ волны. Этот метод получил широкое применение ввиду возможности получения простых технических решений СВЧ влагомеров при несложной методике измерений. Его достоинствами являются бесконтактность измерений (чувствительный элемент-преобразователь может не иметь

гальванического контакта с объектом измерений) и возможность интегральной оценки влажности в значительных объемах. Принцип, лежащий в основе этого метода, прост и заключается в измерении параметров прошедшей или отражённой волны, предварительно собранной в узкие пучки с помощью передающей и приемной антенн, после взаимодействия с материалом. Информацию о влажности содержат амплитуда, фаза и угол поворота плоскости поляризации электромагнитной волны как отраженной, так и прошедшей через влажный материал.

На основе этого принципа реализуются три схемы измерения влажности: по значениям поглощения энергии СВЧ поля, по значениям фазового сдвига колебаний СВЧ и по параметрам отраженной от материала волны.

Рассмотрим физический процесс взаимодействия электромагнитной волны с влажным материалом (рис. 1), предполагая, что волна плоская и падает нормально (перпендикулярно) к поверхности образца (боковые поверхности слоя бесконечные и плоскопараллельные).

Так как диэлектрические свойства среды 1, в которой распространяются электромагнитные волны, отличны от диэлектрических свойств влажного материала 2, возникает отраженная волна  $P_{omp}$ .

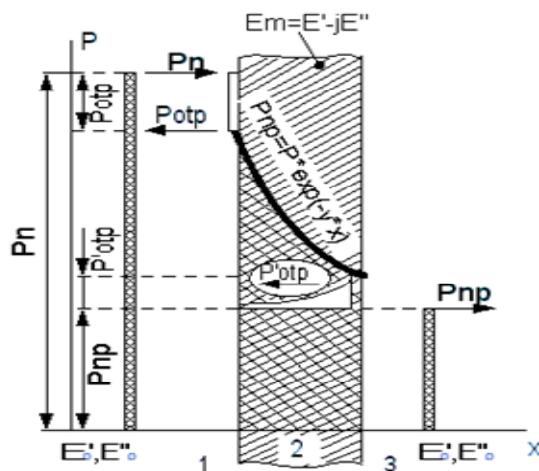


Рис. 1. Взаимодействие электромагнитной волны с влажным материалом

Мощность электромагнитной волны, прошедшей в материал, будет равна разности  $(P_{nad} - P_{omp})$ . Абсолютное значение мощности изменяется по экспоненциальному закону

$$P_{prosh} = P_{nad} - e^{-r \cdot x}$$

и зависит от толщины образца и постоянной распространения  $u$ . При выходе из материала электромагнитная волна вновь претерпевает отражение обратно в материал. Если среды 1 и 3 идентичны (как правило, это условие соблюдается, так как средами 1 и 3 является воздух), то коэффициент отражения от передней и задней поверхностей образца будет одинаков.

Таким образом, при выходе электромагнитной волны из образца мощность прошедшей волны:

$$P_{\text{прош}} = P \cdot e^{-r \cdot x} - P'_{\text{отр.}}$$

Отраженная часть  $P'_{\text{отр.}}$  мощности пройдет весь образец, дойдет до передней стенки, частично отразится и так далее. Возникнут многократные отражения.

Математическое решение рассмотренного явления заключается в моделировании данной системы линейным, обратимым, пассивным и симметричным четырехполюсником. Квадрат коэффициента пропускания  $T_{12}$ , выраженный через составляющие комплексной постоянной распространения  $y = a + j \cdot b$ , имеет вид:

$$|T_{12}|^2 = \frac{|(1 - \Gamma_{12})^2 + 4 \cdot \Gamma_{12} \cdot \sin^2 \varphi_{12}| \cdot e^{-2\alpha_2 \cdot l}}{(1 - \Gamma_{12} \cdot e^{-2\alpha_2 \cdot l})^2 + 4 \cdot \Gamma_{12} \cdot e^{-2\alpha_2 \cdot l} \cdot \sin(\varphi_{12} + \beta_{12})},$$

где  $\Gamma_{12}$  - коэффициент отражения:

$$\Gamma_{12} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) - (\beta_1 - \beta_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2};$$

$\varphi_{12}$  - фаза коэффициента отражения:

$$\varphi_{12} = \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1)}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2) - (\alpha_2^2 + \beta_2^2)};$$

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - постоянные затухания среды и влажного материала;

$\beta_1$  и  $\beta_2$  - фазовые постоянные среды и влажного материала.

Выражая общие потери мощности электромагнитной волны, прошедшей через материал, в децибелах, получим

$$N_{\Sigma} = -10 \cdot \lg |T_{12}|^2 = 8.68 \cdot \alpha_2 \cdot l - 4,34 \cdot \ln[(1 - \Gamma_{12})^2 + 4 \cdot \Gamma_{12} \cdot \sin^2 \varphi_{12}] + 4,34 \cdot \ln[(1 - \Gamma_{12} \cdot e^{-2\alpha_2 \cdot l})^2 + 4 \cdot \Gamma_{12} \cdot e^{-2\alpha_2 \cdot l} \cdot \sin^2(\varphi_{12} + \beta_{12} \cdot l)].$$

Преобразуем слагаемые в квадратных скобках, используя функцию квадратного синуса:

$$N_{\Sigma} = 8,68 \cdot \alpha_2 \cdot l - 4,34 \cdot \ln(1 - \Gamma_{12} \cdot \cos^2 \varphi_{12}) + 4,34 \cdot \ln[1 - \Gamma_{12} \cdot e^{-2\alpha_2 \cdot l} \cdot \cos^2(\varphi_{12} + \beta_{12} \cdot l)].$$

Однако расчеты показывают, что для образцов с большей влажностью при расчетах достаточно учитывать только коэффициент отражения от передней поверхности материала.

В этом случае ослабление равно:

$$N_{\Sigma} = 8,68 \cdot (\alpha_2 \cdot l + \Gamma_{12}).$$

При малых влажностях необходим учет остальных членов в формуле для вычисления ослабления.

Проведя анализ амплитудного и фазового метода, мы пришли к выводу о необходимости их объединения в один амплитудно-фазовый метод, что позволит исключить влияние ряда факторов, вносящих погрешность в результат измерения. В частности, комбинируя данные методы, результат измерения, оказывается, не зависит от плотности материала.

Зависимость сдвига фаз волны, прошедшей через влажный материал, определяется выражением

$$\Delta\varphi = \left( \beta - \frac{2\pi}{\lambda} \right) \cdot D,$$

где  $\beta$  - фазовая постоянная;

$\lambda$  - длина волны;

$D$  - расстояние между антеннами.

Важнейшими достоинствами СВЧ влагометра являются: возможность бесконтактных измерений (в свободном пространстве), высокая чувствительность, неограниченный верхний предел измерений, малое влияние на результат измерений химического состава материала, возможность интегральной оценки влажности в больших объемах (большая информационная емкость метода). Последнее является важным достоинством, так как в реальных производственных условиях всегда наблюдается неравномерное распределение влаги в объеме.

#### Список литературы

1. Бензарь В. К. Техника СВЧ влагометрии. - Минск: Высшая школа, 1974.
2. Берлинер М. А. Измерение влажности. - М.: Энергия, 1973.

Получено: 22.08.06.

---

УДК 656.11

**Н.С. Сауханов**

АГУ им. К. Жубанова, г. Актобе

**Ж.С. Сауханова**

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Астана

#### ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА УЛИЧНО-ДОРОЖНОЙ СЕТИ ГОРОДА АКТОБЕ

В настоящее время в городе Актобе наблюдается интенсивное увеличение численности транспортных средств, причем сам процесс автомобилизации сопровождается не только количественными, но и качественными изменениями. Все это приводит к тому, что на городских улицах и дорогах одновременно находится значительное количество транспортных средств, что приводит к повышению интенсивности дорожного движения на всех звеньях улично-дорожной сети. При этом отдельные участки городских улиц и дорог оказываются перегруженными, значительно возрастает плотность транспортных потоков. При недостаточно развитой улично-дорожной сети это обуславливает существенное снижение скоростей движения транспортных средств и, как следствие, образование заторов. Интенсивная автомобилизация сопровождается невосполнимыми потерями общества в результате возникновения дорожно-транспортных происшествий и связанных с ними ранениями и гибелью людей, увеличением транспортного шума и загазованности воздушного бассейна, которые отрицательно сказываются на здоровье населения.

Снизить отрицательные последствия автомобилизации при быстром росте интенсивности транспортных потоков и отставания дорожной инфраструктуры возможно при использовании современных методов организации дорожного движения, и в частности оптимального распределения транспортных потоков на улично-дорожной сети. Распределение транспортных потоков с целью разгрузки перегруженных участков улично-дорожной сети приводит к снижению задержек движения на пересечениях и примыканиях. При этом можно утверждать, что на перегруженных участках всегда будет происходить снижение задержек, а на недогруженных – увеличение задержек может и не происходить в силу имеющихся резервов пропускной способности этих элементов сети.

Следовательно, и в целом на улично-дорожной сети будет происходить снижение суммарных задержек на пересечениях и примыканиях.

Нами рассматривается задача для определения максимального потока при распределении транспортных потоков применительно к элементарному участку улично-дорожной сети г. Актобе (рис.1).

Задача определения максимального потока приводит к нахождению увеличивающихся цепей.

Распределение транспортных потоков будем рассматривать на графах.

пр.А.Молдагуловой

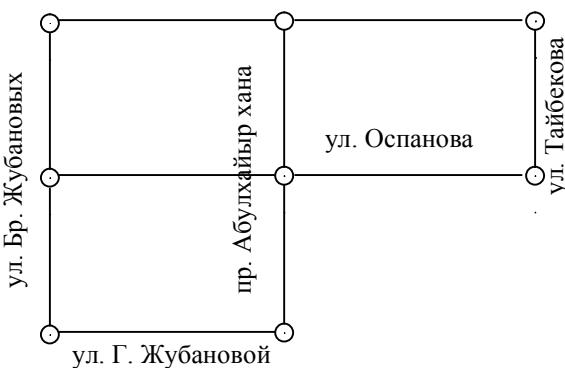


Рис. 1. Элементарный участок УДС г. Актобе

Применимельно к графикам поток задает способ пересылки некоторых объектов из одной вершины графа в другую по его дугам. Перемещение по дуге осуществляется в заданном на ней направлении. Вершина, из которой начинается перемещение объектов, называется *источником*, и обычно обозначается через  $S$ . Вершина, в которой заканчивается перемещение объектов, называется *стоком*, и обычно обозначается через  $t$ . Объекты, которые перемещаются из источника в сток, будут называться единицами потока или просто единицами.

Если количество единиц потока, которое может проходить по дуге  $(i, j)$ , ограничено, то говорят, что дуга  $(i, j)$  имеет ограниченную *пропускную способность*. *Максимальную* величину пропускной способности будем обозначать через  $n(i, j)$ . В дальнейшем величину  $n(i, j)$  будем называть просто пропускной способностью.

Кроме того, будем через  $a(i, j)$  обозначать *стоимость перемещения* единицы потока по

дуге  $(i, j)$ .

*Сеть* – это *граф*, в котором каждой дуге *приписана* некоторая *пропускная способность*.

Предположим, что имеется граф, в котором некоторое количество единиц потока проходит от источника к стоку, и для каждой единицы потока известен маршрут движения.

Назовем количество единиц, проходящих по дуге  $(i, j)$ , потоком в данной дуге. Будем поток в дуге  $(i, j)$  обозначать через  $f(i, j)$ . Очевидно,  $0 \leq f(i, j) \leq n(i, j)$ .

Дуги графа можно отнести к трем различным категориям:

- 1) дуги, в которых поток может ни увеличиваться, ни уменьшаться (обозначается через  $z$ );
- 2) дуги, в которых поток может увеличиваться (обозначается через  $k$ );
- 3) дуги, в которых поток может уменьшаться (обозначается через  $R$ ).

Например, дуги, имеющие нулевую пропускную способность или значительную стоимость прохождения потока, должны принадлежать множеству  $Z$ . Дуги, в которых поток меньше пропускной способности, должны принадлежать множеству  $K$ . Дуги, по которым уже проходит некоторый поток, должны принадлежать множеству  $R$ . Дуги множества  $K$  называются *увеличивающими*, а из  $R$  – *уменьшающими*.

Любая дуга графа принадлежит, по крайней мере, одному из трех множеств. Возможно, что какая-то дуга принадлежит как множеству  $K$ , так и множеству  $R$ . Это имеет место в том случае, когда по дуге уже протекает некоторый поток, который можно увеличивать или уменьшать. Такие дуги называют *промежуточными*.

Обозначим через  $k(i, j)$  максимальную величину, на которую может быть увеличен поток в дуге  $(i, j)$ . Через  $r(i, j)$  обозначим максимальную величину, на которую может быть уменьшен поток в дуге  $(i, j)$ . Очевидно,

$$k(i, j) = n(i, j) - f(i, j); \quad r(i, j) = f(i, j).$$

Пусть  $G$  – произвольный граф без петель, состоящий из  $m$ -вершин,  $x_i = \left( \begin{array}{c} i = 1, m \end{array} \right)$ ,

$n$ -дуг  $L_g = \left( \begin{array}{c} j = 1, n \end{array} \right)$ .  $G$  – матрица, состоящая из  $m$ -строк и  $n$ -столбцов.

$$g_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если вершина, которой соответствует } i \text{- я строка,} \\ & \text{является начальной для дуги, соответствующей } j \text{- му столбцу;} \\ -1, & \text{если вершина, которой соответствует } i \text{- я строка,} \\ & \text{является конечной для дуги, соответствующей } j \text{- му столбцу;} \\ 0, & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Для последовательности вершин  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  *цепью* называется любая последовательность дуг  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , такая, что концевыми точками дуги  $\alpha_i$  являются вершины  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , то есть  $\alpha_i = (x_i, x_{i+1})$  или  $\alpha_i = (x_{i+1}, x_i)$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Вершина  $x_1$  называется начальной вершиной цепи, вершина  $x_{n+1}$  – конечной вершиной цепи. Длина цепи совпадает с числом входящих в нее дуг.

Цепь, для которой  $\alpha_i = (x_i, x_{i+1})$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , представляет собой *путь*.

Имеется 3 способа пересылки дополнительного количества единиц потока из источни-

ка в сток.

Первый способ может быть реализован, если имеет место путь  $P$  из вершины  $s$  в вершину  $t$ , целиком состоящих из увеличивающихся дуг.

Поскольку  $k(i, j)$  представляет собой максимально возможное увеличение потока по дуге  $(i, j)$ , то величина дополнительного потока из  $s$  в  $t$  по пути  $P$  составит самое большее

$$\min_{(i, j) \in P} \{k(i, j)\}.$$

Второй способ увеличения потока может быть реализован, если имеем путь  $P$  из вершины  $t$  в вершину, целиком состоящих из уменьшающихся дуг. При этом можно уменьшить поток в каждой дуге  $(i, j)$ , что приводит к уменьшению потока из вершины  $t$  в вершину  $s$ , и следовательно, к увеличению потока из вершины  $s$  в вершину  $t$ . Поскольку в каждой дуге  $(i, j)$  пути  $P$  поток можно уменьшить самое большое на величину  $r(i, j)$ , то максимальное уменьшение потока вдоль пути  $P$  определяется величиной:

$$\min_{(i, j) \in P} \{r(i, j)\}.$$

Третий способ увеличения потока заключается в нахождении цепи, соединяющей вершины  $s$  и  $t$ , дуги которой удовлетворяют следующим условиям:

- 1) все *прямые* дуги цепи, имеющие направления от  $s$  к  $t$ , принадлежат множеству  $K$ ;
- 2) все *обратные* дуги цепи, имеющие направления от  $t$  к  $s$ , принадлежат множеству  $R$ .

Пересылка дополнительного потока из  $s$  в  $t$  осуществляется увеличением потока в прямых дугах и уменьшением потока в обратных дугах.

Максимальная величина дополнительного потока, который можно переслать вдоль соответствующей цепи из  $s$  в  $t$ , определяется как минимум из следующих двух величин:

$$\begin{aligned} \min \{j(x, y) : (x, y) - \text{прямая дуга}\}, \\ \min \{r(x, y) : (x, y) - \text{обратная дуга}\}. \end{aligned}$$

Максимальная из двух указанных величин называется *максимальным увеличением потока* по соответствующей цепи.

Каждая цепь из  $s$  в  $t$  любого из трех рассмотренных выше способов, по которой могут быть дополнительно посланы единицы потока, называется *увеличивающей цепью*.

Алгоритм поиска увеличивающей цепи заключается в следующем:

Шаг 1. Определить состав множеств  $Z, K, R$ . Дуги множества  $Z$  из дальнейшего рассмотрения исключить, так как в них изменения потока невозможны. Отметить вершину  $s$ .

Шаг 2. Отмечать дуги и вершины в соответствии с приводимыми ниже направлениями до тех пор, пока либо не будет отмечена вершина  $t$ , либо отметка новых вершин станет невозможной.

Правила отметки вершины  $j$  и дуги  $(i, j)$  при уже отмеченной вершине  $i$  состоят в следующем:

- а) если  $(i, j) \in K$ , то отмечаются вершина  $j$  и дуга  $(i, j)$ ;
- б) если  $(j, i) \in R$ , то отмечаются вершина  $j$  и дуга  $(j, i)$ ;
- в) в противном случае, отметка вершины  $j$  и дуги  $(i, j)$  не производится.

Рассмотрим граф  $G$  из 8 вершин и 10 дуг (рис.2).

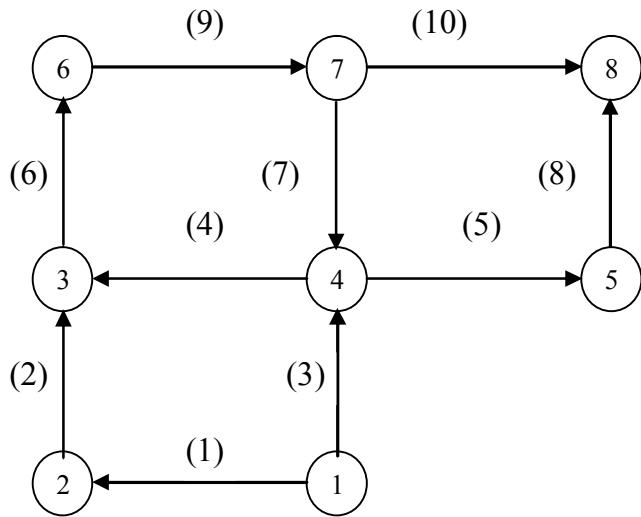


Рис. 2. Нахождение максимального потока на участке УДС

В этом графе примером увеличивающихся цепей является цепь из дуг (1), (2), (6), (9), (10), где каждая дуга является прямой дугой и принадлежит множеству  $K$ , а также цепь из дуг (1), (7), (10) также является увеличивающейся цепью, где дуги (1), (10) принадлежат множеству  $K$ , а дуга (7) является обратной дугой, принадлежащей множеству  $R$ .

Предложенный способ является основой алгоритма нахождения максимального потока в сети.

Список литературы

1. Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением / Под ред. М.Я. Блинкина. - Пер. с англ. - М.: Транспорт, 1983.
2. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Под ред. Е.К. Масловского. - Пер. с англ. - М.: «Мир», 1981.

Получено 11.09.06.





**МАКЕНОВА**  
**АЛТАЯ АБЫЛАЕВИЧА,**  
кандидата технических наук,  
доцента кафедры транспорта и логистики

