



УДК 656.09

**А.А. Давыдов, А.А. Макенов**Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
г. Усть-Каменогорск**Ж.К. Мустафин**

Казахская автомобильно-дорожная академия им. Л.Б. Гончарова, г. Алматы

**КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЭКСПЛУАТАЦИИ АВТОМОБИЛЕЙ**

В целях повышения уровня экономического развития республики необходимо обеспечить соответствующее развитие транспортной системы. Одной из главных задач для достижения этого является снижение грузоемкости экономики или уменьшение объема транспортной работы, которая затрачивается на единицу производимой продукции. Поэтому снижение удельного веса транспортной составляющей в производстве товаров и услуг должно быть возведено государством в разряд основных стратегических приоритетов развития транспортной системы, что позволит сделать продукцию и услуги транспорта более доступными для всех категорий населения [1].

При нормальном функционировании транспортного предприятия подвижной состав должен максимально по возможности находиться в процессе эффективной эксплуатации. В целях оценки качества его работоспособности предлагается использовать комплексную структурную математическую модель, которая основана на получении максимальной прибыли при минимуме непроизводственных затрат.

При этом в качестве обязательных составляющих модель технического обслуживания автомобилей должна включать следующие элементы:

- модель оценки готовности автотранспортной единицы к эксплуатации;
- модель определения частоты контрольных осмотров;
- модель оптимизации ремонта и замены оборудования;
- модель для определения межремонтного периода.

Модель оценки готовности автотранспортной единицы к эксплуатации можно представить функцией  $K_r(t)$  с предельным значением:

$$\bar{K}_r = \frac{\bar{t}}{\bar{t} + \nu}. \quad (1)$$

Среднее значение функции готовности для автотранспортной единицы рассчитывается по формуле

$$\bar{K}_{rc} = \left( 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i}{t_i} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где  $m$  – число автотранспортных единиц в парке;  $\bar{t}$  – среднее время безотказной работы;  $\nu$  – среднее время восстановления.

Коэффициент  $\bar{K}_r$  характеризует величину возможных затрат на ремонт автотранспортной единицы в плановый период перевозки  $T$ . Степень готовности автотранспортной

единицы к эксплуатации обязательно должна учитывать в общей модели оценку качества транспортного процесса.

Модель определения частоты контрольных осмотров базируется на максимизации функции прибыли, которая получается при эксплуатации автотранспортной единицы в единицу времени. Эта функция включает в себя планируемую прибыль и затраты на контрольный осмотр и ремонт автотранспортной единицы:

$$A(n) = V \left( 1 - \frac{\lambda(n)}{\mu} - n\bar{t}_{oc} \right) - R \frac{\lambda(n)}{\mu} - \mathcal{G}n\bar{t}_{oc}. \quad (3)$$

В результате решения данной задачи представляется возможным определение оптимального числа осмотров  $\bar{n}$  в единицу времени. При этом затраты на осмотр

$$C_{ockh} = (V_k + \mathcal{G}_k)n\bar{t}_{ock}t_h. \quad (4)$$

Величина затрат учитывает потерю прибыли от простоя автотранспортной единицы во время осмотра.

Выбор оптимального значения времени наработки  $\bar{t}_p$  производится на основе минимизации общих затрат на замену оборудования, которые для единицы времени определяются следующим выражением:

$$C(\bar{t}_p) = \frac{C_{np}R(\bar{t}_p) + C_{ap}[1 - R(\bar{t}_p)]}{\bar{t}_p R(\bar{t}_p) + M(\bar{t}_p)[1 - R(\bar{t}_p)]}, \quad (5)$$

где  $C_{np}$  и  $C_{ap}$  – общие затраты на профилактическую и аварийную замены, соответственно.

Оптимальное значение  $t_p$  находится из условия  $C(\bar{t}_p) \Rightarrow \min$ .

Для автотранспортной единицы  $k$ -го назначения в течение времени  $t_h$  минимальные затраты на ремонт оборудования составят величину:

$$C_{pkh} = \frac{C_{npk}R_k(\bar{t}_p) + C_{apk}[1 - R_k(\bar{t}_p)]}{\bar{t}_p R_k(\bar{t}_p) + M_k(\bar{t}_p)[1 - R_k(\bar{t}_p)]}t_h. \quad (6)$$

Оптимальное значение суммарных затрат на ремонтные и профилактические мероприятия определится как:

$$C_{kh} = C_{ockh} + C_{pkh}. \quad (7)$$

Модель оптимизации технического обслуживания автотранспортной единицы в плановый период перевозочного процесса может быть представлена в виде следующей функции:

$$A_{TC} = \sum_{h=1}^T \left\{ A \sum_{k=1}^N [V_{kh}X_{kh} + C_{kh}Y_{kh}(1 - K_{rk})] \right\}. \quad (8)$$

Общая целевая функция (1) оптимизации перевозочного процесса учитывает вопросы кадровой политики и социальные аспекты.

Проблемы, которые связаны с оптимизацией затрат на решение данных вопросов, представляются весьма актуальными и являются в современных условиях определяющими в организации эффективной деятельности транспортного предприятия.

В настоящее время парк автотранспортных средств республики более чем на 62 % состоит из автомобилей, которые находятся в эксплуатации более 15 лет. Поэтому основные узлы и детали ходовых частей и несущих конструкций автомобилей имеют значительный

износ. Политика обновления подвижного состава рассчитана на 7...10 лет и предусматривает внедрение рациональной системы эксплуатации и содержания автотранспортных единиц. Одной из основных особенностей планируемых правил эксплуатации является полное исключение капитальных восстановительных видов ремонта, узлов и деталей автомобилей и переход к замене оборудования по наработке [2]. Однако такие элементы автотранспортных единиц как рама, кузов, ходовые части и т. д. являются весьма дорогостоящими и их замена по мере возникновения дефектов или износа приведет к существенным финансовым издержкам. Устранение этих видов дефектов (восстановление формы кузова, заварка трещин и наплавка изношенных поверхностей) следует отнести к элементам капитального ремонта наряду с полной заменой дефектных узлов и деталей.

Замена оборудования автотранспортной единицы на стадии текущего ремонта и капитального ремонта означает его обновление с улучшением его состояния (т.е. фактического увеличения общего срока его эксплуатации).

При планировании организации ремонта автотранспортных единиц (рациональное размещения ремонтных баз и их обеспечение необходимым количеством деталей) основной проблемой является выбор и обоснование межремонтного периода  $t_p$ . Задачу определения оптимальных значений  $t_p$  можно решить в различной постановке. Для некоторых узлов и деталей автотранспортной единицы целесообразно использовать замену через интервалы времени нормального функционирования, которые измеряются годами и включают несколько ремонтных циклов. В этом случае задачу оптимальной организации замены оборудования можно решить на основе минимизации общих приведенных затрат  $C(n)$ . Эксплуатационная долговечность оборудования  $\Pi$  измеряется в определенный период (число выполненных планов).

В дальнейшем изложении будем использовать следующие обозначения:  $C_{po}$  – первоначальная стоимость нового оборудования;  $C_i$  – эксплуатационные затраты в  $i$ -й период времени с момента установки нового оборудования;  $R = \frac{1}{1+d}$  – действующий коэффициент дисконтирования;  $d$  – учетная ставка за рассматриваемый период.

При данной постановке задачи решение сводится к минимизации величины [3]

$$C(n) = \sum_{i=1}^N C_i(n) r^{i-1}, \quad (9)$$

где  $N$  – общее число циклов планирования перевозок (по отношению к величине  $n$  общее число циклов можно считать бесконечно большим).

Здесь величины  $C_i(n)$  означают общие затраты за  $i$ -й период эксплуатации, приведенные к началу цикла. Так как эксплуатационные затраты в каждый период примерно одинаковы, то величина  $C(n)$  есть не что иное, как сумма убывающей геометрической прогрессии и при бесконечно большом значении  $N$  будет равна:

$$C(n) = \frac{c(n)}{1-r^n}, \quad (10)$$

где  $c(n) = A_0 + \sum_{i=1}^n c_i r^{i-1}$ .

Оптимальное значение  $n$  находим из условия экстремума функции  $C(n) \Rightarrow \min$ .

Полученное таким образом решение предусматривает замену оборудования только в том случае, если эксплуатационные затраты за следующий период оказываются больше, чем предыдущие приведенные средние затраты. Предшествующие приведенные средние затраты оцениваются следующим выражением [3]:

$$C(n-1) = \frac{A_0 + \sum_{i=1}^n C_i r^{i-1}}{1 + \sum_{i=1}^n r^i}. \quad (11)$$

Замену целесообразно проводить через  $n$  циклов при выполнении условия

$$C(n) > C(n-1). \quad (12)$$

Для целого ряда деталей и узлов автотранспортной единицы организация замены по вышеприведенному принципу не является рациональной и более оптимальной организацией профилактической замены является определение периода  $t_p$  по наработке. В этом случае существует два возможных варианта рабочего цикла:

- профилактический цикл длительностью  $t_p$ ;
- цикл в случае отказа со средней длительностью  $M(t_p)$ .

Среднее время наработки до отказа определяется формулой

$$M(t_p) = \frac{\int_0^{t_p} t f(t) dt}{1 - R(t_p)}, \quad (13)$$

где  $f(t)$  – плотность распределения вероятностей времени безотказной работы оборудования;  $R(t)$  – функция надежности.

Ожидаемые общие затраты при этом будут расти:

$$C(t_p) = \frac{C_p R(t_p) + C_r [1 - R(t_p)]}{t_p R(t_p) + M(t_p) [1 - R(t_p)]}, \quad (14)$$

где  $C_p$  и  $C_r$  – общие затраты на профилактическую и аварийную замены.

Значение  $t_p$ , которое обеспечивает минимум общих затрат, определится из условия:

$$\frac{dC(t_p)}{dt_p} = 0. \quad (15)$$

При этом мгновенная интенсивность отказов будет равна:

$$r(t_p) = \int_0^{t_p} R(t) dt - F(t_p) = \frac{C_p}{C_r - C_p}. \quad (16)$$

Условием того, что замена по наработке более выгодна, чем аварийная замена, является соотношение:

$$\frac{C_r - C_p}{C_r} > \frac{M_r(t^*)}{M_r(0)} \quad \text{для некоторого } t^* > 0. \quad (17)$$

Величина  $M_r(t)$  есть математическое ожидание времени отказа элемента после его эксплуатации в течение времени  $t$  (функция восстановления):

$$M_r(t) = \frac{\int_0^{\infty} x f(t+x) dx}{R(t)}. \quad (18)$$

В большинстве случаев эксплуатации автомобилей с достаточной точностью для частоты отказов можно принять распределение Вейбулла и считать известными отношения затрат  $K = \frac{C_r}{C_p}$  и среднее время  $\bar{t}$  эксплуатации элемента, отнесенное к величине средне-

квадратического отклонения  $\sigma(t)$  времени безотказной работы.

Распределение Вейбулла может быть предоставлено семейством кривых с параметром  $\beta$ .

Плотность распределения Вейбулла имеет следующий вид [3]:

$$f(t) = \frac{\beta}{m} \left( \frac{t-t_0}{m} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{t-t_0}{m} \right)^{\beta} \right] \text{ для } t \geq t_0, m > 0, \quad (19)$$

где  $m$  – масштабный параметр (характеристика долговечности);  $t_0$  – параметр сбоя, который для большинства случаев принимается равным нулю.

Оптимальный интервал  $t_p$  между профилактическими заменами оборудования может быть получен с помощью номограмм, которые приведены на рис. 1, 2 [3].

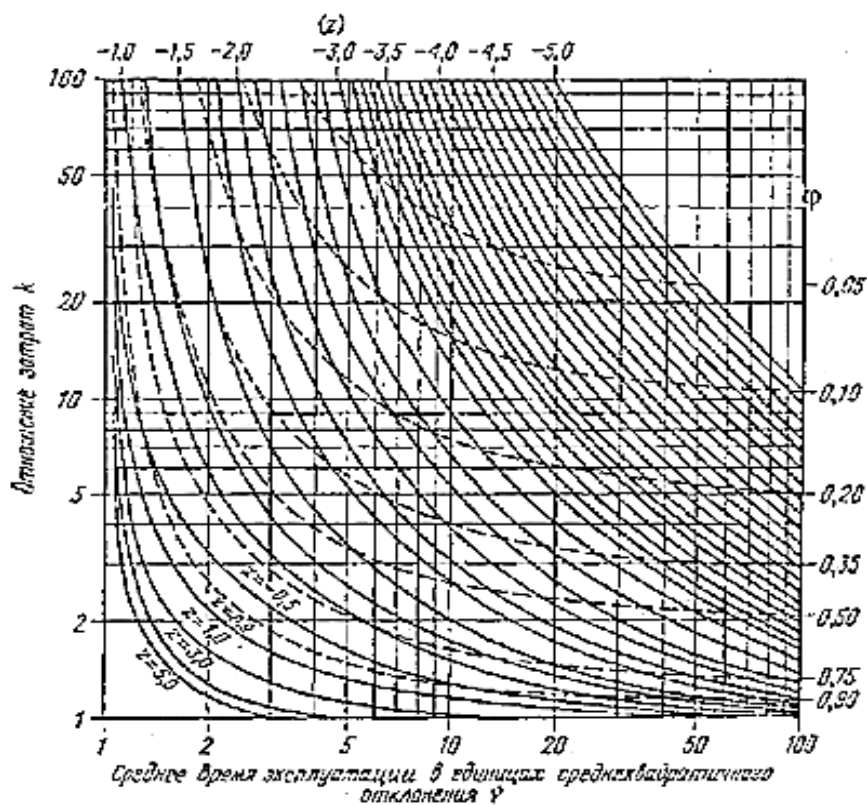


Рисунок 1 - Оптимальные стратегии при одновременной замене идентичных элементов

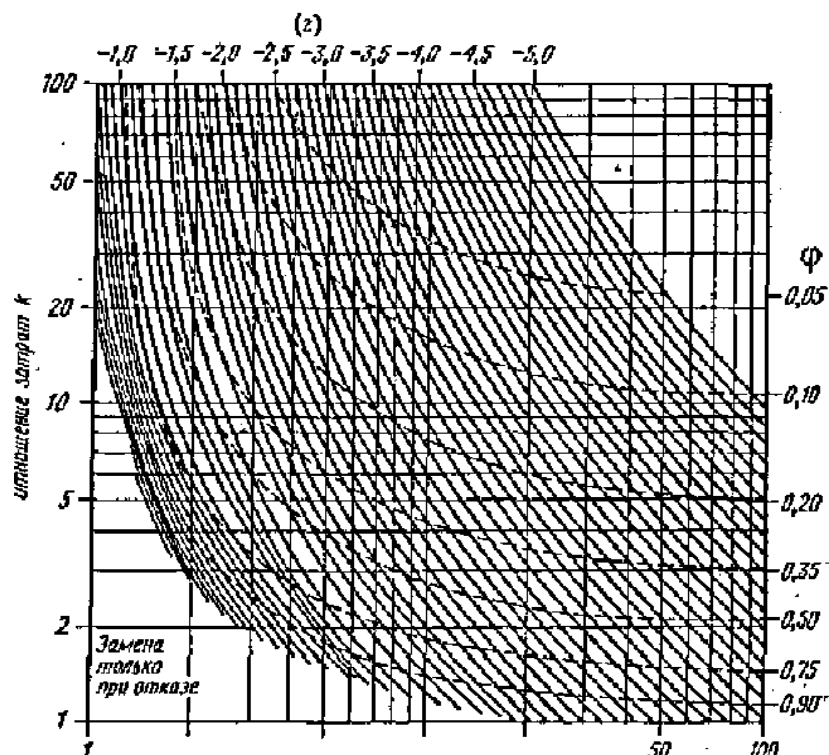


Рисунок 2 - Оптимальные стратегии при замене по наработке

При заданных значениях  $k$  и  $\bar{t}$  определяется оптимальное значение  $t_p$  через отклонение  $t$  от среднего значения  $\bar{t}$ , которое выражено в единицах среднеквадратического отклонения:

$$t_p = E(t) + z\sigma(t), \quad (20)$$

где  $E(t)$  – средняя наработка элемента до его замены.

По приведенным номограммам с помощью величины  $\varphi$  по заданным  $k$  и  $t$  можно определить отношение затрат при оптимальной стратегии к затратам при аварийных заменах.

#### Список литературы

1. Транспортная стратегия Республики Казахстан до 2015 года / (<http://ru.government.kz/>).
2. Осипов Ю.М. Экономические критерии показателя «значимость технического решения» АСУ конкурентоспособностью продукции. / Ю.М. Осипов, С.Н. Быков // Автоматизация и современные технологии. – 1996. – № 1.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1997. – 474 с.

Получено 12.05.2015

УДК 621.337.1

**А.Т. Жапарова, А.И. Квасов, Д.Н. Титов**Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
г. Усть-Каменогорск**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЯ СВЕТОДИОДНЫХ ОСВЕТИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ  
И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НИЗКОВОЛЬТНОЙ СИСТЕМЫ ПИТАНИЯ**

В настоящее время современная система освещения использует энергосберегающие элементы освещения, такие, как люминесцентные лампы, а также светодиодные лампы. Наиболее эффективной является светодиодная система освещения, имеющая высокую надежность и большой ресурс работы (более 50 000 часов).

Классическая схема включения светодиода в осветительном приборе показана на рис. 1.

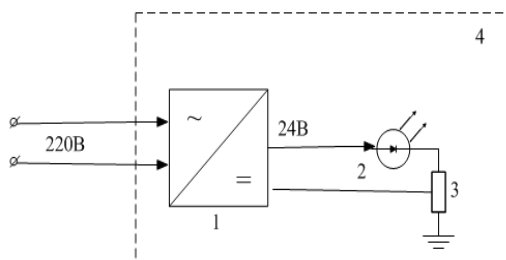


Рисунок 1 – Типичная схема осветительных приборов: 1 – преобразователь переменного тока в постоянный (драйвер), 2 – светодиод, 3 – эквивалентное сопротивление светодиода, 4 – контур осветительного прибора

Одним из элементов осветительного прибора является источник питания 1 (преобразователь переменного напряжения в постоянный). Таким образом, при освещении светодиодным светильником помещения, подключенного к сети с переменным напряжением 220 В, происходит потеря энергии при преобразовании напряжения драйвером, так как его КПД не равен 100 %.

При широком внедрении альтернативных источников энергии, в частности солнечных батарей или солнечных элементов питания, для использования типовых осветительных приборов необходимо преобразовать полученный от них постоянный ток в переменный (рис. 2).

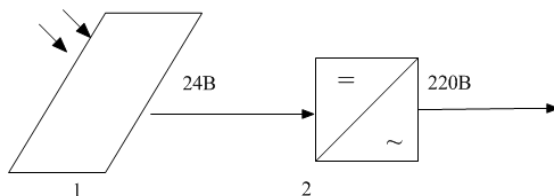


Рисунок 2 – Схема преобразования постоянного напряжения, вырабатываемого солнечной батареей, в переменное: 1 – солнечная батарея, 2 – преобразователь постоянного напряжения в переменное

Обычно, при применении альтернативных источников энергии, используют уже имеющиеся в наличии осветительные приборы, схемно представленные в виде контура 4 на рис. 1. А для обеспечения переменного напряжения 220 В устанавливается конвертор 24-220 В. Таким образом, общая схема реализации подключения светодиодных осветительных систем может быть представлена в виде рис. 3.

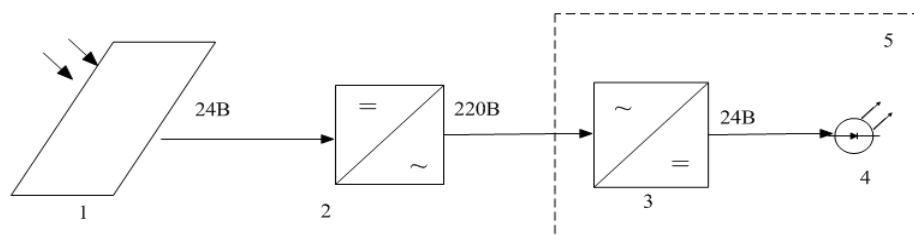


Рисунок 3 - Общая схема реализации подключения светодиодных осветительных систем: 1 – солнечная батарея, 2 – конвертор, 3 – преобразователь переменного тока в постоянный, 4 – светодиод, 5 – осветительный прибор

Несмотря на незначительный КПД солнечных батарей, их применение является эффективным из-за использования возобновляемого источника энергии. Однако в рассматриваемой схеме (рис. 3) имеется два преобразователя позиции 2 и 3, вносящие потери и утечки в систему освещения. Первый преобразователь 2 осуществляет преобразование постоянного тока, вырабатываемого солнечной батареей, 24 В в рабочее напряжение сети 220 В переменного тока, а второй конвертор (преобразователь переменного тока в постоянный) 3 осуществляет преобразование переменного тока в постоянный с 220 В до напряжения в 24 В.

Для определения эффективности применения двойного преобразования тока проведем расчет КПД системы.

Коэффициент преобразования (КПД) преобразователя характеризуется отношением активной мощности, отдаваемой в нагрузку, к полной мощности, потребляемой преобразователем.

Коэффициент преобразования (КПД) преобразователя определяется по формуле

$$\eta = P_d / (P_d + \Delta P), \quad (1)$$

где  $P_d$  – мощность, потребляемая электродвигателем преобразователя,

$$P_d = P_{d.ном} / \eta, \quad (2)$$

где  $P_{d.ном}$  – номинальное значение мощности двигателя преобразователя;  $\Delta P$  – суммарная мощность потерь в преобразователе.

Суммарная мощность потерь в преобразователе определяется:

$$\Delta P = \Delta P_B + \Delta P_{упр} + \Delta P_{тр}, \quad (3)$$

где  $\Delta P_B$  – потери в вентильях преобразователя;

$$\Delta P_B = n \cdot \Delta U_{np} \cdot I_a, \quad (4)$$

где  $n$  – количество вентилей в схеме выпрямителя преобразователя;  $\Delta U_{np}$  – прямое падение напряжения в вентиле преобразователя;  $I_a$  – среднее значение анодного тока в вентиле преобразователя,  $I_a = I_{d.ном} / 3$ ;  $I_{d.ном}$  – значение номинального тока двигателя преобразователя.



зователя;  $\Delta P_{упр}$  – мощность, потребляемая системой управления. Можно принять  $\Delta P_{упр} = 0,5\% \cdot P_{д.ном.}$ ;  $\Delta P_{тр}$  – потери в силовом трансформаторе;

$$\Delta P_{тр} = \Delta P_{см} + \Delta P_{м}, \quad (5)$$

где  $\Delta P_{см}$  – потери в силовом трансформаторе;  $\Delta P_{м}$  – потери в меди трансформатора определяются по формуле

$$\Delta P_{м} = P_{кз} \cdot (I_2 / I_{2\text{ ном}}), \quad (6)$$

где  $P_{кз}$  – мощность короткого замыкания;  $I_2$  – действительное значение рабочих токов вторичной обмотки;  $I_{2\text{ ном}}$  – ток вентиляционной обмотки.

Для изучения эффективности работы низковольтной схемы питания, основанной на использовании солнечной батареи, нами были проведены измерения, позволяющие определить КПД преобразователя 2 и конвертора (преобразователь переменного напряжения в постоянное) 3 (рис. 4). Общая схема измерения КПД системы показана на рис. 4.

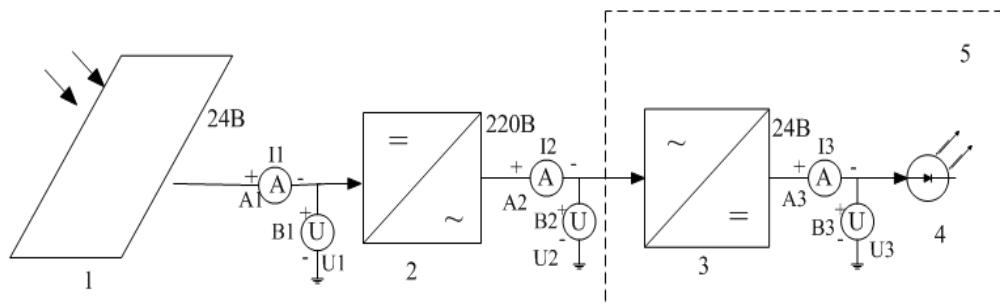


Рисунок 4 - Общая схема измерения КПД системы: 1 – солнечная батарея, 2 – преобразователь, 3 – конвертор (преобразователь переменного напряжения в постоянное), 4 – светодиод, 5 – осветительный прибор

Общий вид собранной системы для проведения измерений показан на рис. 5.



Рисунок 5 – Общий вид собранной в тестовом режиме системы освещения

КПД характеризует эффективность системы какого-либо устройства, в отношении преобразования или передачи энергии. Определяется отношением полезно использованной энергии к суммарному количеству энергии, полученному системой. КПД является безразмерной величиной и часто измеряется в процентах и обозначается  $\eta$ . Математическое определение КПД может быть записано в виде:

$$\eta = (A/Q) \cdot 100 \%, \quad (7)$$

где  $A$  – полезная работа;  $Q$  – затраченная работа.

В силу закона сохранения энергии КПД всегда меньше единицы или равен ей. Рассмотрим общую схему измерения КПД преобразователя 2 и конвертора (преобразователь переменного напряжения в постоянное) 3 (рис. 4). Допустим, что за основу взяли повышающий преобразователь напряжения. В разрыв цепи питания включаем амперметр  $A_1$  и параллельно входу питания преобразователя напряжения вольтметр  $V_1$ , показания которых нужны для расчета потребляемой мощности  $P_1$  устройства и нагрузки вместе от источника питания. К выходу преобразователя напряжения в разрыв питания нагрузки тоже включаем амперметр  $A_2$  и вольтметр  $V_2$ , требующиеся для расчета потребляемой нагрузкой  $P_2$  мощности от преобразователя напряжения. Далее включаем устройство, производим замеры показаний приборов и рассчитываем мощности  $P_1$  и  $P_2$  по следующим формулам [1, 2]:

$$P_1 = I_1 \cdot U_1, \quad (8)$$

$$P_2 = I_2 \cdot U_2. \quad (9)$$

КПД преобразователя  $\eta_1$  определяем по формуле

$$\eta_1 = (P_2/P_1) \cdot 100 \%. \quad (10)$$

По формуле (10) мы определяем реальный КПД преобразователя напряжения.

Мощность конвертора (преобразователь переменного напряжения в постоянное) 3 (рис. 3) определяем по следующим формулам

$$P_2 = I_2 \cdot U_2, \quad (11)$$

$$P_3 = I_3 \cdot U_3. \quad (12)$$

КПД преобразователя переменного напряжения в постоянное  $\eta_2$  определяем по формуле

$$\eta_2 = (P_3/P_2) \cdot 100 \%. \quad (13)$$

Суммарный общий КПД  $\Sigma\eta$  преобразователей можно определить по формуле

$$\Sigma\eta = \eta_1 \cdot \eta_2. \quad (14)$$

Для преобразования низковольтного напряжения использовался модуль от источника бесперебойного питания марки APC Back-UPS (рис. 6).



Рисунок 6 – Преобразователь постоянного тока в переменный

Для преобразования переменного тока в постоянный ток использовался преобразователь, показанный на рис. 7.



Рисунок 7 – Внешний вид преобразователя напряжения с 220 В на 24 В

Значения токов и напряжений, измеренных согласно схеме 4, приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Экспериментальные значения токов и напряжений*

$I_1, A$	$U_1, B$	$P_1 Bт$	$I_2 A$	$U_2 B$	$P_2 Bт$	$I_3 A$	$U_3 B$	$P_3 Bт$
2,2	12,6	27,7	0,06	207	11,1	0,14	37,6	5,3

Результаты расчетов по полученным экспериментальным значениям приведены в табл. 2.

Таблица 2

*Результаты расчетов по экспериментальным данным*

$P_1$ Вт	$P_2$ Вт	$P_3$ Вт	$\eta_1$ %	$\eta_2$ %	$\Sigma\eta$ %
27,7	11,1	5,3	40	47,8	20

В результате проведенных исследований и расчетов КПД преобразователя 2 (рис. 4) составил 40,1 %, КПД преобразователя 3 (рис. 4) составляет 48 %. Суммарный КПД составляет 20 %. Это показывает очень низкую эффективность применения такой схемы.

Использование солнечных батарей и системы без преобразователей тока (рис. 8) имеет большую перспективу.

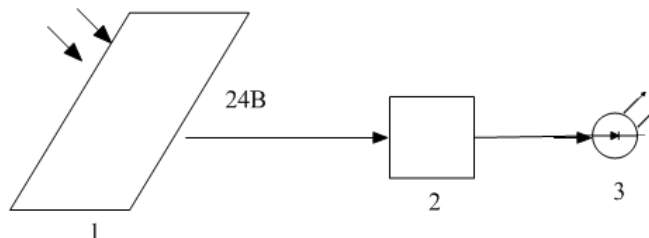


Рисунок 8 – Схема подключения светодиодного осветителя без применения преобразователей:  
1 – солнечная батарея, 2 – стабилизатор тока, 3 – светодиод

На рис. 8 показана схема подключения системы низковольтного освещения на основе светодиодов без преобразователей напряжения. Данная схема актуальна тем, что напряжение энергии, выработанной солнечной батареей 1, позволяет использовать светодиоды высокой мощности без преобразования энергии, что, в свою очередь, повышает КПД системы.

Для стабилизации постоянного тока использовался драйвер собственного изготовления на основе микросхемы PT4115, его типовая схема приведена на рис. 9, а фото изготовленного образца на рис. 10.

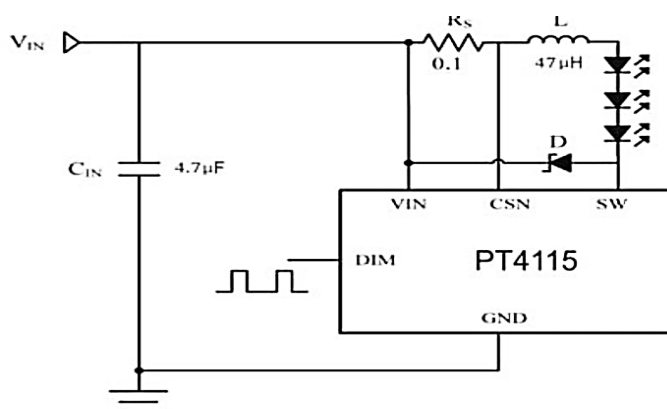


Рисунок 9 – Схема стабилизации тока

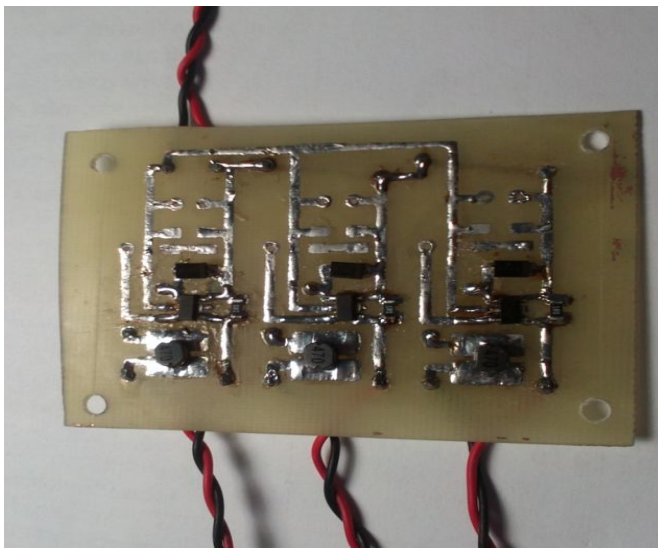


Рисунок10 – Изготовленный стабилизатор тока

Для накопления энергии и обеспечения устойчивой работы схемы (рис. 8) дополнительно устанавливается аккумулятор 4 и контроллер 2, обеспечивающие оптимальный заряд энергии и необходимое напряжение для работы низковольтной системы освещения (рис. 11).

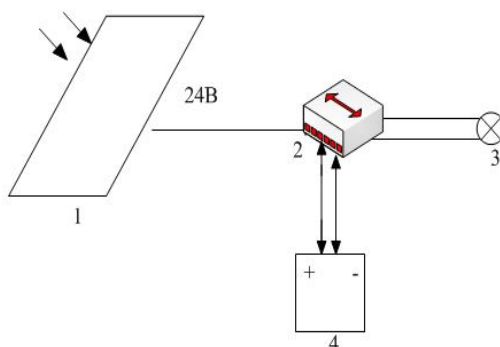


Рисунок 11 – Схема низковольтной системы освещения с использованием накопителя энергии: 1 – солнечная батарея, 2 – контроллер, 3 – низковольтный осветительный прибор, 4 - аккумулятор

Постоянный ток поступает из солнечной батареи 1 (рис. 11) в контроллер 2, который обеспечивает бесперебойную подачу электрической энергии на низковольтную систему освещения, одновременно осуществляется заряд аккумулятора 4.

Схема, представленная на рис. 11, была реализована для автономного питания освещения юрты. В данной схеме контроллер заряда показан на рис. 12.



Рисунок 12 – Контроллер заряда аккумулятора

Для испытания работоспособности системы были проведены натуральные испытания низковольтной системы освещения с использованием накопителя энергии по схеме, изображенной на рис. 11.

На национальном празднике Наурыз в г. Усть-Каменогорске проводилась выставка автономных энергосберегающих технологии, где был собран реальный образец низковольтной системы. Фото реализованной автономной системы низковольтного освещения показаны на рис. 13 и 14.

На рис. 13 показан внешний вид юрты, а на рис. 14 показаны светодиодные осветители. Испытание данной системы показало полную ее работоспособность. Система работала автономно в течение семи дней, при этом расход энергии на освещение составил всего 10 % от вырабатываемой солнечной панелью энергии, то есть можно было еще добавить нагрузку, эквивалентную 100 Вт электрической энергии.



Рисунок 13 - Внешний вид низковольтной системы освещения юрты

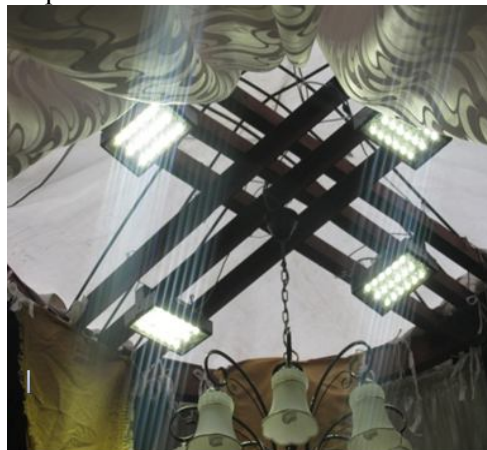


Рисунок 14 - Организация автономного режима работы внутреннего освещения юрты

Одной из проблем внедрения низковольтной системы является адаптация имеющейся электрической разводки проводов, используемых для напряжения 220 В, к напряжению 24 В. Проблема это связана с увеличением силы тока, что приводит к увеличению нагрева

(повышение температуры) проводов системы освещения.

Для внедрения низковольтной системы мы рассчитали необходимое сечение проводов при использовании низковольтных светодиодных ламп. Для расчета используются медные провода с удельным сопротивлением  $0,0175 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ , [1, 2].

- сопротивление провода определяется по формуле

$$R = \rho \cdot (l/S), \quad (15)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление провода,  $\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ ;  $l$  – длина проводника, м;  $S$  – площадь его поперечного сечения,  $\text{мм}^2$ ;

- площадь поперечного сечения определяем по формуле

$$S = \rho \cdot (l/R). \quad (16)$$

Ток в линии провода определяется по формуле

$$I = P/U, \quad (17)$$

где  $P$  – мощность, потребляемая нагрузкой, Вт;  $U$  – напряжение в линии провода, В.

Для определения соответствия существующих медных проводов с новой низковольтной системой определяем сечение существующего провода (результаты приведены в табл. 3).

Таблица 3

*Результаты расчета сечения существующего провода*

P, Вт	U, В	I, А	S, мм <sup>2</sup>
1000	220	4,54	2,5

Требуемое сечение провода для низковольтной системы приведены в табл. 4.

Таблица 4

*Результаты расчета сечения провода для низковольтной системы*

P, Вт	U, В	I, А	S, мм <sup>2</sup>
400	24	16,7	2,5

Таким образом, при использовании низковольтной системы за счет более высокой энергоэффективности, более высокого КПД системы и отсутствия двух преобразователей (рис. 9), при имеющемся сечении проводов высокой системы освещения напряжением 220 В мы можем использовать в системе провод сечением не менее  $2 \text{ мм}^2$ . При этом при замене ламп накаливания на светодиодные не потребуется замена проводов по всей системе.

При внедрении низковольтной системы по результатам, приведенным в табл. 3 и 4, не требуется замена существующих проводов.

Рассмотренные варианты использования альтернативных источников энергии для систем освещения показали, что традиционные способы их применения неэффективны. Двойное преобразование тока делает систему нежизнеспособной, ее КПД не превышает 20 %. Показано, что применение нетрадиционной системы освещения с напряжением 24 В без преобразования энергии гораздо эффективнее и менее травматично. Также показано, что за счет применения энергоэффективных систем освещения допустимо использовать существующие электрические проводки без риска их перегрева.

#### Список литературы

1. Эраносян С.А. Сетевые блоки питания с высокочастотными преобразователями. – М:

Высшая школа, 2010.

2. Забродин Ю.С. Промышленная электроника. – М: Высшая школа, 2009.

3. Коголь И.М. Электротехника: Учеб.-метод. комплекс / И.М. Коголь, Г.П. Дубовицкий, В.Н. Бородянюк и др.; Под ред. Н.В. Клиначёва. – Offline версия 2.0. – Челябинск, 2007. – файлов 2990, ил.

Получено 25.05.2015

УДК 622.671.1+621.54+621.65(075.8)

**В.Х. Кумыков, Т.М. Кумыкова**

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
г. Усть-Каменогорск

#### МЕХАНИЗМЫ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ВЕЛИЧИНУ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ШАХТНОЙ ПНЕВМОСЕТИ

Эффективность работы пневмосетей с увеличением их протяженности снижается в связи с ростом потерь энергии сжатого воздуха при его транспортировке к потребителю. Потери работоспособности воздуха при транспортировании его от компрессорной станции до потребителей пневматической энергии есть ни что иное, как его коэффициент полезного действия  $\eta$ , который в общем виде можно записать  $\eta = A_K / A_H$  ( $A_H$  и  $A_K$  – работоспособность воздуха соответственно в начале и конце трубопровода).

Снижение работоспособности является следствием падения давления воздуха в пневмосети. Большие потери давления в воздухопроводе приводят к недопустимому снижению давления у потребителей, что ухудшает показатели их работы. Потеря давления при движении воздуха по пневматической сети вызывается местными сопротивлениями и сопротивлениями по длине трубопровода. Потери давления по длине трубопровода составляют основную часть общих потерь давления, потери же давления за счет местных сопротивлений сравнительно небольшие и их учитывают, увеличивая при расчете фактическую длину трубопровода на величину эквивалентной длины местных сопротивлений.

При движении сжатого воздуха по трубам имеют место потери количественные: утечки воздуха через различные неплотности в трубопроводах (в местах фланцевых соединений труб; в отверстиях, образовавшихся в результате коррозии труб и т.д.), которые являются важным показателем экономичности эксплуатации шахтной пневмосети и качественные – потери давления воздуха, вызванные гидравлическими сопротивлениями в трубах, их фасонных частях и арматуре.

Зависимость между расходом сжатого воздуха в трубопроводе и давлением в нем представляет собой характеристику воздухопроводной сети. Вид характеристик пневмосети и режим работы отдельных ее участков в большой степени определяются расходными характеристиками потребителей, питающихся от сети. Расходные характеристики представляют собой зависимость расхода сжатого воздуха от давления в месте присоединения потребителя к пневмосети. Вследствие этого, установление расходных характеристик потребителей является первоочередной задачей при анализе и разработке методов расчета шахтной пневмосети.

Рудничные воздухопроводные сети представляют собой сложную разветвленную систему большой емкости протяженностью в среднем до 30 и более километров. Основной объем сжатого воздуха, подаваемого в пневмосеть рудника (60÷80 %), идет на питание бу-



ровых машин. Энергетические параметры сжатого воздуха существенно влияют на производительность бурения. Питание пневматических буровых машин сжатым воздухом с давлением ниже предусмотренного технической характеристикой снижает производительность, а работа на повышенном – увеличивает скорость бурения и улучшает санитарно-гигиенические условия труда. С падением давления с 0,6 до 0,4 МПа скорость бурения снижается в 1,5 раза [1], а удельный расход сжатого воздуха на 1 м шпура увеличивается в 1,3 раза. Причиной недостатка сжатого воздуха на пневмоприемниках в большинстве случаев являются значительные (40÷60 %) количественные и качественные потери его энергии в воздухопроводах.

Одним из способов повышения достоверности оперативного планирования горных работ является прогнозирование производительности бурового оборудования, зависящей от параметров подводимого сжатого воздуха в пунктах его массового забора. Определение параметров с присущими рудничным пневмосистемам большой размерностью, сложностью временных и пространственных процессов возможно только с помощью ЭВМ. Математическая модель, заложенная в метод расчета, должна достигать приемлемой степени изоморфизма реальной пневмосистеме.

Известные методы расчета режимов работы пневмосистем характеризуются рядом недостатков, затрудняющих их применение или существенно снижающих достоверность полученных показателей.

Значительная неточность прогноза при использовании математической модели, разработанной по методике расчета [2], объясняется формальностью учета коэффициента одновременности работы оборудования и наличием пневмоприемников с различным характером потребления сжатого воздуха. Детерминированный подход к расчету режима работы пневмосистемы приводит к тому, что прогноз не содержит данных о стабильности давления сжатого воздуха в местах работы бурового оборудования и закона его распределения.

Более высокой сходимостью расчетных и фактических режимов работы пневмосистемы, но со значительной трудоемкостью, отличается метод расчета, основанный на статистическом моделировании расходов сжатого воздуха потребителями согласно полученным экспериментальным путем законам его распределения на выборочно взятых пневмоприемниках. При использовании этого метода эксперименты проводятся после каждого перераспределения потребителей по участкам пневмосети [3]. Кроме того, недостатки метода в том, что при расчете не учитывается работа компрессорной станции, а закон распределения расхода воздуха пневмоприемниками считается нормальным, хотя основная их часть работает в режиме повторно-кратковременного потребления сжатого воздуха.

В данной работе для прогнозирования предлагается использовать метод статистических испытаний, основанный на изменении состояния работы потребителей пневмоэнергии. Сущность его заключается в многократном расчете параметров режима работы пневмосистемы при различном числе включенных потребителей и последующей статистической обработке полученных выборок показателей. Вероятность работы потребителя пневматической энергии равняется коэффициенту использования им сжатого воздуха, представляющему собой отношение периода времени интенсивного забора сжатого воздуха к общей продолжительности рассматриваемого периода [4]. Основные соотношения, отражающие связь параметров сжатого воздуха в различных элементах пневмосистемы, описываются ниже.

Полезный расход сжатого воздуха потребителем пневмоэнергии  $Q_{пот}$  (м<sup>3</sup>/с), [5]:

$$Q_{\text{ПОТ}} = \frac{P_{\text{ПОТ}}}{P_{\text{ПАСП}}} \cdot Q_{\text{ПАСП}}, \quad (1)$$

где  $P_{\text{ПОТ}}$  – избыточное давление сжатого воздуха в месте работы потребителя пневмоэнергии, МПа;  $P_{\text{ПАСП}}$  – паспортное избыточное рабочее давление сжатого воздуха потребителя пневмоэнергии, МПа;  $Q_{\text{ПАСП}}$  – паспортный расход сжатого воздуха потребителем пневмоэнергии, м<sup>3</sup>/с.

Утечки сжатого воздуха  $Q_{\text{УТ.ПОТ}}$  (м<sup>3</sup>/с) через потребитель пневмоэнергии:

$$Q_{\text{УТ.ПОТ}} = \alpha \cdot Q_{\text{ПАСП}}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент утечки сжатого воздуха через потребитель пневмоэнергии.

Утечка сжатого воздуха  $Q_{\text{УТ}}$  (м<sup>3</sup>/с) через неплотности трубопровода на участке пневмосети

$$Q_{\text{УТ}} = c \cdot \frac{\ell \cdot (P_{\text{Н}} + P_{\text{К}})}{2D}, \quad (3)$$

где  $c$  – коэффициент утечки сжатого воздуха через неплотности трубопровода, м<sup>3</sup>/МПа·с;  $\ell$  – длина участка пневмосети, м;  $D$  – диаметр трубопровода на участке пневмосети, м;  $P_{\text{Н}}$  – избыточное давление сжатого воздуха в начале участка, МПа;  $P_{\text{К}}$  – избыточное давление сжатого воздуха в конце участка, МПа.

Избыточное давление сжатого воздуха в конце участка пневмосети определяется из выражения

$$P_{\text{К}} = \sqrt{(P_{\text{Н}} - P_{\text{ат}})^2 - k \cdot \frac{\beta \cdot \ell \cdot |Q|}{D^{5,3}} \cdot Q} - P_{\text{ат}}, \quad (4)$$

где  $Q$  – расход сжатого воздуха по участку пневмосети, м<sup>3</sup>/с;  $\beta$  – коэффициент учета местных сопротивлений;  $k$  – коэффициент трубопровода участка пневмосети (зависит только от геометрических параметров трубопровода);  $P_{\text{ат}}$  – атмосферное давление окружающего воздуха в начале участка пневмосети, МПа;  $P_{\text{ат}}$  – атмосферное давление окружающего воздуха в конце участка пневмосети, МПа.

Производительность компрессора  $Q_{\text{компр}}$ , м<sup>3</sup>/с,

$$Q_{\text{компр}} = a_{\text{к}} \cdot P_{\text{КС}}^2 + b_{\text{к}} \cdot P_{\text{КС}} + c_{\text{к}}, \quad (5)$$

где  $P_{\text{КС}}$  – избыточное давление сжатого воздуха на выходе компрессорной станции, МПа;  $a_{\text{к}}$ ,  $b_{\text{к}}$ ,  $c_{\text{к}}$  – коэффициенты, получаемые по результатам анализа индивидуальных характеристик компрессоров.

На основе приведенных соотношений разработана математическая модель наиболее распространенного типа пневмосистемы, включающая одну компрессорную станцию и разветвленную пневмосеть. Режим работы пневмоустановки оценивается значениями расхода и давления сжатого воздуха у компрессорной станции, пунктов потребления и узловых точках. При постоянном числе работающих потребителей давление во всех характерных точках сети однозначно определяется таковым у компрессорной станции, а режим ее работы на пневмосеть – точкой пересечения их расходных характеристик. Теоретическая характеристика компрессорной станции представляет результат сложения индивидуальных характеристик компрессоров. Реальная – имеет излом по давлению срабатывания предохранительных клапанов  $P_{\text{кл}}$  (рис. 1).

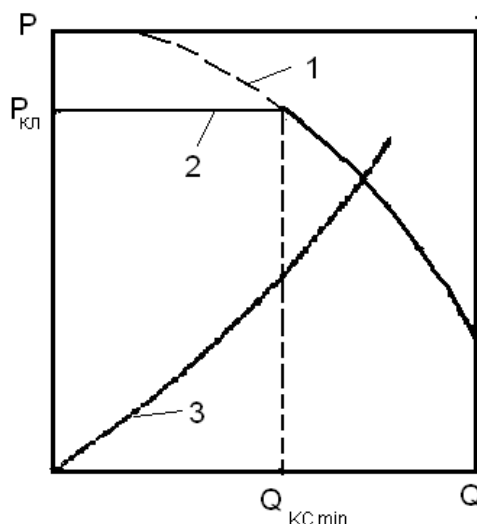


Рисунок 1 – Определение режима работы пневмосистемы рудника: 1 - идеальная характеристика компрессорной станции (КС); 2- реальная характеристика КС; 3 - характеристика пневмосети

Излом характеристики компрессорной станции предопределяет возможность работы пневмосистемы в двух режимах.

Пересечение характеристик пневмосети и компрессорной станции по наклонному участку отвечает нормальному режиму работы, при котором

$$P_{КС} = P_{пс} \leq P_{KL} \text{ и } Q_{KL} = Q_{пс}.$$

При сбросе части воздуха в атмосферу через предохранительные клапаны они пересекаются на горизонтальном участке. В данном случае

$$P_{КС} = P_{пс} = P_{KL} \text{ и } Q_{пс} \leq Q_{КС}.$$

При этом режиме производительность компрессорной станции не изменяется и соответствует давлению срабатывания предохранительных клапанов.

Излом характеристики компрессорной станции затрудняет применение итерационных методов расчета системы нелинейных уравнений, описывающих математическую модель пневмосистемы, так как ухудшается их сходимость. В связи с этим предлагается решать поставленную задачу в два этапа.

На первом - предполагается, что компрессорная станция работает в режиме сброса части воздуха в атмосферу, и при этом допущении ведется расчет. По его окончании проверяется истинность сделанного предположения.

В случае неверности расчета он повторяется на втором этапе при работе станции в нормальном режиме.

Проведенные исследования подтверждают высокую эффективность принятого подхода к решению системы уравнений с разрывом производных, описывающей предложенную модель пневмосистемы.

На рис. 2 представлен укрупненный алгоритм разработанной программы расчета. С целью снижения объема вычислений и повышения быстродействия работы данной версии программы результаты моделирования отдельных испытаний не запоминаются, а определяются начальные моменты расчетных параметров. При таком подходе информация о параметрах сжатого воздуха, имеющих примерно нормальный закон распределения, получается достаточно полной. Результаты расчета показывают, что в ряде случаев к та-

ким параметрам можно относить давление сжатого воздуха на значительном числе потребителей пневмоэнергии.

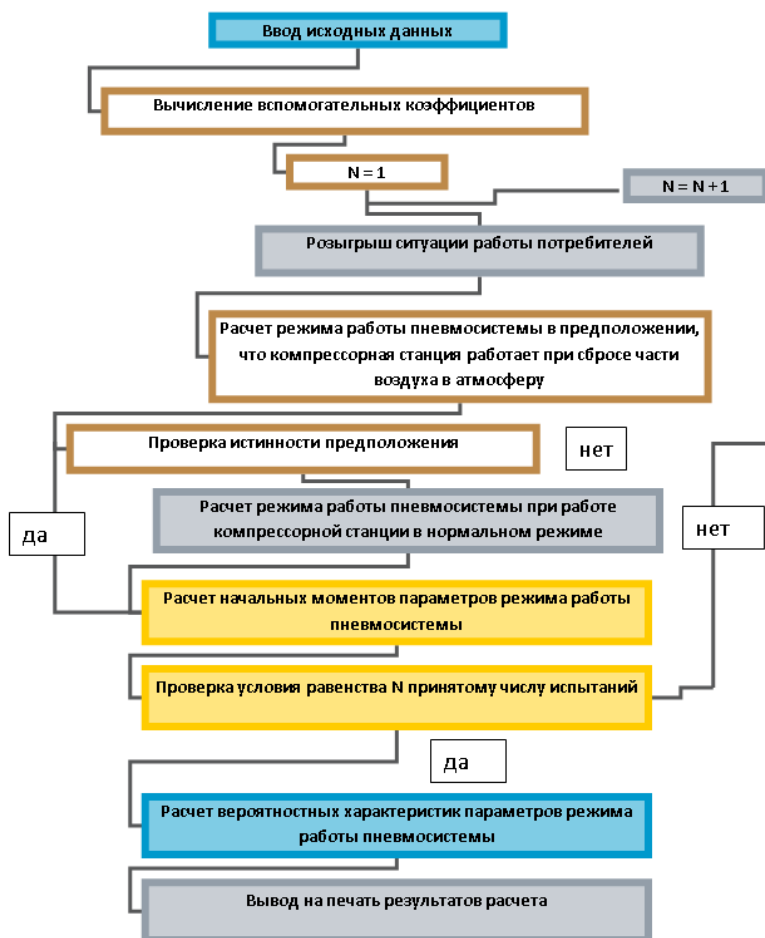


Рисунок 2 – Укрупненный алгоритм программы статистического расчета режима работы пневмосистемы рудника

Программа написана при следующих максимальных размерах модели пневмосистемы:

- число горных выработок рудника – до 500;
- число узлов пневмосети - до 500;
- число участков пневмосети – до 300;
- число потребителей пневматической энергии – до 100;
- число компрессоров на компрессорной станции – до 10.

При определении размерности модели в данной версии программы использовались характеристики пневмосистемы Тишинского рудника. На Тишинском руднике применяется около 100 потребителей пневматической энергии, из них более 80 используется на подземных работах.

На руднике применяются самоходные буровые станки для подземного бурения скважин из горных выработок сечением 2,5×2,5 и 2,85×2,8 м ПБУ-80М, СБ-1М, СБУ-55/85, оснащенные перфораторами ПК-75А с расходом воздуха от 0,27 до 0,5 м³/с. Бурильные

установки на пневмоколесном и гусеничном ходу – УБШ-208 с расходом сжатого воздуха до 0,5 м<sup>3</sup>/с, УБШ-121, БК-2П, УБШ-208, УБШ-304, оснащенные перфораторами ПК-60. Кроме того, рудником могут быть использованы на бурении скважин бурильные колонковые установки БКУ-50М, КБУ-80 с расходом сжатого воздуха 0,2 и 0,22 м<sup>3</sup>/с, а также станки с пневмоударниками типа НКР и ЛПС с расходом воздуха до 0,15 м<sup>3</sup>/с. Диапазон применяемого импортного бурового оборудования может быть расширен.

Как показывает анализ технических характеристик современного и находящегося в стадии испытаний и промышленного освоения бурового оборудования, расходные параметры сжатого воздуха находятся на высоком уровне [6, 7]. Полученные в местах подключения буровых агрегатов параметры сжатого воздуха используются в расчетах ожидаемой производительности бурения. Расчет ведется по известным зависимостям и методам, отражающим влияние давления сжатого воздуха на скорость бурения [8]. Возможная эксплуатационная производительность агрегата определяется по механической скорости, соответствующей найденному давлению сжатого воздуха, и выражается в метрах или тоннах в смену.

Разработан метод определения параметров сжатого воздуха в системе пневмосети, запитанной через общий ввод от одной компрессорной станции. По прогнозным вероятностным характеристикам давления сжатого воздуха можно определять эксплуатационную производительность буровых агрегатов в фиксированных забоях.

#### Список литературы

1. Ямковский Г.Т. Технико-экономическая эффективность применения высокого давления воздуха при бурении горных пород // Изв. вузов. Горный журнал. – 1976. – № 7. – С. 118-120.
2. Горячев В.Н. Программа анализа разветвленных пневматических сетей / В.Н. Горячев, Л.Л. Моисеев // Вопросы горной механики. – 1975. – № 76. – Кемерово, 1975. – С. 191-216.
3. Дудин В.И. К вопросу о зависимости расхода сжатого воздуха в шахтной сети от давления / В.И. Дудин, Ю.А. Цейтлин // Горная электромеханика и автоматика. – 1973. – Вып. 22. – С. 142-146.
4. Горячев В.Н. Некоторые результаты вероятностного моделирования пневмоэнергосистемы рудника «Абаканский» на ЭЦВМ // Вопросы горной механики. – Кемерово, 1974. – С. 233-240.
5. Мурзин В.А. Расчет пневматических сетей шахт / В.А. Мурзин, Ю.А. Цейтлин. – М.: Недра, 1971. – 104 с.
6. Иванов К.И. Техника бурения при разработке месторождений полезных ископаемых / К.И. Иванов, В.А. Латышев, В.Д. Андреев. – М.: Недра, 1990. – 208 с.
7. Иванов К.И. Бурение шпуров и скважин самоходными шахтными установками / К.И. Иванов, А.М. Цинкис. – М.: Недра, 1989. – 156 с.
8. Шварц Г. Выборочный метод. Руководство по применению статистических методов оценивания / Пер. с нем. Я.Ш. Палпэ; Под ред. И.Г. Венецкого, В.М. Ивановой. – М.: Статистика, 1978. – 213 с. с ил.

Получено 15.04.2015

---

УДК 622.671.1+621.54+621.65(075.8)

**Т.М. Кумыкова, В.Х. Кумыков, Я.Ю. Терешина**

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
г. Усть-Каменогорск

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПЛЕКСА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ**

### С ПНЕВМОПРИВОДОМ

Анализ и описание динамических процессов, протекающих в рудничных пневмоэнергетических комплексах при их функционировании даже при традиционной компоновке – компрессорная станция – пневматические сети, представляет сложную проблему.

Возможность же введения в состав пневмоэнергетического комплекса аккумулятора сжатого воздуха и применения новых конструкционных материалов (полимерных труб) приводит к возникновению новых задач, не отраженных в существующей технологии проектирования [1]:

- определения рационального давления сжатого воздуха в пневматической сети;
- типа аккумулятора, его конструкции и др.

Учет изложенного, а также таких влияющих на принятие проектных решений факторов, как развитие горных работ, маневренность оборудования, вероятностный характер его работы при традиционном подходе к проведению научно-исследовательских и проектных работ по пневмоэнергетическим комплексам неизбежно вызовет значительный рост затрат на их создание.

Снижение трудоемкости и повышение качества исследовательских и проектных работ возможно только за счет их автоматизации, что предполагает разработку системы современных расчетных методов на единой методической основе.

Анализ известных методов расчета пневмоэнергетических комплексов подземных рудников показывает, что отсутствие единых принципов подхода при их разработке приводит к несовместимости по данным в случае комплексного их использования. При этом анализ работы или определение параметров какого-либо элемента пневмоэнергетического комплекса ведется в отрыве от остальных его составляющих [2, 3].

К общим недостаткам рассматриваемых методов, значительно снижающим достоверность получаемой информации, также относятся отсутствие учета развития рудника и, следовательно, самого пневмоэнергетического комплекса в процессе отработки месторождения, маневренности основных потребителей сжатого воздуха, слабый учет вероятностного характера потребления сжатого воздуха пневмооборудованием.

Для определения рациональной структуры модели комплекса технологического оборудования с пневмоприводом классифицируем составляющие его элементы по следующим признакам:

- 1) по основному месту работы: пневмоприемники делятся на наземные и подземные;
- 2) по маневренности: стационарные и передвижные;
- 3) по характеру потребления сжатого воздуха: работающие в непрерывном и повторно-кратковременном режимах;
- 4) по степени обобщенности: индивидуальные (пневмооборудование – перфораторы, буровые станки и каретки, погрузочные машины, вентиляторы местного проветривания с пневмоприводом и т.д.) и групповые потребители (механический цех, обогатительная фабрика, добычной участок, рудник или шахта в целом).

Каждый пневмоприемник первого вида является совокупностью элементарных пневмомеханизмов (иногда – один пневмомеханизм), второго – в общем случае совокупностью пневмоприемников первого вида.

По виду функциональной зависимости потребления сжатого воздуха от его избыточного давления  $Q = f(P)$  пневмоприемники могут быть отнесены к одной из следующих групп:

- с набором ограниченного числа линейных функций  $Q = f(P)$ ;

- со случайной функцией  $Q = f(P)$ , причем для каждого фиксированного значения избыточного давления выполняется условие нормального распределения потребления сжатого воздуха с математическим ожиданием  $M_Q = \alpha_M \cdot P$  и стандартным отклонением  $\sigma_Q = \alpha_\sigma \cdot P$ ;

- со случайной функцией  $Q = f(P)$  произвольного вида.

К первой группе пневмоприемников можно отнести пневмооборудование. Функция  $Q = f(P)$  для агрегата в каждый конкретный момент времени в этом случае определяется как сумма характеристик составляющих его пневмомеханизмов  $Q$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ),

$$Q = (q_{\text{мех.}} + \alpha_{\text{мех.}}) \cdot \frac{Q_{\text{пасп.мех.}}}{P_{\text{пасп.мех.}}} \cdot P, \quad (1)$$

где  $Q_{\text{пасп.мех.}}$  – паспортный расход пневмомеханизма,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $P_{\text{пасп.мех.}}$  – паспортное избыточное рабочее давление пневмомеханизма, МПа;  $\alpha_{\text{мех.}}$  – коэффициент утечек сжатого воздуха через пневмомеханизм;  $q_{\text{мех.}}$  – индикатор состояния пневмомеханизма, равный 1 при его включении и 0 в отключенном состоянии.

Ко второй группе пневмоприемников могут быть отнесены обобщенные потребители с недостаточной информацией о характеристиках составляющих их элементах (например, обогатительная фабрика на начальной стадии проектирования), или зависимость которых в результате дополнительных исследований признана удовлетворяющей указанным требованиям (например, группа технологического оборудования с пневмоприводом с частью пневмосети на основе анализа результатов моделирования характеристики  $Q = f(P)$ ). Характеристика пневмоприемников этой группы полностью задается параметрами  $M_Q$  и  $\sigma_Q$  при некотором базовом давлении  $P_B$ .

Третья группа пневмоприемников – обобщенные потребители, которые не могут быть включены во вторую группу. Зависимость  $Q = f(P)$  для этой группы можно определить набором функций (или плотностей) распределения или выборок значений потребляемого количества сжатого воздуха при ряде значений его избыточного давления  $P$ .

Предложенные классификации показывают целесообразность представления модели технологического оборудования с пневмоприводом на  $t$ -м этапе отработки месторождения в виде графа

$$\Pi_t = (R_t, Z_t),$$

где  $R_t$  и  $Z_t$  – множество его вершин (возможные места включения технологического оборудования на этапе) и ребер.

Модель пневмоприемника в целом представляется в виде упорядоченного множества графов

$$\Pi = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_t, \dots, \Pi_T\}. \quad (2)$$

Модели каждого пневмоприемника (2) приписывается набор характеристик собственно пневмоприемника. Так, для технологического оборудования в качестве основных характеристик могут быть приняты: тип оборудования, число элементарных пневмомеханизмов, их марка.

Если технологическое оборудование является элементарным пневмомеханизмом, то возможен следующий список характеристик:

- марка;
- паспортный расход сжатого воздуха;

- паспортное (индикаторное) избыточное рабочее давление.

Модели каждого пневмоприемника на этапе  $\Pi_t$  приписывается набор характеристик, определяющий особенности его работы на этом этапе. Для технологического оборудования, например, такой набор включает вероятность работы и коэффициент утечек на этапе для каждого пневмомеханизма [3, 4].

Каждой вершине графа  $\Pi_t$  может быть поставлена в соответствие вероятность включения пневмоприемника в работу в данном узле  $\tau_{Bi}$ , причем для каждого пневмоприемника

$$\sum_{i=1}^{|R_t|} \tau_{Bi} \leq 1, \quad (3)$$

где  $|R_t|$  - число элементов множества  $R_t$ .

Модель комплекса технологического оборудования с пневмоприводом на  $t$ -м этапе отработки месторождения  $KПМ_t$  представляется в виде графа

$$KПМ_t = \{A_t, B_t\} = \bigcup_{i=1}^{N_t} \Pi_{ti}, \quad (4)$$

где  $A_t$  и  $B_t$  – множество вершин и ребер этого графа;  $N_t$  – число потребителей сжатого воздуха на  $t$ -м этапе отработки месторождения.

Каждой вершине графа  $KПМ_t$  может быть поставлен в соответствие список пневмоприемников, включение которых возможно в данном узле.

Отсюда следует, что

$$A_t = \bigcup_{i=1}^{N_t} R_{ti}, \quad (5)$$

$$B_t = \bigcup_{i=1}^{N_t} Z_{ti} = \emptyset. \quad (6)$$

Граф модели комплекса технологического оборудования с пневмоприводом на  $t$ -м этапе отработки месторождения  $KПМ_t$  является подмножеством объединения

$$KПМ_t \subseteq S'_t \cup G_t. \quad (7)$$

Полную модель комплекса технологического оборудования с пневмоприводом можно представить в виде упорядоченного множества графов и соответствующих им характеристик:

$$KПМ = \{KПМ_1, KПМ_2, KПМ_3, \dots, KПМ_t, \dots, KПМ_T\}. \quad (8)$$

Проведенная классификация и формализация исходной информации по потребителям сжатого воздуха может использоваться при разработке методов расчета воздухопроводов пневматического хозяйства подземного рудника. Это позволит автоматизировать систему научных исследований пневмоэнергокомплексов подземных рудников и шахт на основе предложенных принципов.

#### Список литературы

1. Кумыкова Т.М. Пути стабилизации и повышения давления воздуха в шахтной пневмосети. – Усть-Каменогорск: ВКПК Арго, 2010. – 84 с.
2. Мурзин В.А. Расчет пневматических сетей шахт / В.А. Мурзин, Ю.А. Цейтлин. – М.: Недра, 1971. – 104 с.
3. Горячев В.Н. Программа анализа разветвленных пневматических сетей / В.Н. Горячев, Л.Л. Моисеев // Вопросы горной механики. – 1975. – № 76. – Кемерово, 1975. – С. 191-216.
4. Рындин Э.Г. Критерии оптимизации схем рудничных пневмосетей / Э.Г. Рындин, В.В. Проходов, Г.Д. Лисовский и др. // Повышение технического уровня горного производства. – Усть-Каменогорск, 1988. – С. 162-168.



Получено 13.02.2015

УДК 621.791.927.5

**Ю.И. Лопухов, Р. Ғабдысалық**

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
г. Усть-Каменогорск

**ПОВЫШЕНИЕ ЭРОЗИОННЫХ СВОЙСТВ ДИСПЕРСИОННО- ТВЕРДЕЮЩЕЙ СТАЛИ  
В УСЛОВИЯХ НАПЛАВКИ MAG ДЛЯ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ АРМАТУРЫ**

Длительные тепловые нагрузки и вынужденные экстремальные условия запусков и остановок работы ТЭС требуют, чтобы материалы уплотнительных поверхностей деталей затворов арматуры удовлетворяли следующим требованиям [1]:

- эрозионной стойкостью от разрушения против щелевого и ударного потока среды и её показатели должны иметь не ниже значений эрозионной стойкости аустенитной стали типа 12X18H10T;

- высокой стойкостью против задирания поверхности контакта при возникновении в рабочих условиях удельных нагрузок не ниже 60-50 МПа, определяемых выбранными материалами, типоразмерами и конструктивными особенностями арматуры;

- твердостью уплотнительной поверхности 38-48 при 20 °С и 35-45 HRC при рабочих температурах;

- минимальным коэффициентом трения между уплотнительными элементами;

- стойкостью против межкристаллитной коррозии;

- высокими свойствами против «схватывания» при закрытом положении затвора в рабочих условиях;

- сохранением структурной стабильности в процессе длительной выдержки (не менее 10 000 ч.) при рабочих температурах;

- хорошими технологическими свойствами при механической обработке и шероховатостью уплотнительной поверхности не ниже Ra 0,16 мкм.

Одним из важнейших среди перечисленных требований для уплотнительных трущихся поверхностей теплоэнергетической арматуры является стойкость сплавов к эрозионному изнашиванию.

При нестандартных режимах работы во время пусков и остановок теплосилового оборудования элементы затворов арматуры испытывают действующие периодические перепады температуры (теплосмены), достигающие 250-350 °С. Для регулирующей арматуры игольчатого типа характерен износ в виде щелевой эрозии плунжера и седла, для шиберной арматуры - в виде эрозии и задирания поверхности шибера и седла, для поворотной - в виде ударной и щелевой эрозии золотников. Эрозионному износу подвергаются детали арматуры, осуществляющие дросселирование жидкости: плунжеры и седла дросселирующих и регулирующих клапанов.

Эрозионный износ образуется на сопрягаемых трущихся поверхностях деталей арматуры при кавитации воды и циклическом ударном воздействии воды и пара, а также в условиях их непрерывного ударного воздействия и в условиях щелевого потока рабочей среды. Особенно серьезные и массовые случаи эрозионных повреждений наблюдаются на оборудовании теплоэнергетических установок высокого и сверхвысокого давлений.

Одной из существенных причин эрозионного изнашивания является свойства конструкционных материалов деталей, испытывающих кавитационное воздействие среды. При кавитационном режиме движения в потоке быстро движущейся среды и соответствующих гидродинамических условиях образуются пузырьки (пустоты) в результате нарушения ее сплошности. Схлопываясь, они создают локальные гидравлические удары, которые, действуя на металлическую поверхность, разрушают её. Из наплавочных конструкционных материалов наибольшее распространение в теплоэнергетике в странах ТС получил сплав ЦН-6Л (тип наплавленного металла 10X17H7C6Г). Этот сплав технологичен и экономичен в сравнении со стеллитами и имеет малую склонность к растрескиванию в процессе наплавки при резких изменениях температуры в процессе эксплуатации. При длительных тепловых нагрузках в температурном режиме 450 – 550 °С и выше он термически упрочняется с повышением твердости [2]. Это свойство дисперсионно-твердеющего наплавленного металла самоупрочняться, с одной стороны, положительно влияет на задиростойкость при сухом трении для уплотнительных трущихся поверхностей теплоэнергетической арматуры [1]. Однако в условиях длительной высокотемпературной эксплуатации твердость переходит в хрупкость и металл растрескивается. Это связано с образованием сигма-фазы, располагающейся в основном по границам зерен, которая охрупчивает металл [3]. Особенно опасны ударные нагрузки, характерные для предохранительных клапанов импульсно-предохранительных устройств ТЭС. Замеры твердости такого растрескавшегося металла арматуры показывают, что её значение превышает 50 HRC. Это является критической опасной твердостью для такого сплава. Эрозионная стойкость металла, наплавленного электродами ЦН-6Л, относительно стали 12X18H10T составляет 0,9 [1].

Известно, что для механизации процесса наплавки электродами ЦН-6Л широко используется порошковая проволока ПП-АН133 в защитной среде аргона. При этом свойства наплавленного металла идентичны свойствам металла, наплавленного электродами ЦН-6Л [4].

Повышение стабильности  $\delta$ -феррита и подавление процесса образования  $\sigma$ -фазы может быть достигнуто подбором определенного соотношения феррито- и аустенизирующих элементов, входящих в состав сплава.

Так как азот является сильным аустенизирующим элементом, то большой научный и практический интерес представляет изучение влияния легирования наплавленного металла азотом непосредственно из газовой фазы на его структурные превращения.

При наплавке MAG порошковой проволокой ПП-АН133 азот использовали в составе смеси  $N_2 + CO_2$  как защитный газ и одновременно как легирующий элемент. Исследовались сплавы типа 10X17H8C5Г2Т, полученные многослойной наплавкой проволокой ПП-АН133 диаметром 2,6 мм в смеси газов  $N_2 + CO_2$  с различным содержанием азота и в среде аргона. Наплавку проводили в режиме: сварочный ток – 210 ... 240 А, напряжение дуги - 26 ... 27 В,  $VH = 17$  м/ч, расход защитной атмосферы - 10 ... 14 л/мин.

Методом рентгеноструктурного фазового анализа определено количество аустенита и феррита в наплавленном металле в различных защитных средах. Результаты этих исследований приведены в табл. 1.

Таблица 1

*Фазовый состав стали 10X17H8C5Г2Т в зависимости от состава  
защитной атмосферы при наплавке*

Защитная атмосфера, %	Количество, %	
	Аустенит	Феррит
100 Ar	33	67
100 CO <sub>2</sub>	39	61
70CO <sub>2</sub> + 30N <sub>2</sub>	48	52
50CO <sub>2</sub> + 50N <sub>2</sub>	55	45
70N <sub>2</sub> + 30CO <sub>2</sub>	72	28
N <sub>2</sub>	59	41

Из табл. 1 видно, что с увеличением азота в газовой смеси возрастает объемная доля аустенита и соответственно падает доля феррита.

Эффективным нитридообразующим элементом является титан, содержащийся в составе порошковых проволок в виде ферротитана. Наличие титана благоприятно сказывается не только на интенсификации процесса насыщения жидкого металла азотом, но и на формировании структур наплавленного слоя. Титан, соединяясь с азотом, образует нитриды и при кристаллизации металла наплавки выступает в роли эффективного модификатора. Образующие нитриды и карбонитриды титана (рис. 1) являются центрами кристаллизации и способствуют измельчению зерна.

Мелкодисперсные карбонитриды являются тугоплавкими и твердыми соединениями и равномерно распределены в аустенитной матрице. Это приводит к созданию упрочненного объемного каркаса по высоте наплавленного слоя.

Эффект карбонитридного упрочнения в исследуемом сплаве связан в основном с образованием нитридов и карбонитридов титана [4]. Титан обладает сильным сродством к азоту и в ходе кристаллизации металла приводит к образованию нитридов и карбонитридов. При этом установлено, что максимальное количество частиц и их дисперсность регистрируется в сплаве, полученном наплавкой, в защитных атмосферах 50 % N<sub>2</sub> + 50 % CO<sub>2</sub> и 70 % N<sub>2</sub> + 30 % CO<sub>2</sub> (рис. 2).

Для исследования эрозионной стойкости был выбран сплав 10X17H8C5Г2Т, полученный наплавкой в защитных газах Ar, CO<sub>2</sub> и смесях CO<sub>2</sub> + N<sub>2</sub>. Рабочей средой являлась вода с температурой 180 и 200 °С.

Исследование эрозионной стойкости материалов при воздействии на них щелевого потока среды проводили на цилиндрических образцах, установленных попарно в испытательных камерах (6) стенда, принципиальная схема которого показана на рис. 3. Рабочей средой являлась питательная вода (18 МПа, 210 °С) котлов промышленной ТЭЦ.

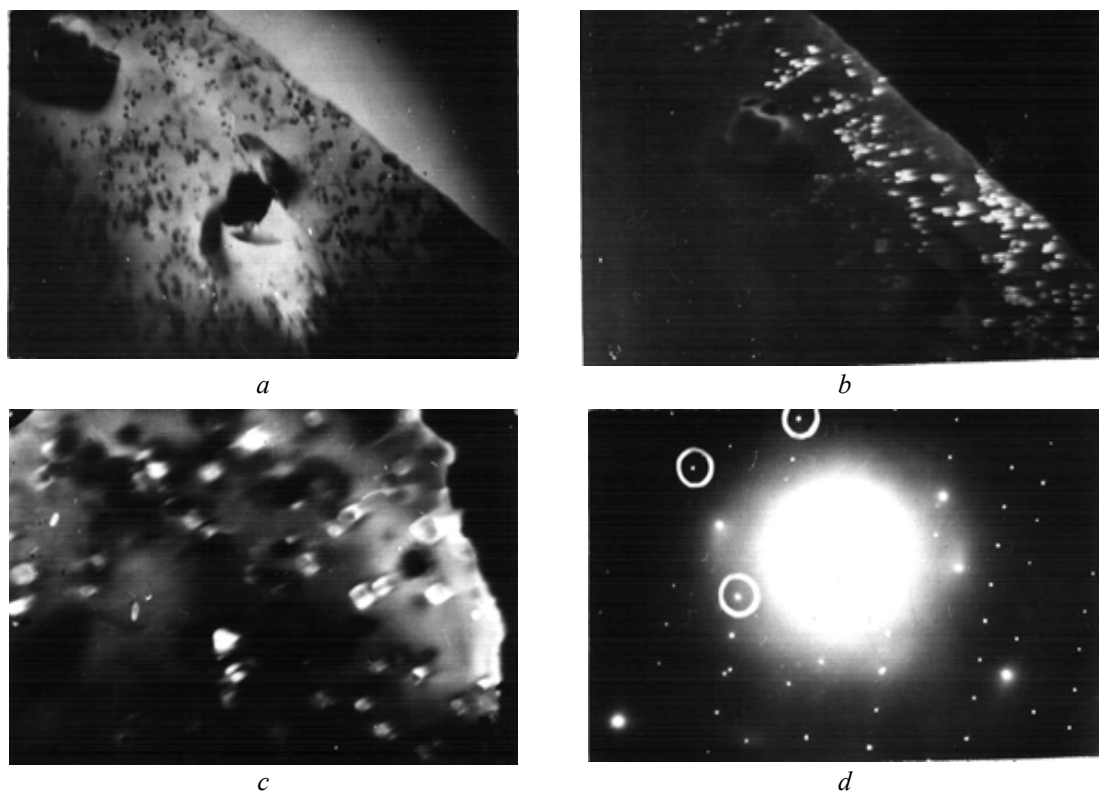


Рисунок 1 - Карбонитридные частицы в твердом растворе наплавленного металла 10X17H8C5Г2АТ (порошковая проволока ПП-АН133), азотсодержащая среда (70 %N<sub>2</sub> + 30 % CO<sub>2</sub>). Термообработка: ε 80 % – 1300 °С – вода – 700 °С – 1 час – охлаждение с печью: а) светлое поле х6000; б) темное поле в рефлексе (220) х6000; в) темное поле в рефлексе (220) х20000; д) микродифракционная картина C=50,6

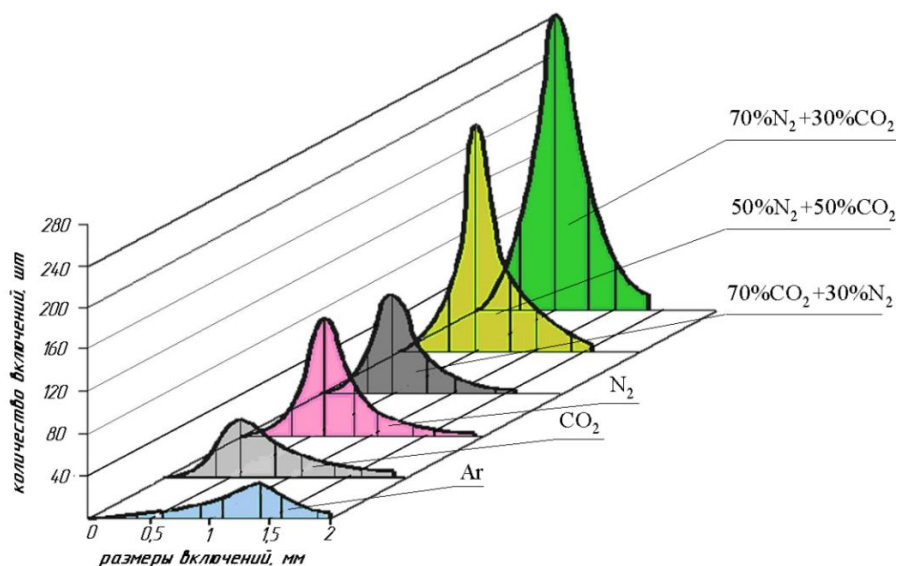


Рисунок 2 – Гистограммы распределения карбонитридных включений по размерам в наплавлен-

ном металле 10X17H8C5Г2Т в зависимости от защитной среды при наплавке MIG/MAG

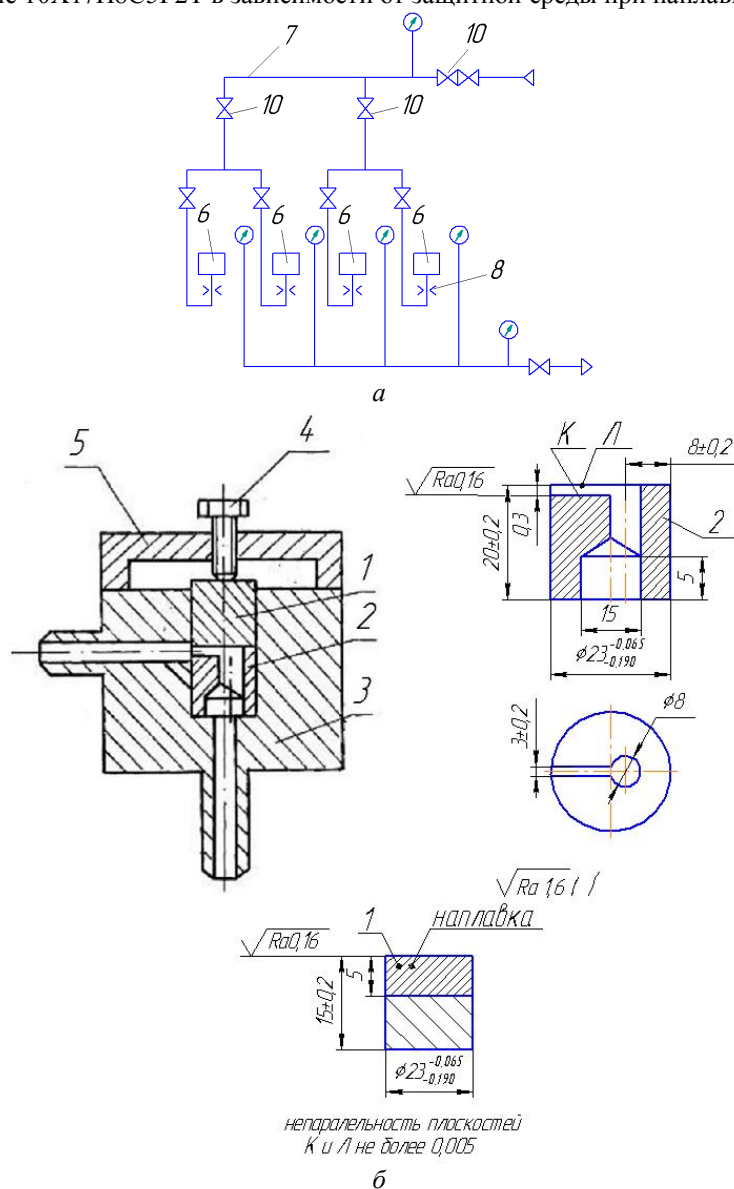


Рисунок 3 – Схема испытания материалов на щелевую эрозию: а) стенд для испытаний; б) рабочая камера стенда: 1 – исследуемый образец; 2 – образец из стали 12X18H10T; 3 – корпус; 4 – крышка; 5 – болт прижимной; 6 – камера с образцами; 7 – трубопровод рабочей среды; 8 – расходомерные приборы ДСР-1; 9, 10 – штатные вентили

Средняя скорость эрозии определялась как отношение средней глубины эрозионного разрушения ( $\bar{h}$ ) в единицу времени ( $\tau$ )  $i = \bar{h} / \tau$  мкм/ч.

Для сравнительной оценки стойкости против эрозии исследуемых наплавочных материалов при изменяющихся параметрах среды, одновременно с образцами из исследуемого материала, при каждом эксперименте устанавливали также в качестве исследуемого верхний образец из стали типа 12X18H10T, уровень эрозионной стойкости которой при-

нут за единицу.

Коэффициент относительной эрозионной стойкости  $K_h$  рассчитывали, как отношение численных значений скорости эрозии эталонного и исследуемого материалов. Итоговые показатели определяли, как среднее арифметическое из значений относительной эрозии испытанных пар образцов.

Поверхности испытательных образцов (для снятия продуктов коррозии) обрабатывали в 4 %-ном растворе соляной кислоты, ингибированной уротропином, и промывали спиртом.

Из приведенных результатов (табл. 2) следует, что все исследуемые варианты сплавов, полученных наплавкой проволокой ПП-АН133 в азоте и в азотсодержащих атмосферах, обладают высокой стойкостью против эрозионного износа.

Таблица 2

*Эрозионные свойства наплавленного металла*

Наплавочный материал	Защитный газ при наплавке	Параметры испытаний			Результаты испытаний		
		Давление, МПа	Т °С	Время испытаний, час	Глубина износа, мкм	Скорость износа, мкм/час	Коэффициент относительной эрозионной стойкости, $K_h$
ПП-АН133 тип 10X17H8C5Г2Т	Ar	17,0	200	254	15,95	0,064	1,03
		18,5	180	196	15,32	0,052	0,88
	CO <sub>2</sub>	17,0	200	254	14,05	0,055	1,20
		18,5	180	196	9,32	0,047	0,97
	50N <sub>2</sub> +50CO <sub>2</sub>	17,0	200	254	12,15	0,051	1,29
		18,5	180	196	7,21	0,033	1,39
	70CO <sub>2</sub> +30 N <sub>2</sub>	17,0	200	254	13,06	0,053	1,24
		18,5	180	196	7,52	0,035	1,31
	30CO <sub>2</sub> +70 N <sub>2</sub>	17,0	200	254	12,33	0,032	2,06
		18,5	180	196	6,15	0,051	1,40
Эталон 12X18H10Т		17,0	200	254	16,8	0,066	1,00
		18,5	180	196	8,7	0,046	1,00

Лучшими показателями эрозионной стойкости, в том числе в сравнении со сплавом, полученным наплавкой в аргоне, обладает металл наплавленный этой проволокой в защитной атмосфере 70 % N<sub>2</sub> + 30 % CO<sub>2</sub> и 50 % N<sub>2</sub> + 50 % CO<sub>2</sub>. Эти же варианты наплавки имеют сравнительно более высокий показатель горячей твердости при температуре испытаний – 350 °С [5].

Фазовый состав наплавленного металла существенно влияет на эрозионные свойства. С увеличением содержания азотистого аустенита возрастает эрозионная стойкость стали.

Повышение эрозионных свойств азотсодержащего наплавленного металла также связано с образованием мелкодисперсных твердых нитридов и карбонитридов с решеткой, когерентной решетке аустенита, и обеспечивает в ней их прочное зацепление.

Исследования показали, что с присутствием в наплавленном металле азотистого аустенита и мелкодисперсных нитридных и карбонитридных частиц с размерами 0,1...1,5 мкм возрастает эрозионная стойкость стали.

Итак, изучив общие закономерности влияния состава защитной азотсодержащей смеси на комплекс физико-механических и служебных свойств наплавленного металла типа 10X17H8C5Г2, установлено:

1. Легирование наплавленного металла азотом из защитной смеси состава 50...70 % N<sub>2</sub>

+ + 50...30 % CO<sub>2</sub> приводит к формированию более однородной структуры, повышению объемной доли аустенита, снижению склонности наплавленного металла к образованию сигма-фазы, увеличению прочностных в 1,2...1,3 раза и пластических свойств - в 1,8...2,0 раза.

2. Усреднённый коэффициент относительной эрозионной стойкости наплавленного металла типа 10X17H8C5Г2Т, легированного 0,14...0,16 % азотом превышает в 1,9 раза этот коэффициент в сплаве, наплавленного в аргоне.

#### Список литературы

1. Какузин В.Б. Характеристики материалов, применяемых для изготовления деталей арматуры // Арматуростроение. - 2004. - № 5. - С. 8-12.
2. Степин В.С. Применение дисперсно-твердеющих Cr-Ni-Si сталей для элементов затворов и наплавки уплотнительных поверхностей арматуры ТЭС и АЭС / В.С. Степин, Е.Г. Старченко, А.А. Андреев // Арматуростроение. - 2006. - № 3. - С. 66-68.
3. Лопухов Ю.И. Формирование структуры хромоникелькремнистой стали в условиях газозлектрической дуговой наплавки // Физическая инженерия поверхности. - 2009. - Т. 7. - № 1-2. - Суммы, 2009. - С. 27-30.
4. Лопухов Ю.И. Повышение эксплуатационных свойств трубопроводной арматуры дуговой наплавкой. - Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2002. - 136 с.
5. Лопухов Ю.И. Повышение технологичности и служебных свойств дисперсионно-твердеющих сталей в условиях наплавки МАГ для теплоэнергетической арматуры / Ю.И. Лопухов, Р. Габдысалик // Вестник ВКГТУ им. Д. Серикбаева. - 2014. - № 4. - Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2014.

Получено 28.05.2015

УДК 534-16

**А.А. Мясников**

Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР, г. Бишкек

#### ИМПУЛЬСЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ В ДЛИННЫХ ОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЯХ ПРОДОЛЬНЫМИ УДАРАМИ ПАУЭР-МОЛОТКОВ

В промышленности нашли широкое применение двухмассовые ударные системы технологического назначения. Молоток, представляющий собой короткий стержень переменного поперечного сечения, периодически наносит продольные удары по свободному торцу штанги. Инструмент на другом конце штанги, по форме близкой к длинному однородному стержню, соприкасается с обрабатываемым объектом. В результате продольного удара молотком в штанге формируется импульс продольной динамической деформации, который, пройдя штангу, приводит в движение инструмент.

Практика показывает, что эффективность технологического процесса в значительной степени зависит от параметров импульса. В свою очередь, параметры импульса определяются механическими свойствами материала, геометрическими характеристиками молотка и штанги, скоростью соударения. Есть основания предполагать, что для некоторых процессов рациональными будут импульсы, генерируемые короткими молотками со значительной вариацией площадей поперечных сечений.

Целью ставится аналитическое определение импульсов продольной динамической деформации, генерируемых в длинных полубесконечных однородных стержнях продоль-

ными ударами коротких стержней переменного поперечного сечения - молотков. Стержень принимается полубесконечным, чтобы исключить влияние последующих отражений импульса от его торцов. Расчетная схема ударной системы приведена на рис. 1.

Наиболее точно продольное динамическое деформирование коротких стержней переменного поперечного сечения моделируется ОРН (RSA) уравнением. Уравнение выведено из общих уравнений механики твердого деформируемого тела методом последовательного приближения без применения гипотезы плоских поперечных сечений. В качестве базового используется утверждение, что в нулевом приближении при продольном динамическом деформировании стержня отсутствуют радиальные напряжения.

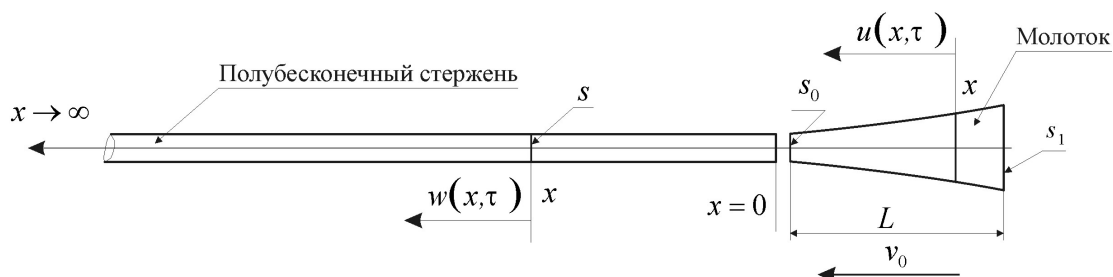


Рисунок 1 – Расчетная схема к задаче генерирования импульса продольной динамической деформации молотком, имеющим форму пауэра

Предполагается, что деформации линейные и не превышают предела упругости, детали ударной системы выполнены из одного однородного материала. В этом случае динамика продольной динамической деформации ударной системы определяется следующей системой ОРН (RSA) уравнений

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + (1 + \mu) \frac{d \ln(s(x))}{dx} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  - функции смещения поперечных сечений молотка и стержня с координатами  $x$  в момент времени  $\tau$ ;  $t = c_1 \tau$ ;  $c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 + \mu)}}$  - скорость перемещения

динамического продольного возмущения;  $E$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  - модуль упругости первого рода (модуль Юнга), плотность и коэффициент Пуассона материала деталей ударной системы;  $s(x)$  - площадь поперечного сечения молотка с координатой  $x$ .

Принимается, что ось координат поперечных сечений  $x$  совпадает с центральной осью ударной системы и направлена от ударного торца стержня к неударному с началом на ударном торце. Площадь поперечного сечения полубесконечного стержня  $s$ ; площадь ударного торца молотка  $s_0$ ; длина молотка  $L$ ; предударная скорость молотка  $v_0$ ; время  $\tau$  отсчитывается с момента начала взаимодействия.

Начальные условия:

- в начальный момент времени смещения сечений стержня и молотка принимаются



нулевыми:

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0;$$

- скорость стержня равна нулю, предупредная скорость молотка  $v_0$ :

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \frac{v_0}{c_1}.$$

Граничные условия:

- в процессе взаимодействия равны смещения и силы взаимодействия на ударных торцах стержня и молотка:  $u(0, t) = w(0, t)$ ,  $s \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = s_0 \frac{\partial w(0, t)}{\partial x}$ ;

- на неударных торцах стержня и молотка относительные деформации равны нулю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(-L, t)}{\partial x} = 0.$$

При современных методиках экспериментальных исследований импульс продольной динамической деформации определяется осциллограммами относительных деформаций. В данной задаче искомой также принимается функция относительной деформации штанги  $\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ . Анализ Эйлера уравнения (2) показывает, что в однородном

стержне постоянного поперечного сечения импульс распространяется без искажения, поэтому достаточно определить функцию относительной деформации на ударном торце

$$\varepsilon_0(t) = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Существует ограниченное число аналитических решений данной задачи. Как следствие, актуальным становится определение диапазона возможного варьирования параметров импульсов. Для этого предлагается определить импульсы, генерируемые в стержне бесконечно большим семейством пауэр-молотков. В узком смысле пауэр-молоток определяется как тело вращения, диаметр поперечного сечения которого есть линейная функция координаты данного сечения в некоторой произвольной степени  $\omega$ :

$$D(x) = D_0 (1 - qx)^\omega,$$

где:  $D(x)$  - диаметр поперечного сечения пауэра;  $D_0$ ,  $q$  - некоторые регулировочные параметры;  $\omega$  - показатель пауэра.

В принятой системе координат  $D_0$  соответствует диаметру ударного торца пауэра,  $q$  - коэффициент деформации канонической кривой  $x^\omega$ . Название «пауэр» - от английского термина «power», одно из значений которого - показатель степени переменной. Полубесконечный однородный стержень, таким образом, определяется как пауэр с показателем ноль. Отсутствие названий геометрии молотков для произвольного значения показателя  $\omega$  и вызвало необходимость введения определения пауэра.

Задача решается операционным исчислением на базе интегрального преобразования Лапласа с параметром  $p$  по переменной  $t$  [1].

В области изображений система уравнений, с учетом начальных условий, примет вид:

$$\frac{d^2 w(x, p)}{dx^2} - (1 + \mu) \omega \frac{2q}{1 - qx} \frac{dw(x, p)}{dx} - p^2 w(x, p) = -\frac{v_0}{c_1}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 u(x, p)}{dx^2} - p^2 u(x, p) = 0. \quad (4)$$

Последовательным введением: переменной  $z = i \frac{p}{q} (1 - qx)$ , где  $i = \sqrt{-1}$ ; параметра пауэра  $\zeta = (1 + \mu) \omega$ ; вспомогательной функции  $W(z, p)$ , определяемой соотношением  $w(z, p) = z^{\frac{1}{2} - \zeta} W(z, p)$ , уравнение (3) приводится в области изображений к неоднородному уравнению Бесселя:

$$z^2 \frac{d^2 W(z, p)}{dz^2} + z \frac{dW(z, p)}{dz} + \left[ z^2 - \left( \zeta - \frac{1}{2} \right)^2 \right] W(z, p) = \frac{v_0}{c_1 p^2} z^{\frac{3}{2} + \zeta}.$$

Изображение функции смещения сечений молотка определится формулой:

$$w(z, p) = C_1 z^{-\zeta + \frac{1}{2}} J_{\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)}(z) + C_2 z^{-\zeta + \frac{1}{2}} J_{-\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)}(z) + \frac{v_0}{c_1 p^2},$$

где  $C_1, C_2$  - неопределенные коэффициенты;  $J_\nu(z)$  - функция Бесселя аргумента  $z$  индекса  $\nu$ .

Решение уравнения (4):  $u(x, p) = C_3 \exp(xp) + C_4 \exp(-xp)$ ,

где  $C_3, C_4$  - некоторые константы интегрирования.

С учетом граничного условия  $\frac{dw(-L, p)}{dx} = 0$  изображение функции смещения ударного торца пауэра определится формулой

$$w(0, p) = (iap)^{-\zeta + \frac{1}{2}} \frac{C_1}{J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(ihp)} \times \\ \times \left[ J_{\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)}(iap) J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(ihp) + J_{-\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)}(iap) J_{\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(ihp) \right] + \frac{v_0}{c_1 p^2},$$

функции относительной деформации:

$$\varepsilon_w(0, p) = \frac{dw(0, p)}{dx} = -ip (iap)^{-\zeta + \frac{1}{2}} \frac{C_1}{J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(ihp)} \times \\ \times \left[ -J_{\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(iap) J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(ihp) + J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(iap) J_{\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(ihp) \right],$$

где  $a = \frac{L}{\zeta - 1}$ ;  $h = \frac{\zeta L}{\zeta - 1}$ ;  $\zeta = \kappa^{\frac{1}{\omega}}$ ;  $\kappa = \frac{D_1}{D_0}$ ;  $D_1$  - диаметр неударного торца.

С учетом граничного условия  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{du(x, p)}{dx} = 0$  и изображения искомой функции от носительной деформации на ударном торце стержня  $\varepsilon_0(p)$  изображение функции смещения ударного торца определится формулой

$$u_0(p) = C_4 = -\frac{\varepsilon_0(p)}{p}.$$

Граничные условия:  $u(0, p) = w(0, p)$  и  $s \frac{\partial u(0, p)}{\partial x} = s_0 \frac{\partial w(0, p)}{\partial x}$ , позволяют исключить постоянную интегрирования  $C_1$  и получить уравнение в изображениях относительно  $\varepsilon_0(p)$ :

$$\frac{-\varepsilon_0(p) - \frac{v}{p}}{b \varepsilon_0(p)} = i \frac{J_{\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)}(i a p) J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(i h p) + J_{-\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)}(i a p) J_{\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(i h p)}{-J_{\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(i a p) J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(i h p) + J_{-\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(i a p) J_{\left(\zeta + \frac{1}{2}\right)}(i h p)}, \quad (5)$$

где  $v = \frac{v_0}{c_1}$ ;  $b = \frac{s}{s_0}$ .

Неизвестна общая методика аналитического преобразования полученного изображения к оригиналу, вследствие наличия функций Бесселя произвольного индекса в правой части. Исключением является случай, когда значения индекса полуцелые, тогда функции Бесселя могут быть выражены через трансцендентные функции по формулам

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{(-1)^n (2z)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^n}{(dz^2)^n} \left( \frac{\sin(z)}{z} \right),$$
$$J_{-n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{(-1)^n (2z)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^n}{(dz^2)^n} \left( \frac{\cos(z)}{z} \right).$$

Учитывая, что аргументы функций Бесселя в (5) мнимые, можно сделать вывод, что при целых значениях параметра пауэра  $\zeta = (1 + \mu)\omega$  уравнение в области изображений может быть представлено в виде:

$$\frac{-\varepsilon_0(p) - \frac{v}{p}}{b \varepsilon_0(p)} = \frac{B_+(\zeta, p) + B_-(\zeta, p) \exp(-2Lp)}{M_+(\zeta, p) - M_-(\zeta, p) \exp(-2Lp)},$$

где  $B_+(\zeta, p)$ ,  $B_-(\zeta, p)$ ,  $M_+(\zeta, p)$ ,  $M_-(\zeta, p)$  - некоторые полиномы относительно параметра интегрального преобразования Лапласа  $p$ .

Изображение искомой функции, следовательно, может быть представлено в виде:

$$\varepsilon_0(p) = -\frac{v}{p} \frac{M_+(p) - M_-(p) \exp(-2Lp)}{[M_+(p) + bB_+(p)] \left[ 1 - \frac{M_-(p) - bB_-(p)}{M_+(p) + bB_+(p)} \exp(-2Lp) \right]},$$

или, на основании формулы разложения, в степенной ряд  $\frac{1}{1-Z} = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k$ :

$$\varepsilon_0(p) = -\frac{v}{2} \frac{2M_+(p)}{p[M_+(p) + bB_+(p)]} - \frac{v-2b}{2} \frac{b}{p} [M_+(p)B_-(p) + M_-(p)B_+(p)] \times \\ \times \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{[M_-(p) - bB_-(p)]^{n-2}}{[M_+(p) + bB_+(p)]^n} \exp(-2L(n+1)p) \right].$$

Таким образом, изображение функции относительной деформации на ударном торце стержня определяется бесконечным рядом рациональных функций, умноженных на экспоненту с аргументом, кратным двойной длине молотка. Каждый член ряда определяет функцию волны с порядковым номером  $n$ .

В теории операционного исчисления существует теорема [1], что оригиналами рациональных в области изображений функций являются конечные ряды произведений полиномов, экспоненциальной функции, синуса или косинуса действительного аргумента,  $t$ . По теореме запаздывания операционного исчисления [1] умножение функции изображения на экспоненту соответствует «запаздыванию» аргумента оригинала  $t$  на величину коэффициента при  $p$  в аргументе экспоненты. Следовательно, оригинал искомой функции будет иметь структуру:

$$\varepsilon_0(t) = f_1(t) \cdot \bar{\eta}(t) + f_2(t-2L) \cdot \bar{\eta}(t-2L) + f_3(t-4L) \cdot \bar{\eta}(t-4L) + \\ + \sum_{n=4}^{\infty} f_n(t-2L(n-1)) \cdot \bar{\eta}(t-2L(n-1)),$$

где  $f_n(t)$  - функция волны  $n$  импульса;  $\bar{\eta}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$  - единичная функция Хевисайда, определяющая, с какого значения аргумента необходимо припасовывать к решению данную функцию.

В случае нулевого значения параметра пауэра,  $\zeta = 0$ , при любом значении коэффициента Пуассона  $\mu$ , показатель пауэра  $\omega$  тоже равен нулю ( $\omega = 0$ ), т.е. боковая поверхность пауэра вырождается в прямой цилиндр:  $D(x) = D_0$ . В этом случае уравнение в изображениях (5) преобразуется к виду:

$$\frac{-\varepsilon_0(p) - \frac{v}{p}}{b\varepsilon_0(p)} = \frac{1 + \exp(-2Lp)}{1 - \exp(-2Lp)},$$

$$\varepsilon_0(p) = \frac{-v}{2} \left[ \frac{2}{(1+b)} \frac{1}{p} + \frac{-2^2 b}{(1+b)^2} \frac{1}{p} \exp(-2Lp) + \right. \\ \left. + \frac{-2^2 b(1-b)}{(1+b)^3} \frac{1}{p} \exp(-4Lp) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{-2^2 b(1-b)^{n-2}}{(1+b)^n} \frac{1}{p} \exp(2L(n-1)p) \right].$$

На основании соотношения:  $\frac{c}{p} \div c$ ,  $\operatorname{Re} p > 0$ ,  $c = \text{const}$  оригинал функции относительной деформации на ударном торце стержня при динамическом деформировании продольным ударом пауэра с параметром ноль, цилиндром, определится формулой

$$\varepsilon_0(t) = \frac{-v}{2} \left[ \frac{2}{(1+b)} \cdot \bar{\eta}(t) + \frac{-2^2 b}{(1+b)^2} \cdot \bar{\eta}(t-2L) + \right. \\ \left. + \frac{-2^2 b(1-b)}{(1+b)^3} \cdot \bar{\eta}(t-4L) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{-2^2 b(1-b)^{n-2}}{(1+b)^n} \cdot \bar{\eta}(t-2L(n-1)) \right].$$

Для сравнительного анализа результатов рационально ввести понятие функции формы импульса, линейно связанной с функцией относительной деформации:

$$e_0(\bar{\tau}) = \frac{-2\varepsilon_0(\bar{\tau})}{v}, \text{ где } \bar{\tau} = \frac{t}{L}.$$

Для данной задачи функция формы импульса определится формулой

$$e_0(\bar{\tau}) = \frac{2}{(1+b)} \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}) + \frac{-2^2 b}{(1+b)^2} \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-2) + \\ + \frac{-2^2 b(1-b)}{(1+b)^3} \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-4) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{-2^2 b(1-b)^{n-2}}{(1+b)^n} \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-2(n-1)).$$

В случае равенства площадей ударных торцов,  $b=1$ , функция формы импульса определяется формулой:  $\bar{e}_0(\bar{\tau}) = 1 \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau})$   $2 > \bar{\tau} > 0$  и графически представляет собой единственный прямоугольник длиной 2 (рис. 2).



Рисунок 2 – Функция формы импульса, генерируемого пауэром с параметром  $\xi = 0$  при  $b=1$

Функции первых шести волн импульсов, в случае неравенства поперечных сечений

пауэра и стержня, изображены на рис. 3.

Максимальное значение функции первой волны  $f_1(t) = \frac{2}{1+b}$ , при положительных значениях  $b$ , имеет место при  $b$  стремящимся к нулю, то есть максимальное значение  $\max f_1(\bar{\tau}) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2}{1+b} = 2$  достигается при бесконечно большом диаметре молотка.

При коэффициенте Пуассона  $\mu = 0$  параметр пауэра  $\zeta = -1$  совпадает с показателем пауэра  $\omega$  ( $\omega = \zeta = -1$ ). В этом случае пауэр вырождается в гиперboloид вращения. Все показатели семейства пауэров, для которых пригодно данное решение, определяются формулой:  $\omega = \frac{-1}{1+\mu}$ . Геометрия данного семейства пауэров определяется через функ-

цию диаметров сечений формулой  $D(x) = D_0 (1 - q x)^{\frac{-1}{1+\mu}}$ ,  $\zeta = \kappa^{-(1+\mu)}$ ,  $q = \frac{\kappa^{-(1+\mu)} - 1}{L}$ .

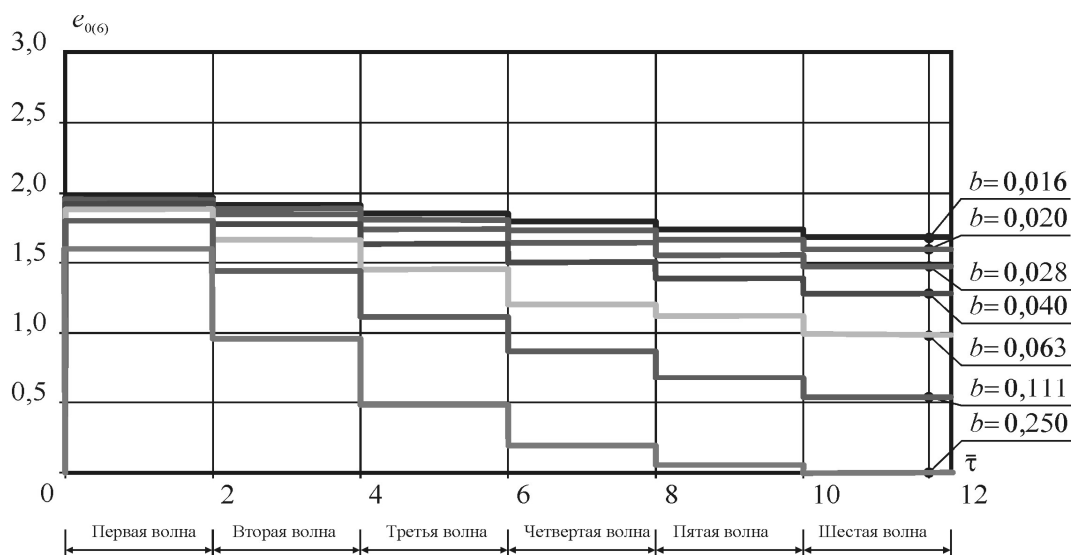


Рисунок 3 – Функция формы первых шести волн импульса, генерируемых пауэром с параметром  $\xi = 0$

Уравнение в изображениях (5) для данного случая принимает вид:

$$\frac{-\varepsilon_0(p) - \frac{v}{p}}{b \varepsilon_0(p)} = \frac{\left(p + \frac{1}{a}\right) + \left(p - \frac{1}{a}\right) \exp(-2 L p)}{p [1 - \exp(-2 L p)]}, \text{ где } a = \frac{L}{\zeta - 1}.$$

Изображение функции относительной деформации определится формулой

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(p) \frac{-2}{v} &= \frac{2}{(1+b)} \frac{1}{p + \frac{b}{(1+b)}q} + \frac{-2^2 b}{(1+b)^2} \frac{p}{\left(p + \frac{b}{(1+b)}q\right)^2} \exp(-2Lp) + \\ &+ \frac{-2^2 b}{(1+b)^3} \frac{(1-b)p^2 + bq p}{\left(p + \frac{b}{(1+b)}q\right)^3} \exp(-4Lp) + \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{-2^2 b}{(1+b)^n} \frac{p[(1-b)p + bq]^{n-2}}{\left(p + \frac{b}{(1+b)}q\right)^n} \exp(-2L(n-1)p).\end{aligned}$$

Оригинал функции формы импульса соответственно принимает вид:

$$\begin{aligned}e_0(\bar{\tau}) &= \frac{2}{(1+b)} \exp\left(-\frac{b}{(1+b)}(\varsigma-1)\bar{\tau}\right) + \frac{-2^2 b}{(1+b)^2} \times \\ &\times \left[-\frac{b}{(1+b)}(\varsigma-1)(\bar{\tau}-2)+1\right] \exp\left(-\frac{b}{(1+b)}(\varsigma-1)(\bar{\tau}-2)\right) \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-2) + \\ &+ \left\{\left[\frac{2^2 b^4}{(1+b)^5}(\varsigma-1)^2(\bar{\tau}-4)^2 + \frac{-2^2 b^2(3b-1)}{(1+b)^4}(\varsigma-1)(\bar{\tau}-4) + (1-b)\right] \times \right. \\ &\quad \times \exp\left(\frac{-b}{(1+b)}(\varsigma-1)(\bar{\tau}-4)\right)\left.\right\} \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-4) + \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty} \left\{\frac{-2^2 b(1-b)^{n-2}}{(1+b)^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (n-1)!}{(n-1-k)! j! (k-j)!} \frac{b^k}{(1-b)^{k-j} (1+b)^j}\right] \times \right. \right. \\ &\quad \times \frac{1}{k!} (\varsigma-1)^k (\bar{\tau}-2(n-1))^k - \frac{b}{1-b} (\varsigma-1)(\bar{\tau}-2(n-1))\left.\right] \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{b}{(1+b)}(\varsigma-1)(\bar{\tau}-2(n-1))\right)\left.\right\} \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-2(n-1)).\end{aligned}$$

В случае равенства площадей ударных торцов молотка и стержня,  $b=1$ , функция формы импульса, генерируемого пауэром с параметром -1, определится формулой

$$\begin{aligned}\bar{e}_0(\bar{\tau}) &= \exp\left(-\frac{(\varsigma-1)}{2}\bar{\tau}\right) + \\ &+ \left[\frac{(\varsigma-1)}{2}(\bar{\tau}-2)-1\right] \exp\left(-\frac{(\varsigma-1)}{2}(\bar{\tau}-2)\right) \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-2) + \\ &+ \left[\frac{(\varsigma-1)^2}{2^3}(\bar{\tau}-4)^2 - \frac{(\varsigma-1)}{2}(\bar{\tau}-4)\right] \exp\left(-\frac{(\varsigma-1)}{2}(\bar{\tau}-4)\right) \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-4) + \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty} \left\{\frac{(\varsigma-1)^{n-2}}{2^{n-2} (n-2)!} \left[\frac{2(\varsigma-1)}{(n-1)}(\bar{\tau}-2(n-1))-1\right] (\bar{\tau}-2(n-1))^{n-2} \times \right.\end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{(\zeta-1)}{2}(\bar{\tau}-2(n-1))\right) \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}-2(n-1))\}.$$

Графическое представление функции формы первых трех волн импульса при нулевом значении коэффициента Пуассона дано на рис. 4.

Функция первой волны,  $\hat{f}_1(\bar{\tau}) = \exp\left(-\frac{(\zeta-1)}{2}\bar{\tau}\right)$  имеет наибольшее значение при максимальном значении аргумента,  $\bar{\tau} = 2$ , т.е. всегда на заднем фронте волны.

Когда молоток имеет переменную площадь поперечного сечения, функции формы импульсов существенно зависят от значения коэффициента Пуассона. При нулевом значении все модели показывают абсолютно одинаковые результаты.

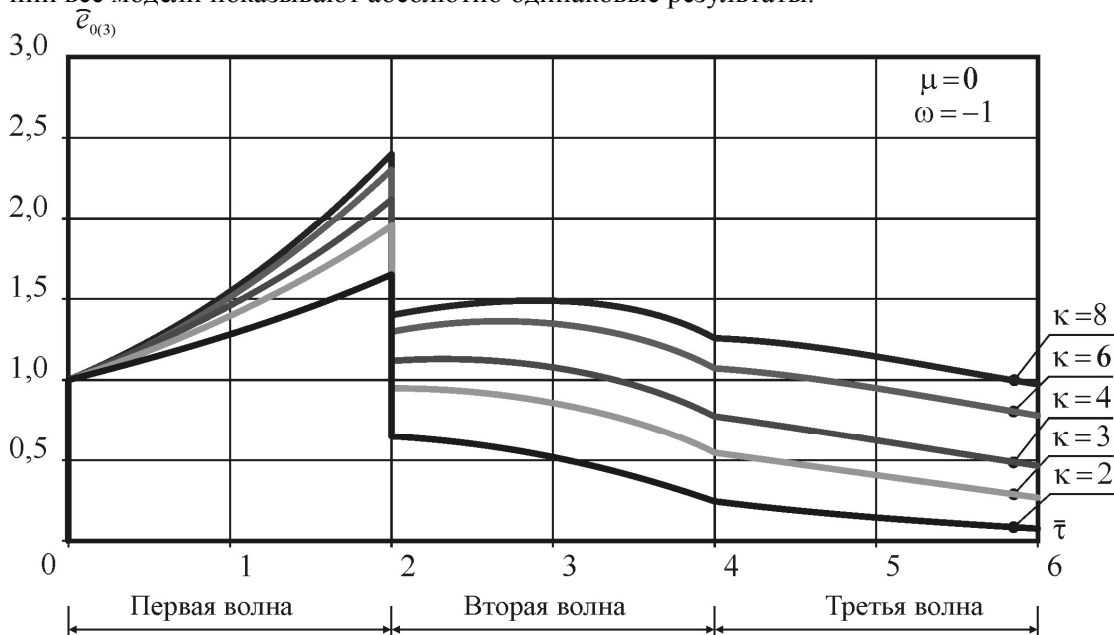


Рисунок 4 – Функция формы первых трех волн импульса, генерируемых пауэром с параметром  $\xi = -1$

Важным является результат, что максимальное значение функции первой волны, генерируемой пауэрами с параметром  $\zeta = -1$ , равно  $e \cong 2,72$ , то есть больше максимального значения функции формы импульса, генерируемого абсолютно жестким телом, равного 2.

#### Список литературы

1. Мясников А.А. Обратные преобразования Лапласа рациональных функций. – Бишкек: «Илим» (Наука), 2014. – 265 с.

Получено 20.05.2015



**А.А. Мясников**

Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР, г. Бишкек

**О МОДЕЛЯХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ**

При проектировании и эксплуатации различных технических систем требуется учитывать и оптимизировать различного рода колебательные процессы. Поведение большого класса технических систем, включая ударные системы технологического назначения, достаточно точно описываются моделями продольного динамического деформирования неоднородных стержней.

Актуальным представляется анализ логики построения моделей продольного динамического деформирования и продольных колебаний стержней с целью создания алгоритмов построения более точных моделей.

Самой простой является модель, предполагающая, что стержень достаточно точно может быть представлен объектом, близким к одномерной материальной линии. В качестве основного используется второй закон Ньютона,  $F = d m a$ , записанный для вырезанного двумя поперечными сечениями с координатами  $x + dx$  и  $x$  элемента бесконечно малой длины  $dx$ , с массой  $dm$  (рис. 1).

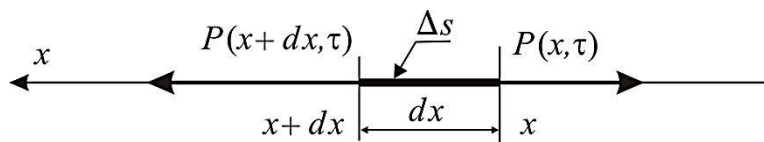


Рисунок 1 – Расчетная схема к модели продольных колебаний одномерной материальной линии

Равнодействующая сил  $F$  определяется силами, эквивалентными действию отброшенных частей  $F = P(x + dx, \tau) - P(x, \tau)$  вдоль оси стержня  $x$ . С целью сохранения общей логики изложения принимается, что стержень имеет бесконечно малую площадь поперечного сечения  $\Delta s$ . Масса вырезанного элемента  $dm = \rho \Delta s dx$ , где  $\rho$  - плотность материала. Если определить смещение поперечного сечения с координатой  $x$  в момент времени  $\tau$  функцией  $u(x, \tau)$ , тогда ускорение выделенного элемента определится формулой  $a = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2}$ .

Приведенные соотношения определяют уравнение

$$P(x + dx, \tau) - P(x, \tau) = \rho \Delta s dx \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} \text{ или } \frac{\partial P(x, \tau)}{\partial x} = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2}.$$

Пусть силы действия отброшенных частей вызваны линейными упругими деформациями, тогда на основании неполного закона Гука имеет место соотношение  $\sigma(x, \tau) = E \varepsilon(x, \tau)$ , где  $E$  - модуль упругости первого рода материала стержня. Напряжение  $\sigma(x, \tau)$  и продольная относительная деформация  $\varepsilon(x, \tau)$  в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $\tau$  определяются соответственно формулами:

$$\sigma(x, \tau) = \frac{P(x, \tau)}{\Delta s}, \quad \varepsilon(x, \tau) = \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}.$$

В результате уравнение продольных колебаний стержня принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta s \sigma(x, \tau) \right) = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

Пусть  $E = \text{const}$ , тогда уравнение может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{c^2 \partial \tau^2}, \quad \text{где } c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2)$$

Уравнение (2) предполагает линейную связь между напряжениями и деформациями, однородность материала. Если материал неоднороден и деформации нелинейно связаны с напряжениями, то основным будет уравнение

$$\frac{\partial \sigma(x, \tau)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2}. \quad (3)$$

Наибольшее распространение получила модель по гипотезе плоских сечений: сечения остаются плоскими в процессе продольного динамического деформирования прямых стержней. Почти все исследования продольных колебаний стержней переменного поперечного сечения основываются на этой модели.

Следствие гипотезы: все точки поперечного сечения прямого стержня при продольном динамическом деформировании должны иметь одинаковые смещения и скорости. Это возможно при однородности материала стержня по сечению, равенстве напряжений и относительных деформаций в окрестности сечения.

Уравнение по гипотезе плоских сечений может быть получено из первого уравнения (1) заменой бесконечно малой площади поперечного сечения материальной линии  $\Delta s$  площадью поперечного сечения  $s(x)$  стержня функции координаты сечения (рис. 2):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( s(x) \sigma(x, \tau) \right) = \rho s(x) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2}. \quad (4)$$

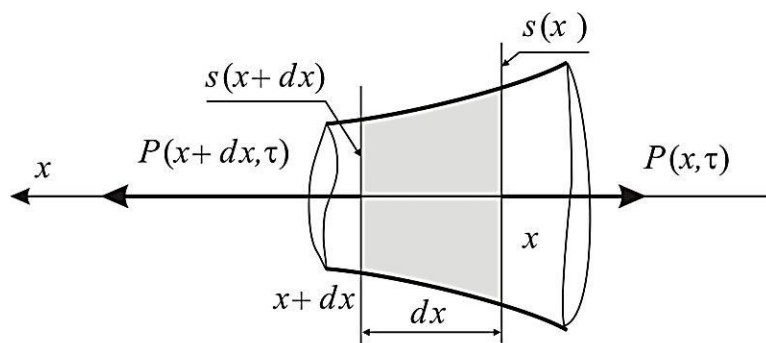


Рисунок 2 – Расчетная схема к модели продольных колебаний по гипотезе плоских сечений

Если продольные деформации линейно упругие  $\sigma(x, \tau) = E \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}$ , то уравнение

(4) переписывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E s(x) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) - \rho s(x) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} = 0. \quad (5)$$

Данное уравнение может быть использовано для модели продольной динамической деформации стержней, имеющих физическую неоднородность по длине, но не по сечению. Если материал всего стержня переменного поперечного сечения однороден по физическим свойствам, то уравнение продольной динамической деформации принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{d \ln(s(x))}{dx} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{c^2 \partial \tau^2} = 0. \quad (6)$$

Если стержень имеет форму прямого цилиндра, то уравнение совпадает с уравнением продольных колебаний однородной материальной линии (2).

Точность модели по гипотезе плоских сечений почти с самого начала ее применения вызывала сомнения. В частности, были сделаны попытки скорректировать модель различными поправками, при сохранении гипотезы плоских сечений. Наибольшее распространение получили поправки Рэлея [1, 2] и Рэлея-Бишопа [3].

В частности, поправкой Рэлея учитывается кинетическая энергия радиального движения частиц стержня при продольном динамическом деформировании. Фактически поправка основана на второй части полного закона Гука для одномерного статического деформирования: для изотропного материала, в пределах упругих деформаций, отношение радиальной относительной деформации  $\varepsilon_r$  к продольной  $\varepsilon_x$  является величиной постоянной и называется коэффициентом Пуассона  $\mu$  (для большинства сталей  $\mu = 0,3$ )

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_x} = -\mu.$$

При сохранении гипотезы плоских сечений и метода сечения модель с поправкой Рэлея обычно строится на вариационном принципе Гамильтона-Остроградского: действительное движение системы с голономными связями отличается от иных кинематически возможных движений тем, что для него вариация действия по Гамильтону-

Остроградскому  $W = \int_{\tau_0}^{\tau} L d\tau$ , определенного для произвольного промежутка времени,

равна нулю  $\delta \int_{\tau_0}^{\tau} L d\tau = 0$ ,  $L = T - \Pi$  - функция Лагранжа, определяемая разностью ки-

нетической  $T$  и потенциальной  $\Pi$  энергий системы.

С учетом поправки Рэлея кинетическая энергия выделенного двумя поперечными сечениями элемента стержня конечной длины  $l$ , складывается из кинетических энергий частиц стержня в осевом  $T_x$  и радиальном  $T_r$  направлениях. Потенциальная энергия определяется энергией продольной динамической деформации  $\Pi_x$ . Таким образом, функ-

ция Лагранжа определится выражением  $L = T_x + T_r - \Pi_x$ , и основой построения модели

служит вариационное соотношение:  $\delta \int_{\tau_0}^{\tau} (T_x + T_r - \Pi_x) d\tau = 0$ .

Кинетические энергии вырезанного участка стержня конечной длины  $l$  в радиальном и осевом направлениях определяются интегралами:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_{(l)} \rho \mu^2 \left( \int_{(s(x))} r^2 ds \right) \left( \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right)^2 dx, \quad T_x = \frac{1}{2} \int_{(l)} \rho s(x) \left( \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 dx.$$

Интеграл  $J_\rho(x) = \int_{(s(x))} r^2 ds$  представляет собой полярный момент инерции попереч-

ного сечения. Потенциальная энергия выделенного элемента стержня определится инте-

$$\text{гралом } \Pi_x = \frac{1}{2} \int_{(l)} E s(x) \left( \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 dx.$$

С учетом полученных формул принцип Гамильтона-Остроградского и поправка Рэлея определяют модель вариационным соотношением:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{(l)} \frac{1}{2} \left[ \rho s(x) \left( \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 + \rho \mu^2 J_\rho(x) \left( \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right)^2 - \right. \\ \left. - E s(x) \left( \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau = 0. \quad (7)$$

Соответственно уравнение продольной динамической деформации стержня переменного поперечного сечения принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E s(x) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) - \rho s(x) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} + \rho \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( J_\rho(p) \frac{\partial^3 u(x, \tau)}{\partial x \partial \tau^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Поправка Рэлея, по отношению к уравнению продольных колебаний по гипотезе плоских сечений (6), добавляет член линейно связанный с производной четвертого порядка

$$+ \rho \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( J_\rho(p) \frac{\partial^3 u(x, \tau)}{\partial x \partial \tau^2} \right). \text{ Данная поправка учитывает, в некоторой степени,}$$

геометрию поперечного сечения стержня через функцию полярного момента инерции  $J_\rho(p)$ . При нулевом коэффициенте Пуассона поправка Рэлея сводится к нулю.

Теория механики твердого деформируемого тела строится на динамике элементарного объема тела, определяемого более сложной системой уравнений, чем по гипотезе плоских сечений. В декартовой системе координат элементарным объемом служит бесконечно малый параллелепипед с длинами ребер  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  в окрестности точки с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 3). Для случая упругих линейных деформаций и анизотропного материала тела система уравнений динамики твердого деформируемого тела после исключения компонент относительной деформации принимает вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)],$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad (9)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{(s(x))} \sigma_x ds_x + \int_{(s(x))} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} ds_x + \int_{(s(x))} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} ds_x - \int_{(s(x))} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} ds_x = 0, \quad (12)$$

где  $\sigma_k$  - напряжение по направлению нормали  $k$  к грани;  $\tau_{jk}$  - касательное напряжение по направлению  $j$  на грани с нормалью  $k$ ;  $u_k$  - смещение точки по направлению  $k$ ;  $G$  - модуль сдвига, или модуль упругости второго рода.

В систему не включены уравнения неразрывности сплошной среды, поскольку модель строится в перемещениях.

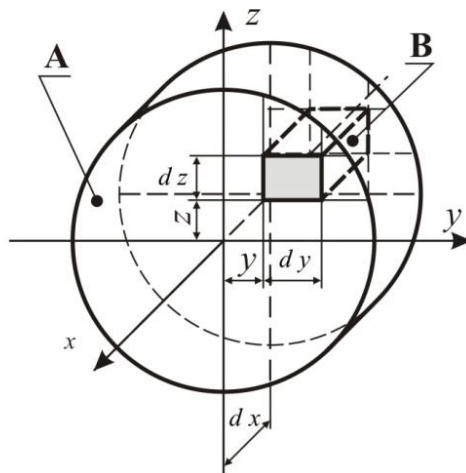


Рисунок 3 – Расчетная схема к модели продольной динамической деформации стержней без гипотезы плоских сечений

В случае неоднородности механических характеристик материала любого рода эти уравнения соответственно корректируются. Поскольку алгоритм построения модели предполагает операции дифференцирования и интегрирования, то построить уравнение для общего случая анизотропии и неоднородности, естественно, не представляется возможным.

Последнее уравнение системы (12) получается интегрированием уравнения динамики

элементарного объема  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2}$  вдоль центральной оси стержня

оси  $x$  по объему, ограниченному боковой поверхностью стержня и двумя поперечными

сечениями с координатами  $x$  и  $x + dx$  (рис. 3).

В основу алгоритма положен метод последовательного приближения с базовым утверждением, что при продольном динамическом деформировании стержней в нулевом приближении составляющие радиального напряжения могут быть приняты равными нулю:  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ . При статической продольной деформации стержня это утверждение верно безусловно, что следует из полной формулировки закона Гука. При динамическом продольном деформировании может быть принято только как нулевое приближение.

При принятом базовом утверждении, что в нулевом приближении компоненты радиального напряжения можно принять равными нулю:  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = 0$ , из уравнений (9)

следуют формулы:  $u_y = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} y$ ,  $u_z = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} z$ , с учетом которых касательные на-

пряжения из уравнений (10) определяются соотношениями:

$$\tau_{xy} = -\mu G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} y, \tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = -\mu G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} z.$$

Подстановка полученных соотношений в первое из уравнений (11) определяет формулу компоненты радиального напряжения с точностью до константы интегрирования  $C_1$

$\sigma_y = \mu \left( G \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial \tau^2} \right) \frac{y^2}{2} + C_1$ . Пусть на внешнем контуре сечения отсутствуют внешние силы, тогда  $\sigma_y(x, y_*) = 0$ , где  $y_*$  - координата точки на внешнем контуре сечения:

$$C_1 = -\mu \left( G \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial \tau^2} \right) \frac{y_*^2}{2}, \sigma_y = \mu \left( G \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial \tau^2} \right) \frac{y^2 - y_*^2}{2}.$$

В силу симметрии уравнений относительно координат  $y$ ,  $z$  имеет место формула

$\sigma_z = \mu \left( G \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial \tau^2} \right) \frac{z^2 - z_*^2}{2}$ , где  $z_*$  - координата точки на внешнем контуре сечения.

Формулы уточняют, что при динамическом продольном деформировании стержня возникают радиальные напряжения, отличные от нуля, не учитываемые по гипотезе плоских сечений. Подстановка их в первое из уравнений (9) определяет формулу нормального напряжения в направлении оси стержня:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu^2 \left( G \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial \tau^2} \right) \frac{(y^2 - y_*^2) + (z^2 - z_*^2)}{2}.$$

Подстановка соответствующих формул в последнее неиспользованное соотношение (12) определяет уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_x}{\partial x} \int_{(s(x))} ds_x \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mu^2}{2} \left( G \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial \tau^2} \right) \int_{(s(x))} [(y^2 + z^2) - (y_*^2 + z_*^2)] ds_x \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\mu G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} y \right) \int_{(s(x))} ds_x + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\mu G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} z \right) \int_{(s(x))} ds_x - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} \int_{(s(x))} ds_x = 0.$$

Интеграл  $\int_{(s(x))} ds_x = s(x)$  представляет собой площадь поперечного сечения. Для преобразования интеграла  $J_{d1}(x) = \int_{(s(x))} [(y^2 + z^2) - (y_*^2 + z_*^2)] ds_x$  вводится расстоя-

ние  $r$  от оси координат  $X$  до точки с координатами  $y, z$ , принадлежащей поперечному сечению с координатой  $x$ :  $r^2 = y^2 + z^2$  и  $r_*$  - расстояние от оси  $x$  до фиксированной точки на внешнем контуре сечения,  $r_*^2 = y_*^2 + z_*^2$ . Если сечение представляет собой круг, то  $r_*$  определяет радиус окружности. В результате интеграл преобразуется к виду:

$$J_{d1}(x) = \int_{(s(x))} r^2 ds_x - r_*^2 \int_{(s(x))} ds_x. \text{ Интеграл } J_\rho(x) = \int_{(s(x))} r^2 ds_x \text{ определяет полярный}$$

момент инерции сечения, следовательно,  $J_{d1}(x) = J_\rho(x) - r_*^2 s(x)$ .

Уравнение продольной динамической деформации стержня переменного поперечного сечения данной модели в первом приближении принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E s(x) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mu^2}{2} J_{d1} \left( G \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} - \rho \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial \tau^2} \right) \right] -$$

$$- 2 \mu G s(x) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \rho s(x) \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} = 0. \quad (13)$$

Уравнение включает в себя как поправку Рэлея, так и ряд других по отношению к модели по гипотезе плоских сечений.

Для решения технических задач достаточно удерживать члены, включающие производные не выше второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E s(x) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - 2 \mu G s(x) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \rho s(x) \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} = 0. \quad (14)$$

С учетом соотношения  $G = E / [2(1 + \mu)]$ , уравнение переписывается в виде:

$$\frac{E}{1 + \mu} s(x) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + E \frac{ds(x)}{dx} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - \rho s(x) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} = 0. \quad (15)$$

Если стержень геометрически однороден, т.е. поперечное сечение не меняется по длине,  $s(x) = \text{const}$ , то уравнение (15) преобразуется к виду, совпадающему по структуре с уравнением продольных колебаний материальной линии (2). Модель определяет скорость распространения динамического возмущения несколько иной формулой  $c_1 = \sqrt{E / [(1 + \mu) \rho]}$ , чем по гипотезе плоских сечений  $c = \sqrt{E / \rho}$ .

При введении переменной  $t = c_1 \tau$ , которую можно интерпретировать как расстояние,

на которое перемещается состояние динамической деформации за время  $\tau$ , уравнение (15) перепишется в виде:

$$s(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (1+\mu) \frac{ds(x)}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - s(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

или в более компактной форме:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (1+\mu) \frac{d \ln(s(x))}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

Для определенности уравнение (16) предлагается именовать ОРН (отсутствие радиальных напряжений) уравнением продольной динамической деформации геометрически неоднородных стержней, сделанных из однородного материала, при линейных упругих деформациях. На английском языке: RSA (radial stresses are absent) equation of longitudinal dynamical deformation of rods (bars).

Предложенный алгоритм построения модели позволяет учитывать более тонкие эффекты путем соответствующей корректировки базовых уравнений модели.

#### Список литературы

1. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). Теория звука. - Т. 1. - М.: Г.И. Т.-Э.;Л., - 1955. - 504 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. - М.;Л.: О Н-Т И НКТП СССР, 1935. - 674 с.
3. Федотов И.А. Продольные колебания Рэлея-Бишопа / И.А. Федотов, А.Д. Полянин, М.Ю. Шаталов и др. // Доклады АН РФ. - М.: Наука, 2010. - Т. 435. - № 5. - С. 613-618.

Получено 27.05.2015

УДК: 627.74

**К.С. Турусбеков, Н.В. Хон**

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

#### АНАЛИЗ МОДЕЛИ СВЯЗНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ РЕЗАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ГРУНТОВ

Модель связной среды (сыпучей среды, обладающей сцеплением) достаточно полно разработана такими выдающимися учеными, как В.В. Соколовский, А.П. Прудников [1, 2], а ее приложение к задачам теории резания грунтов осуществлено Г.Н. Карасевым, В.И. Баловневым, Ю.А. Ветровым и многими другими исследователями [3-7]. Напряженным состоянием в точке [1] называется совокупность нормальных и касательных напряжений на любых произвольных элементарных площадках, проходящих через эту точку. Напряжения определяют методом сечений (рис. 1). Рассмотрим образец, растянутый силами  $P$  (рис. 1,а), для которого требуется определить напряжения на произвольной площадке, расположение которой задано углом наклона  $\alpha$  нормали  $n$  к направлению максимального растягивающего напряжения (в данном случае -  $\sigma_3$ ) или, что то же самое, - углом наклона площадки к перпендикуляру к направлению максимального растягивающего напряжения. Отбросим верхнюю часть образца. Чтобы сохранилось равновесие нижней части, заменим воздействие отброшенной верхней части на нижнюю силой  $P$ . Заменим  $P$  ее нормальной  $N$  и касательной  $T$  составляющими (рис. 1,б). Учтя, что  $N$  и  $T$  распределены по площадке сечения, а  $P$  - по площади торца образца, перейдем к схеме рис. 1,в, где силы заменены напряжениями.



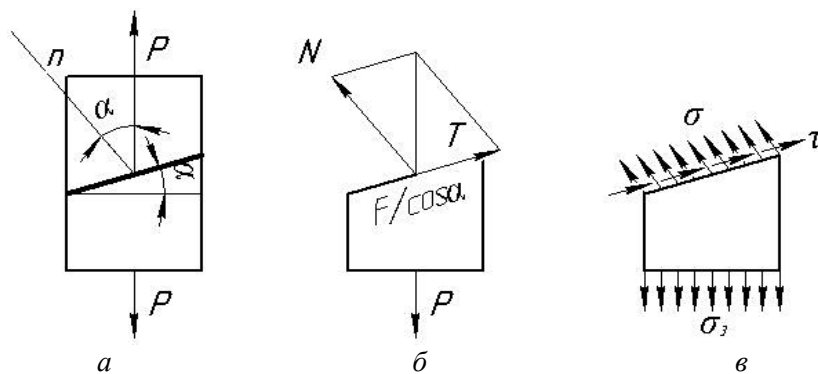


Рисунок 1 - Напряженное состояние на произвольной площадке растянутого образца

Напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  в зависимости от известного напряжения  $\sigma_3 = P/F$ , где  $F$  - площадь сечения образца, найдем из уравнений статики. Однако уравнения равновесия нельзя записывать непосредственно для схемы рис. 1,б, так как уравнения статики пишут для сил, а не для напряжений. По схеме рис. 1,б и учитывая, что площадь сечения равна  $F/\cos \alpha$ , получим:

$$N = P \cos \alpha; \quad \frac{\sigma F}{\cos \alpha} = \frac{\sigma_3 F}{\cos \alpha}$$

и

$$T = P \sin \alpha; \quad \frac{\tau F}{\cos \alpha} = \frac{\sigma_3 F}{\sin \alpha}; \quad \tau = \sigma_3 \sin \alpha \cos \alpha,$$

т.е.

$$\sigma = \sigma_3 \cos^2 \alpha, \quad (1)$$

$$\tau = \frac{(\sigma_3 \sin 2\alpha)}{2}. \quad (2)$$

Графически напряженное состояние (1), (2) отображается кругом Мора. Отметим, что в механике грунтов система обозначений несколько отличается от принятой в сопротивлении материалов. Положительными считают напряжения сжатия, а не растяжения, поэтому:

- максимальное (главное) растягивающее напряжение обозначают как  $\sigma_3$ ;
- максимальное по модулю (главное) напряжение сжатия обозначают как  $\sigma_1$ ;
- на графиках сжимающие напряжения откладываются вправо, а растягивающие - влево.

В координатах « $\sigma$  -  $\tau$ » отложим главное напряжение  $\sigma_3$  на оси  $\sigma$  и построим на полученном отрезке окружность, как на диаметре (рис. 2). Из центра окружности проведем радиус под углом  $2\alpha$  к направлению растягивающих напряжений. Обозначим символом  $A$  точку пересечения радиуса с окружностью. Докажем, что точка  $A$ , определяемая углом  $2\alpha$ , отображает напряжения на площадке образца, заданной углом  $\alpha$  (рис. 2):

$$\sigma = \frac{\sigma_3}{2} + \frac{(\sigma_3 \cos 2\alpha)}{2} = \frac{\sigma_3(1 + \cos 2\alpha)}{2} = \frac{\sigma_3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2}, \quad (3)$$

т.е.

$$\sigma = \sigma_3 \cos^2 \alpha \text{ и } \tau = (\sigma_3 \sin 2\alpha)/2. \quad (4)$$

Таким образом, точка  $A$  отображает напряжения на площадке, определяемой углом  $\alpha$ , а окружность в целом отображает напряженное состояние образца. Если значение главного растягивающего напряжения  $\sigma_3$  достигнет предела прочности на растяжение ( $\sigma_3 = \sigma_p$ ), то соответствующий круг Мора называется предельным кругом Мора.

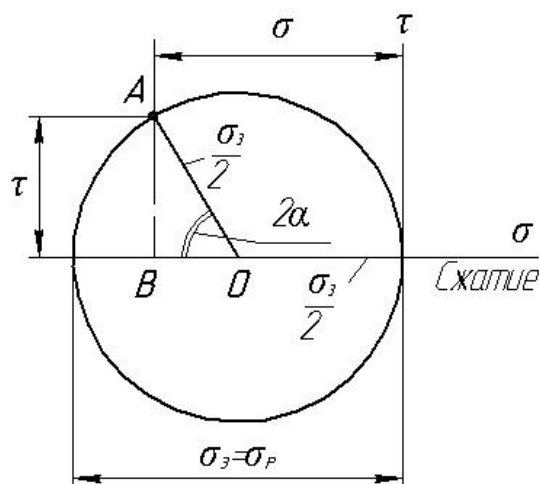


Рисунок 2 - Круг Мора для одноосного сжатия

Для одноосного сжатия круг Мора можно построить на отрезке, равном главному сжимающему напряжению  $\sigma_1$ , отложенному вправо от начала координат (рис. 3). Представим, что сжимающая сила и соответствующее ей напряжение сжатия будет возрастать, пока  $\sigma_1$  не достигнет предела прочности на одноосное сжатие  $\sigma_{сж}$ . Соответствующий круг является предельным кругом Мора для одноосного сжатия. Круг большего размера в данных условиях получить нельзя, так как образец разрушается.

Круги Мора можно строить не только для одноосного, но и для двухосного (плоского) напряженного состояния. С помощью трех кругов Мора для двухосных напряженных состояний можно отобразить трехосное (объемное) напряженное состояние [1].

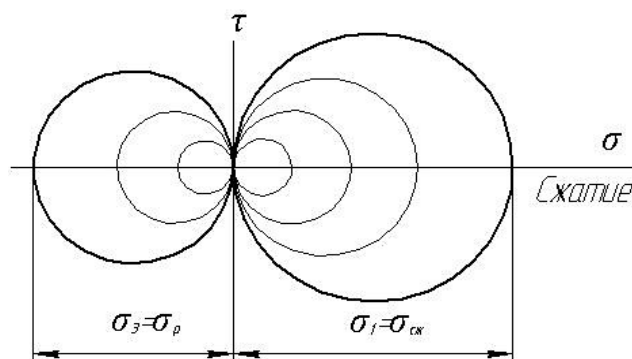


Рисунок 3 - Круги Мора для одноосного напряженного состояния при изменяющихся нагрузках

С этой целью проводят испытания грунтов [1] на максимальное напряжение сжатия  $\sigma_1$  и на два главных напряжения ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ). Несколько образцов доводят до разрушения при различных значениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2 = \sigma_3$ , затем строят соответствующие предельные круги Мора. После этого строят общую касательную ко всем кругам (как правило, точно провести общую касательную ко всем кругам не удастся, и ее строят приблизительно, пользуясь

методом наименьших квадратов). Построенная прямая называется огибающей предельных кругов Мора. Отрезок, отсекаемый огибающей на оси  $\tau$ , называют сцеплением грунта  $C_0$ , а угол между прямой и осью  $\sigma$  - углом внутреннего трения  $\rho$  (рис. 4).

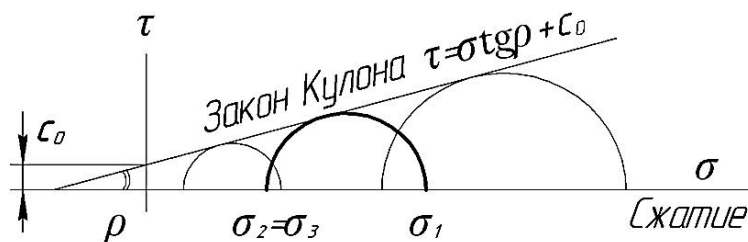


Рисунок 4 - Определение сдвиговых характеристик грунта

Следует отметить, что прямолинейная огибающая предельных кругов Мора может быть построена с приемлемой точностью только при нахождении значений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в достаточно узком диапазоне. Если расширить этот диапазон (рис. 5), то становится ясным, что огибающая предельных кругов Мора является кривой, по форме близкой к параболе. Отсюда следует вывод, что законом Кулона можно пользоваться с достаточной точностью, только если фактические значения главных напряжений, характерных для исследуемого процесса, находятся внутри диапазона, при котором определены параметры сдвига  $C_0$  и  $\rho$ .

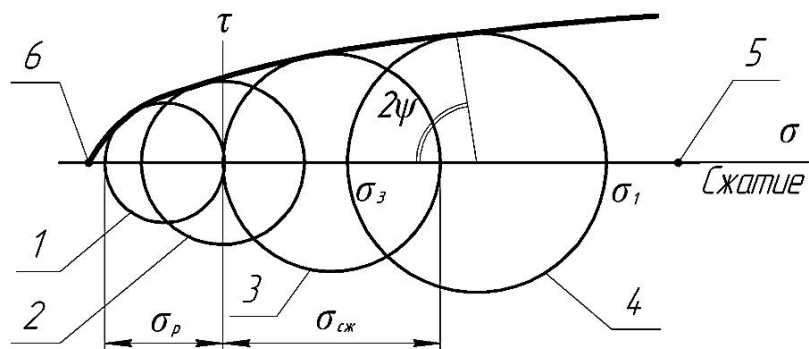


Рисунок 5 - Диаграмма Мора для различных видов напряженного состояния разрабатываемого грунта

На рис. 5. отображены различные виды напряженного состояния. Предельный круг 1 соответствует одноосному растяжению, предельный круг 3 - одноосному сжатию, предельный круг 2 - чистому сдвигу. Напомним, что чистый сдвиг - это напряженное состояние, при котором на некоторой площадке нормальные напряжения отсутствуют, а касательные достигают максимума. В частности, если к двум взаимно перпендикулярным граням кубика приложить одинаковые по величине, но противоположные по знаку главные напряжения, то на площадке, расположенной к ним под углом  $45^\circ$ , возникает чистый сдвиг. Предельный круг 4 соответствует двухосному сжатию.

Круги 1-4 являются предельными кругами Мора, т.е. они отображают напряженное

состояние, при котором материал разрушается. При уменьшении диаметра любого из них разрушения не произойдет, а круги большего диаметра невозможно получить, так как еще до этого материал разрушится. Иными словами, если круг Мора не касается огибающей, то разрушения для отображаемого им напряженного состояния нет. Например, вырожденный в точку круг 5 отображает всестороннее равномерное сжатие ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), при котором разрушение сплошного материала теоретически невозможно, как бы велики ни были численные значения этих напряжений. Этот казался бы парадоксальный вывод вполне логичен: для разрушения необходима не просто деформация, а деформация формоизменения. Однако при равномерном всестороннем сжатии происходит только изменение объема (упругое сжатие), но не формы. Известны эксперименты, при которых материалы не разрушались при всестороннем равномерном сжатии даже при приложении к ним напряжений, намного превосходящих предел прочности на одноосное сжатие.

Расположение площадки разрушения в грунте можно определить по точке касания круга Мора предельной огибающей. Например, круг 4 на рис. 5 касается огибающей в точке, определяемой углом  $2\psi$ . Ранее известно (рис. 2), что угол наклона площадки в образце в два раза меньше соответствующего угла на диаграмме. Поэтому в грунте площадка будет наклонена под углом  $\psi$  к  $\sigma_1$ . Угол  $\psi$  называется углом сдвига (или углом скола) и имеет важное значение при решении практических задач.

В случае использования прямолинейной огибающей (в рамках закона Кулона) угол сдвига легко определить аналитически (рис. 6):

$$\psi = \frac{45^\circ - \rho}{2}. \quad (5)$$

Согласно теории прочности Мора, при объемном напряженном состоянии на прочность влияют только максимальное  $\sigma_1$  и минимальное  $\sigma_3$  главные напряжения, а среднее главное напряжение  $\sigma_2$  на прочность не влияет. Из диаграммы Мора следует, что круг наибольшего диаметра, который раньше коснется огибающей при увеличении значений напряжений, это круг, построенный на  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Площадка разрушения проходит параллельно среднему напряжению  $\sigma_2$ , а нормаль к ней наклонена к  $\sigma_3$  под углом сдвига  $\psi$ .

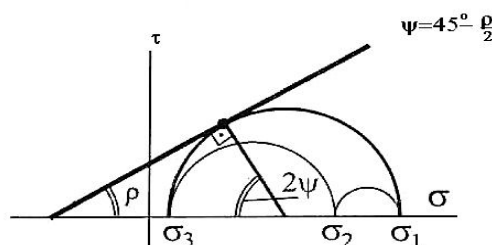


Рисунок 6 - Определение положения поверхности разрушения грунта

Отметим, что на угол сдвига  $\psi$  раковин, образующихся при резании грунта, может влиять угол резания  $\alpha$  и угол внешнего трения грунта о поверхность рабочего органа  $\varphi$ . Поэтому иногда угол сдвига рассчитывают по известной в теории резания металлов формуле проф. Зворыкина:

$$\psi = \frac{90^\circ - (\alpha + \varphi + \rho)}{2}. \quad (6)$$

С помощью диаграмм Мора можно определить, является ли исследуемый грунт хрупким или пластичным. Хрупким называют материал, склонный к внезапному разрушению

без предварительного развития значительных пластических деформаций. Отметим, что хрупкость и пластичность являются состояниями материала, а не его свойствами. Один и тот же материал может быть при одних условиях пластичным, а при других - хрупким. Например, многие материалы становятся хрупкими при больших скоростях приложения нагрузки. Грунты могут стать хрупкими при замерзании.

Пластичные грунты имеют тенденцию к разрушению от деформации сдвига, а хрупкие - от деформации отрыва. Типичные диаграммы Мора для пластичного и хрупкого грунтов показаны на рис. 7. Важно сознавать, что вид напряженного состояния и истинная причина разрушения - разные понятия. Например, на диаграмме для идеально-пластичного грунта все предельные круги Мора касаются предельной огибающей в точках, для которых угол  $2\psi$  равен  $90^\circ$ . Следовательно, даже для образца, подвергнутого одноосному растяжению (левый круг), площадка разрушения будет расположена под углом  $45^\circ$  к растягивающему напряжению, т.е. разрываемый образец на самом деле разрушится от деформации сдвига.

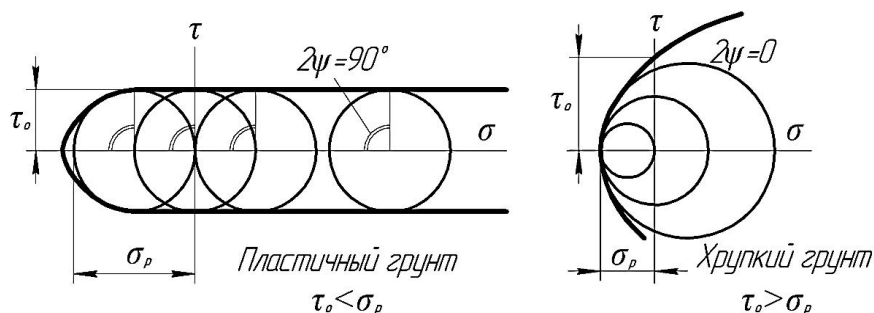


Рисунок 7 - Диаграммы Мора для пластичного и хрупкого состояний грунта

Напротив, в случае хрупкого грунта (правая диаграмма) все изображенные круги Мора: для одноосного растяжения, чистого сдвига, двухосного напряженного состояния, касаются огибающей в точке, лежащей на оси  $\sigma$ . Угол сдвига равен нулю и, следовательно, во всех указанных случаях разрушение происходит путем отрыва. Согласно А.Н. Зеленину [7], критерием хрупкости может служить отношение отрезка  $\tau_0$ , отсекаемого огибающей на оси  $\tau$ , к пределу прочности на растяжение  $\sigma_p$ . При  $\tau_0/\sigma_p < 1$  грунт пластичен, а при  $\tau_0/\sigma_p > 1$  - хрупок.

Рассмотрим теперь равновесие элементарного куба, выделенного в толще разрушаемого грунта. Необходимо отметить, что данная расчетная схема соответствует двухосному (плоскому) напряженному состоянию, а объемное изображение куба нужно только для того, чтобы определить площади его граней. Поскольку сила есть напряжение, умноженное на площадь, на схеме показаны нормальные и касательные силы, действующие на грани куба. Примем, что напряжения на двух противоположных гранях отличаются на бесконечно малую величину. Например, на верхнюю грань куба действует напряжение  $\sigma_x$ , а на нижнюю - напряжение  $\sigma_x + d\sigma_x = \sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx$ .

Кроме сил на поверхностях куба, на него действует сила его собственной тяжести, равная объемному весу грунта  $\gamma$ , умноженному на объем куба  $dx dy dz$ .

Из уравнения проекций всех сил на оси  $X$  и  $Z$  получим (после преобразований) систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau}{\partial z} &= \gamma, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Мы получили два уравнения с тремя неизвестными:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau$ . Система имеет множество решений, соответствующих различным напряженным состояниям. Из этого множества решений нас, однако, интересует только предельное напряженное состояние, соответствующее началу разрушения грунта при резании его отвалом бульдозера. Недостающее третье уравнение (оно называется «условием пластичности», или «уравнением предельного состояния») может быть получено из теории прочности Кулона-Мора (рис. 8).

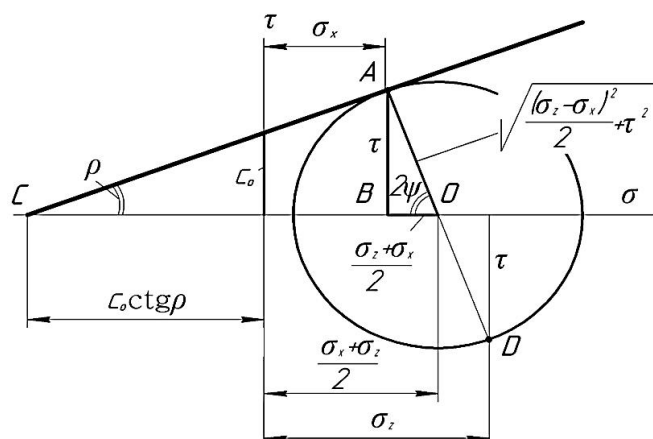


Рисунок 8 - Схема для вывода условия пластичности

Точка  $A$  соответствует верхней площадке элементарного куба, на которую действует напряжение  $\sigma_x$ . Другая площадка, на которую действует напряжение  $\sigma_z$ , составляет с первой площадкой угол  $90^\circ$ . Поскольку на диаграмме Мора все углы удваиваются, точка  $D$ , отображающая напряжение  $\sigma_z$  лежит на диаметре круга Мора, проходящем через  $A$ . Из  $\triangle AOB$  получим:

$$(AO)^2 = \frac{(\sigma_z - \sigma_x)^2}{4} + \tau^2, \quad (8)$$

а из  $\triangle CAO$ :

$$(AO)^2 = \left[ \frac{C_0 \operatorname{ctg} \rho + (\sigma_x + \sigma_z)}{2} \right]^2 \sin^2 \rho. \quad (9)$$

Приравняв друг к другу правые части уравнений (8) и (9), и выполнив упрощающие преобразования, получим условие пластичности, выраженное через напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau$  на произвольных площадках элементарного куба:

$$(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\tau^2 = \sin^2 \rho (\sigma_z + \sigma_x + 2C_0 \operatorname{ctg} \rho)^2. \quad (10)$$

Это же уравнение, выраженное через главные напряжения, имеет следующий вид:

$$\sin \rho = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 + \sigma_3 + 2C_0 \operatorname{ctg} \rho)}. \quad (11)$$

По физическому смыслу уравнения (1) (закон Кулона), (10) и (11) эквивалентны, но выражены через разные напряжения.

Итак, получена система трех уравнений (7), (10) с тремя неизвестными. Однако, по-

сколькx в системе есть два уравнения в частных производных, для получения решения системы необходимо задать граничные условия, т.е. в нашем случае - условия на границе грунта с рабочим органом (угол резания  $\alpha$ , угол  $\varphi$  внешнего трения грунта о металл) и на поверхности разрушаемого массива (распределенное давление  $p_0$  - атмосферное или от рыхлого грунта, находящегося выше разрушаемого массива).

В результате решения системы (7), (10) В.В.Соколовский [1] и другие исследователи [3-7] определили распределение в грунте поверхностей скольжения (рис. 9), т.е. поверхностей, по которым возможно разрушение грунта. Решение оказалось весьма сложным, а при учете собственного веса грунта задача решается только численными методами. Для всех узловых точек сетки линий скольжения определено напряженное состояние, в том числе и для точек, лежащих на поверхности строительного объекта, погруженного в грунт.

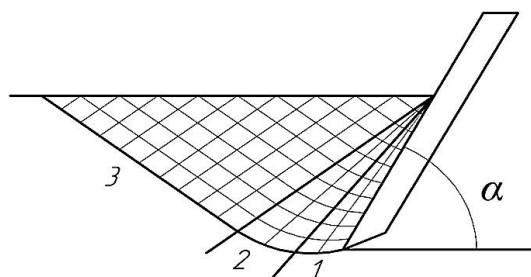


Рисунок 9 - Сетка линий скольжения грунта по поверхности рабочего органа

Последнее означает, что определена эпюра давлений грунта на стенку строительного объекта, по которой можно определить силу давления грунта.

В результате анализа известных теорий резания связной среды выбраны базовые аналитические зависимости для определения давлений на поверхности строительных материалов, а закономерности построения диаграммы Мора для различных видов напряженного состояния приняты за основу теории образования уплотненного ядра перед отвалом бульдозера

В результате анализа теории распределения в грунте поверхностей скольжения принята схема резания грунта с учетом поверхностей, по которым возможно разрушение грунта. При помощи диаграмм Мора приняты допущения для определения вида исследуемого грунта (хрупкий или пластичный) при его резании отвалом бульдозера.

#### Список литературы

1. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. - 3-е изд. - М.:Л, 1960.
2. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. - М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит-ры, 1981. - С. 736, 5.4.9.3.
3. Карасев Г.Н. Выбор основных параметров прицепного скрепера: Дисс.... канд. техн. наук. - М., 1970.
4. Баловнев В.И. Новые методы расчета сопротивлений резанию грунтов. - М.: Росвузиздат, 1963. - 96 с.
5. Ветров Ю.А. Расчеты сил резания и копания грунтов. - Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1965. - 167 с.
6. Заднепровский Р.П. Рабочие органы землеройных и мелиоративных машин и оборудование для разработки грунтов и материалов повышенной влажности. - М.: Машиностроение, 1992. - 176 с.
7. Зеленин А.Н. Машины для земляных работ / А.Н. Зеленин, В.И. Баловнев, И.П. Керов. - М.: Машиностроение, 1975. - 423 с.

Получено 18.05.2015



## **ФИЗИКА НА СЛУЖБЕ У КОНДИТЕРА**

Сделать мороженое дома, на вечеринке, а тем более в кафе – минутное дело, считают московские студенты, участвующие в проекте «Артнаука: физика невозможного». Для этого по их рецепту нужно лишь немного жидкого азота. Правда, при температуре кипения –  $196^{\circ}\text{C}$  его приходится хранить в весьма недешевом сосуда Дьюара, в остальном же все традиционно, просто и доступно: сливки и сахар, а также всевозможные дополнения в виде сиропов, орешков и шоколада. Смешивать и подавать «быстрое мороженое» можно в обычной посуде. При этом вскипающий в смеси продуктов жидкий азот способен ее не только охладить, но и взбить до нужной консистенции. А приготовление такого мороженого на глазах у гостей может стать самостоятельным элементом шоу-программы, что и продемонстрировали авторы разработки перед посетителями выставки «Открытые инновации-2014».

«Наука и жизнь» № 1, 2015