



УДК 519.6+517.9

Л.Н. Темирбекова

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Под обратными задачами спектрального анализа понимаются задачи восстановления линейного оператора по тем или иным его спектральным характеристикам. Такими характеристиками могут быть спектры (при различных граничных условиях), спектральная функция, данные рассеяния и др.

В 1951 г. вышла работа И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана [1], в которой был указан метод восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции, а также даны достаточные условия для того, чтобы заданная монотонная функция являлась спектральной функцией оператора Штурма-Лиувилля (на полупрямой или на конечном промежутке). В 1984 г. Б.М. Левитан [2] изложил теорию обратных задач спектрального анализа на примере уравнения Штурма-Лиувилля. В монографии В.Г. Романова [3] рассматривается задача с сосредоточенным источником. С.И. Кабанихин [4] в своей работе излагает метод Гельфанда-Левитана, алгоритм восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральным характеристикам. Построено уравнение Гельфанда-Левитана для задачи с сосредоточенным источником для гиперболических уравнений.

В данной работе предлагается пример и алгоритм численного решения интегрального уравнения для задачи с сосредоточенным источником для гиперболического уравнения. Численно решены прямая и обратная задачи, результаты расчетов приведены в виде графиков.

Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения $u(x, t)$ задачи Коши

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x). \quad (2)$$

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x, t)$ по известным функциям $q(x)$ и начальным условиям (2).

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительной информации:

$$u(0, t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

В работе [4] получено интегральное уравнение для решения обратной задачи (1), (3)

$$\frac{1}{2} [f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (4)$$
$$x > |t|.$$

Для численного решения интегрального уравнения (4) получается система линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей, нет диагонального преобладания, т.е. не выполняется условие

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, m.$$

При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (4) является интегральным уравнением первого рода относительно функции $\tilde{w}(x, t)$, $t \in (-x, x)$.

Ядро $f(t - \tau)$ этого уравнения при $t = \tau$ имеет конечный разрыв:

$$f(+0) = 1/2, \quad f(-0) = -1/2.$$

Следовательно, дифференцируя уравнение (4) по t , получим уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f'(t - \tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)], \quad (5)$$

$$x > 0, t \in (-x, x).$$

Ядро $f'(t - \tau)$ уравнения (5) является непрерывным и в силу четности функции $f'(t)$ симметрическим.

Поскольку решение $\tilde{w}(x, t)$ уравнения (5) четно по переменной t , это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)], \quad x > 0, t \in [0, x]. \quad (6)$$

Уравнение (6) эквивалентно уравнению (4) при дополнительном условии, что решение $\tilde{w}(x, t)$ уравнения (6) является четной функцией по аргументу t . В самом деле, любое четное по t решение уравнения (4) является решением уравнения (6). С другой стороны, любое решение уравнения (6), продолженное четным образом по t для значений $t \in (-x, 0)$, удовлетворяет уравнению (5), которое получено из уравнения (4) дифференцированием по t , и также удовлетворяет условию

$$\int_{-x}^x f(-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0,$$

совпадающему с равенством (4) при $t = 0$. Отсюда следует, что любое решение уравнения (6) при четном продолжении по t является решением уравнения (4). Тем самым установлена эквивалентность уравнений (4) и (6).

Допустим, что уравнение (6) для каждого $x > 0$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций, тогда его решение определяет непрерывную в области D_1 функцию $\tilde{w}(x, t)$ (с учетом ее четного продолжения в ту часть области D_1 , где $t < 0$).

Так как правая часть (5) непрерывно дифференцируема в D_1 , а ядро $f'(t - s)$ кусочно-непрерывно дифференцируемо, то решение уравнения (5) будет непрерывно дифференцируемым в D_1 . Из уравнения (6), в частности, следует, что $\tilde{w}(x, +0) = 0$. Поэтому четное продолжение в области $t < 0$ происходит с сохранением непрерывности частных производных.

Искомая функция $q(x)$ связана с решением интегрального уравнения (6) соотношением

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x-0), \quad x > 0. \quad (7)$$

Для того чтобы построить решение обратной задачи в точке $x > 0$, достаточно решить уравнение (6) и найти $q(x)$ по формуле (7). Из теории уравнений Фредгольма известно, что для малых значений x уравнение (6) однозначно разрешимо.

Для приближенного решения интегрального уравнения (6) заменим интеграл в этом уравнении на сумму и при фиксированном $x > 0$ и при каждом t^k получим систему линейных уравнений:

$$w(x, t^k) + \sum_{i=0}^n (f'(t^k - \tau_i) + f'(t^k + \tau_i)) w(x, \tau_i) h = -\frac{1}{2} [f'(t^k - x) + f'(t^k + x)], \quad (8)$$

$$0 \leq t^k \leq x, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Отсюда, в развернутом виде получим:

при $k = 0$

$$w(x, t^0) + \sum_{i=0}^n (f'(t^0 - \tau_i) + f'(t^0 + \tau_i)) w(x, \tau_i) h = -\frac{1}{2} (f'(t^0 - x) + f'(t^0 + x));$$

при $k = 1$

$$w(x, t^1) + \sum_{i=0}^n (f'(t^1 - \tau_i) + f'(t^1 + \tau_i)) w(x, \tau_i) h = -\frac{1}{2} (f'(t^1 - x) + f'(t^1 + x)) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, получим систему

$$Aw = y, \quad (9)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 + h(f'(t^0 - \tau_0) + f'(t^0 + \tau_0)) & h(f'(t^0 - \tau_1) + f'(t^0 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^0 - \tau_n) + f'(t^0 + \tau_n)) \\ h(f'(t^1 - \tau_0) + f'(t^1 + \tau_0)) & 1 + h(f'(t^1 - \tau_1) + f'(t^1 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^1 - \tau_n) + f'(t^1 + \tau_n)) \\ h(f'(t^2 - \tau_0) + f'(t^2 + \tau_0)) & h(f'(t^2 - \tau_1) + f'(t^2 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^2 - \tau_n) + f'(t^2 + \tau_n)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(f'(t^n - \tau_0) + f'(t^n + \tau_0)) & h(f'(t^n - \tau_1) + f'(t^n + \tau_1)) & \dots & 1 + h(f'(t^n - \tau_n) + f'(t^n + \tau_n)) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$w = \begin{pmatrix} w(x, \tau_0) \\ w(x, \tau_1) \\ w(x, \tau_2) \\ \dots \\ w(x, \tau_n) \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} f'(t^0 - x) + f'(t^0 + x) \\ f'(t^1 - x) + f'(t^1 + x) \\ f'(t^2 - x) + f'(t^2 + x) \\ \dots \\ f'(t^n - x) + f'(t^n + x) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица системы линейных уравнений (9) получается с диагональным преобладанием. Систему уравнений (9) решаем итерационным методом

$$B \frac{w^{k+1} - w^k}{\tau_{k+1}} + Aw^k = y. \quad (12)$$

Как было указано выше, прямая задача с сосредоточенным источником состоит в на-

хождении обобщенного решения $u(x, t)$ задачи (1), (2). В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительным информациям (3) о решении прямой задачи (1), (2).

Рассмотрим пример прямой задачи, в которой вместо дельта – функции Дирака, возьмем функцию $\frac{1}{2|x|}$. Она удовлетворяет некоторым свойствам дельта – функции Дирака.

Пусть $q(x) = \frac{2|x|}{x^3} \text{sign}(x)$. Нами рассматривается следующая прямая задача:

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, t > 0, \quad (13)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{2|x|}. \quad (14)$$

Легко проверить, что решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = \frac{t}{2|x|}. \quad (15)$$

В нашем случае обратная задача выглядит следующим образом:

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, t > 0. \quad (16)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{|x|}. \quad (17)$$

Дополнительная информация о решении прямой задачи будет иметь следующий вид

$$u(0, t) = \frac{t}{\varepsilon}, \quad t \geq 0 \quad (18)$$

Согласно результатам исследований работ С.И. Кабанихина [4] прямую задачу (1), (2) можно записать в виде задачи Гурса:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, t < |x|, \\ u|_{t=|x|} = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (19)$$

$$|x| < t < 2 - |x|, \quad t = -x, \quad t = x.$$

Пример (13)-(15) удовлетворяет задаче Гурса. Гиперболическое уравнение (19) численно решаем с помощью разностной схемы:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} - q_i \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2}, \quad (20)$$

При $\tau = h$ получаем схему квадрат:

$$u_i^{k+1} = u_{i+1}^k + u_{i-1}^k - u_i^{k-1} - h^2 \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2} \left(\frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2} \right). \quad (21)$$

Область определения квадрат $D = \{-1 < x < 1, 0 < t < 2\}$. Строим сетку так, как показано на рис. 1. Схема, по которой решаем задачу Гурса, показана на рис. 2. Составлена программа на ЭВМ. Функция $q(x)$ имеет график, показанный на рис. 3.

Обратная задача (16), (17) с дополнительной информацией (18) решена на ЭВМ. Использован метод итерации (12). На рис. 4 показано сравнение приближенного и численного решения функции $\tilde{w}(x, x)$. Из графика видно, что функция $\tilde{w}(x, x)$ определяется с точностью до постоянной согласно формуле (7).

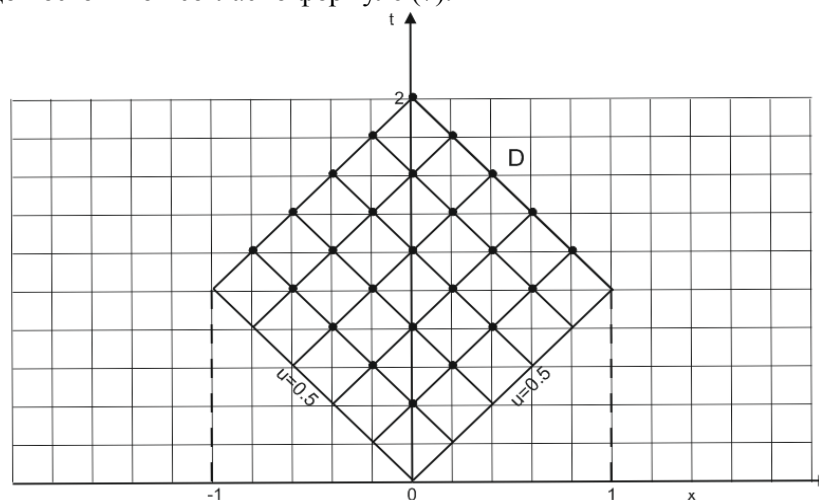


Рисунок 1 - Схема решения прямой задачи. Область $D = \{-1 < x < 1, 0 < t < 2\}$

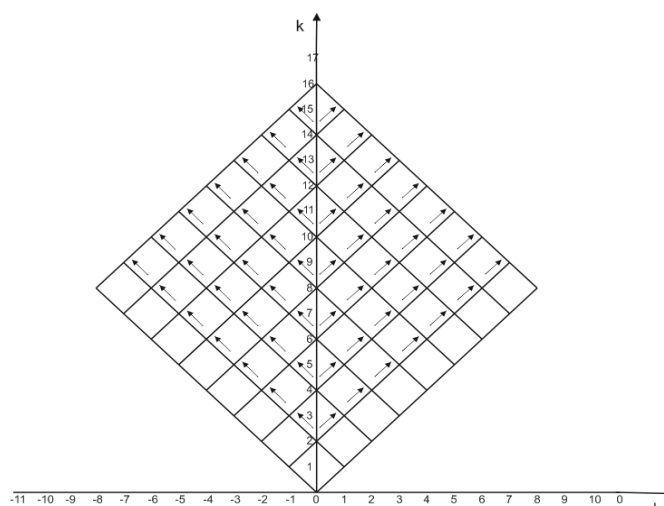


Рисунок 2 - Схема решения прямой задачи

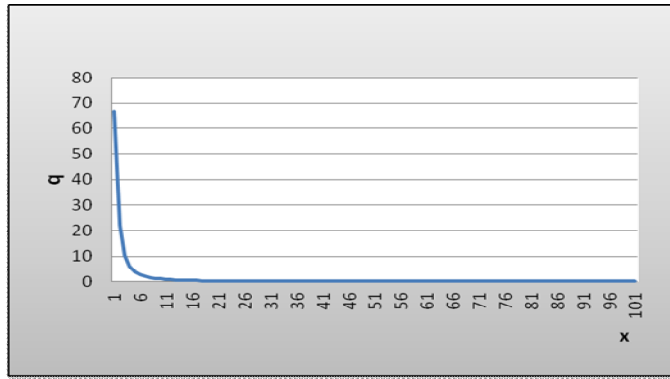
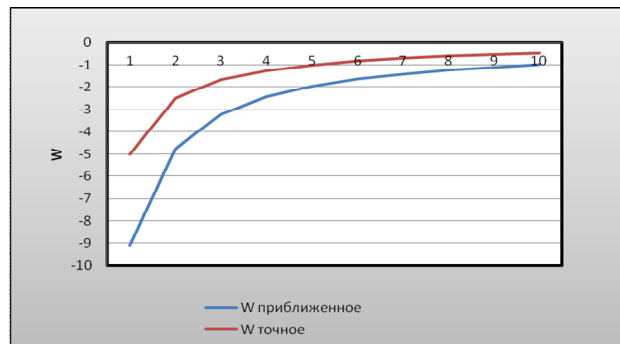
Рисунок 3 - График функции $q(x)$ 

Рисунок 4

Список литературы

1. Гелфанд И.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И.М. Гелфанд, Б.М. Левитан // Изв. АН; Сер. матем. - 1951. - Т. 15. - С. 309-360.
2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. - М.: Наука, 1984. - 240 с.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. - 263 с.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. - 457 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. - 2008. - 636 с.
6. Лаврентьев М.М. Линейные операторы и некорректные задачи / М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. - М.: Наука, 1991. - 331 с.
7. Самарский А.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Наука, 1989. - 432 с.

Получено 16.12.11

по страницам

**НЕ БЬЕТСЯ И НЕ МЕРЗНЕТ**

В Дубне разработаны энергосберегающие окна для пассажирских железнодорожных вагонов. Одно- и двухкамерные стеклопакеты монтируют в алюминиевых рамах. В антивандальном исполнении внешнее стекло имеет повышенную прочность и без растрескивания выдерживает удар металлическим шаром массой более 2 кг, падающим с высоты 1,5 м. Внутреннее стекло – энергосберегающее. В видимой части спектра оно пропускает не менее 50 % излучения, а в инфракрасной области – всего 20 %.

Влага на стеклах не конденсируется, даже если в вагоне $+20^{\circ}\text{C}$, а на улице (при влажности воздуха 30 %) минус 50°C . При большей влажности образовавшийся конденсат не будет скапливаться между стеклами – его сливают наружу.

Если стекло разобьётся (кирпич, пущенный умелой рукой железнодорожного хулигана, стекло все же расколется), то окно не придется менять целиком, как это вынуждены делать сейчас. Конструкция позволяет заменить только поврежденное стекло. В комплект ЗИП запасные стекла включены.

«Наука и жизнь» № 4, 2011