



УДК 681.2 (075.8): 681.5(075.8): 006.91(075.8)

**А.П. Парамзин**

ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

**ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО МОДУЛЯТОРА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ  
ПЕРЕХОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ДВУХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ**

В статье рассматривается двухканальная система автоматического управления (рис. 1), каждый канал которой имеет передаточную функцию апериодического звена второго порядка:

$$K_1(p) = K_{10}/B_1(p); K_2(p) = K_{20}/B_2(p), \quad (1)$$

где  $1/B_1(p) = 1/[(\tau p+1)(\tau_3 p+1)] = 1/[(\tau p+1)(n_3 \tau p+1)]$ ;  
 $1/B_2(p) = 1/[(\tau_1 p+1)(\tau_2 p+1)] = 1/[(n_1 \tau p+1)(n_2 \tau p+1)]$ .

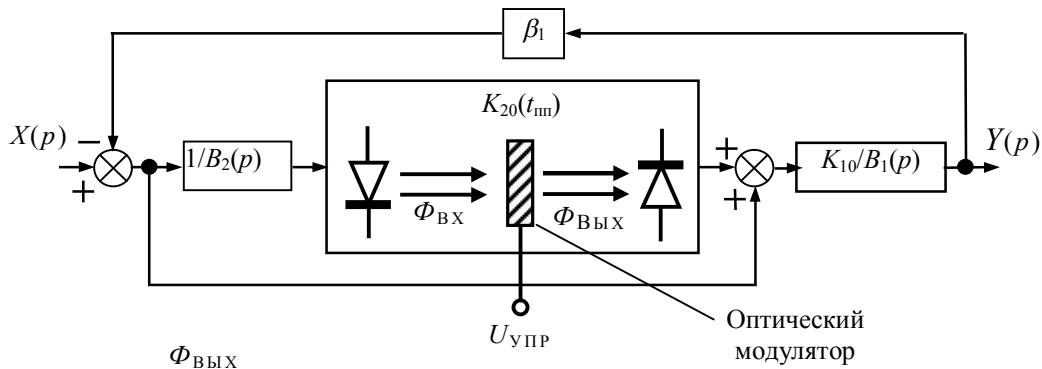


Рисунок 1 – Структура двухканальной автоматической системы:  $X(p)$  – входное воздействие,  $Y(p)$  – выходная переменная,  $K_1(p)$  – передаточная функция основного канала;  $K_2(p)$  – передаточные функции дополнительного канала;  $\beta_1$  – безынерционный делитель,  $p$  – оператор Лапласа,  $\Phi$  – световой поток

Предыстория появления такой структуры подробно описана в ряде авторских публикаций, в частности в [1]. При этом решалась задача обеспечения высоких показателей качества в статическом режиме работы в заданном диапазоне рабочих частот. Как известно, качество системы напрямую зависит от глубины обратной связи, которая определяется из передаточной функции замкнутой системы (2) как произведение  $\beta_1 K_1(p)[K_2(p)+1]$  и в статическом режиме равна  $\beta_1 K_{10}(K_{20}+1)$ .

$$W_{Y/X}(p) = \frac{K_1(p)[K_2(p)+1]}{1 + \beta_1 K_1(p)[K_2(p)+1]}. \quad (2)$$

В упомянутой работе [1] решена оптимизационная задача по формированию частотных характеристик каналов рассматриваемой системы. Эти характеристики показаны на рис. 2.

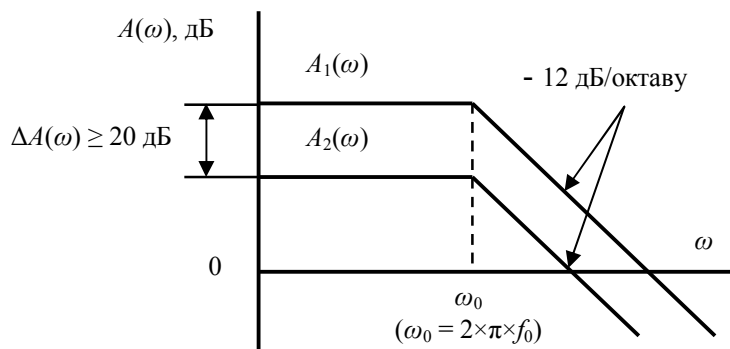


Рисунок 2 – Оптимальное соотношение частотных характеристик:  $A_1(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика основного канала;  $A_2(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика дополнительного канала;  $\omega_0$  – верхняя граница диапазона рабочих частот.

Соотношение частотных характеристик каналов для статического режима можно оценить по номограмме устойчивости (рис. 3), математическое описание которой выводится из характеристического уравнения передаточной функции (2) и имеет вид:

$$K_{20} \leq Q(g_1 + g_2 \beta_1 K_{10} + g_3 / \beta_1 K_{10}), \quad (3)$$

где  $Q = (n_1 + n_2)(1 + n_3) / (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3)^2$ ;

$$g_1 = n_1^2 (n_2 + n_3)(1 + n_2) + n_2^2 (n_1 + n_3)(1 + n_1);$$

$$g_2 = n_1^2 n_2^2;$$

$$g_3 = (n_1 + n_3)(n_2 + n_3)(1 + n_1 + n_2 + n_1 n_2).$$

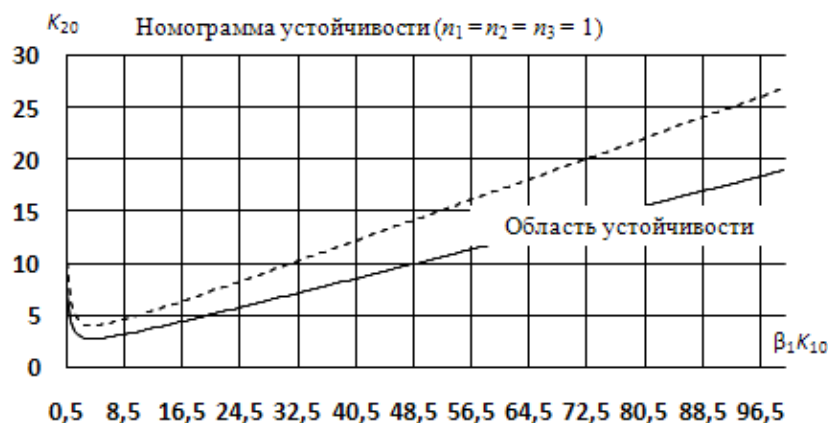


Рисунок 3 – Номограмма устойчивости системы для статического режима

На рис. 3 пунктиром показана верхняя (предельная) граница устойчивости, а сплошная линия ограничивает область устойчивости с учётом типового запаса устойчивости по модулю, равного 30 %.

В [2] показано, что в оптимизированной вышеописанным способом автоматической системе переходные режимы являются колебательными с недопустимо большим перерегулированием. Один из вариантов переходного процесса, как реакция системы на входное единичное ступенчатое воздействие, показан на рис. 4. В работах [2-6] описаны вари-

анты поиска решений, позволяющих минимизировать противоречие между значениями показателей качества в статическом и переходном режимах. В этих работах анализируются несколько алгоритмов и моделей, которые позволили бы решить поставленную задачу. Однако полученные результаты не дают оснований утверждать, что цель была достигнута.

Целью данной статьи является разработка алгоритма и технического решения, обеспечивающих адаптацию системы к требованиям качества переходного процесса без снижения показателей качества в статическом режиме.

*Примечание.* Для статического режима важны точность, стабильность и чувствительность, для переходного режима важны быстродействие и минимум перерегулирования.

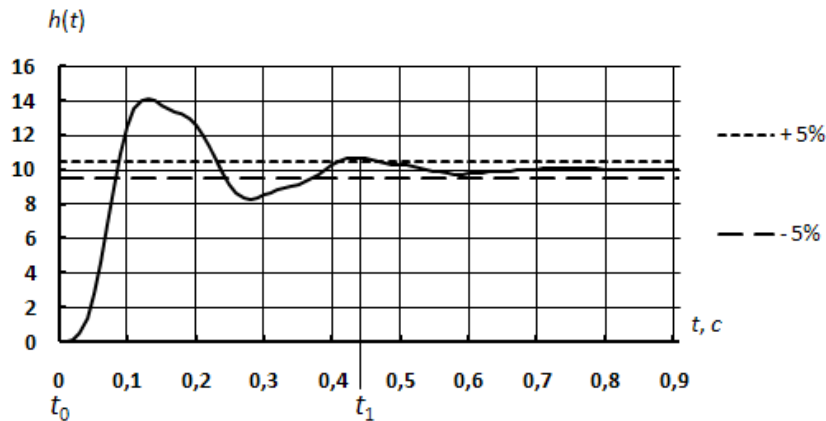


Рисунок 4 – Переходная функция автоматической системы

Алгоритм управления переходным процессом формулируется следующим образом:

1) в начальный момент времени  $t_0$  (рис. 4) при подаче входного воздействия  $x(t)$  узел адаптивного управления переходным процессом устанавливает минимальное значение статического коэффициента передачи дополнительного канала  $K_{20\min}$ ;

2) в момент времени  $t_1$ , когда выходная величина  $h(t) = y(t)$  окончательно войдет в допустимую зону относительно установившегося значения (например,  $\pm 5\%$  от  $h_{уст}$ , как показано на рис. 4), узел адаптивного управления переходным процессом устанавливает максимальное значение статического коэффициента передачи дополнительного канала  $K_{20\max}$ .

Интервал времени  $t_1 - t_0 = t_{\text{пн}}$  соответствует длительности переходного процесса в системе при оптимальных значениях параметров. Длительность переходного процесса определяется с помощью математической модели системы на финальной стадии её синтеза. Математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение (4), получаемое из передаточной функции (2).

$$y(t) \left[ C_4 \frac{d^4}{dt^4} + C_3 \frac{d^3}{dt^3} + C_2 \frac{d^2}{dt^2} + C_1 \frac{d}{dt} + C_0 \right] = x(t) \left[ D_2 \frac{d^2}{dt^2} + D_1 \frac{d}{dt} + D_0 \right], \quad (4)$$

где  $C_4 = n_1 n_2 n_3 \tau^4$ ;  $C_3 = (n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) \tau^3$ ;  $C_2 = [n_1 n_2 (1 + \beta_1 K_{10}) + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 + n_2 + n_3] \tau^2$ ;  $C_1 = [(n_1 + n_2)(1 + \beta_1 K_{10}) + n_3 + 1] \tau$ ;  $C_0 = [(1 + \beta_1 K_{10}) + \beta_1 K_{10} K_{20}]$ ;  $D_4 = n_1 n_2 n_3 \tau^4$ ;  $D_3 = (n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) \tau^3$ ;  $D_2 = (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 + n_2 + n_3) \tau^2$ ;  $D_1 = (n_1 + n_2 + n_3 + 1) \tau$ ;  $D_0 = 1$ .

Узел адаптивного управления переходным процессом, встраиваемый в структурную схему системы, содержит оптический модулятор и электронное управляющее устройство. Как известно, оптический модулятор способен изменять интенсивность пропускаемого через него светового потока. На рис. 5 показана линеаризованная статическая характеристика такого модулятора, который в данном случае работает как оптический затвор.

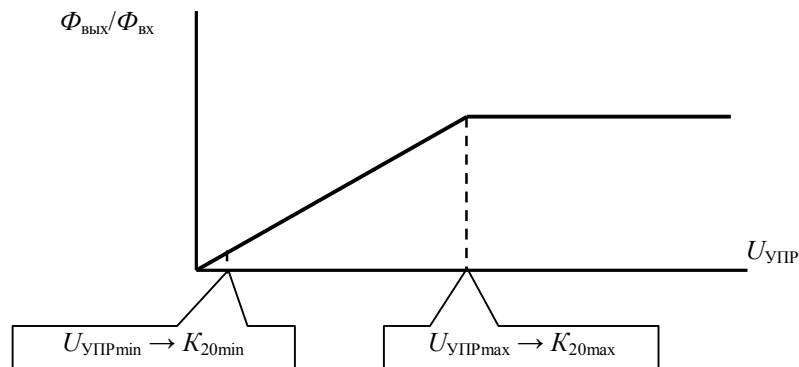


Рисунок 5 – Статическая характеристика оптического модулятора:  $\Phi$  – интенсивность светового потока (на выходе и входе модулятора),  $\Phi_{\text{вх}} = \text{const}$  (максимальный)

На рис. 6 представлена модифицированная структурная схема автоматической системы.

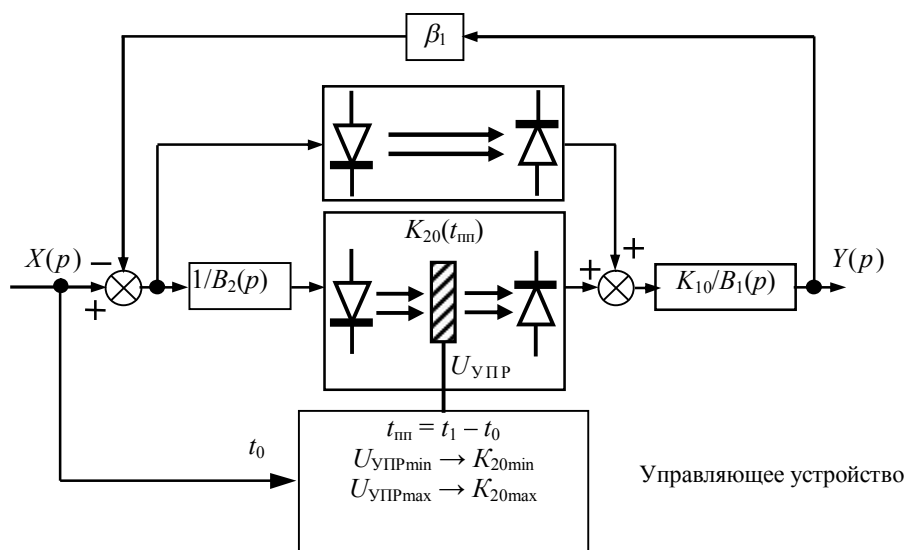


Рисунок 6 – Модифицированная структурная схема автоматической системы

Логика работы схемы управления схематично изображена на рис. 7.

Ниже, на рис. 8, приведены результаты моделирования процесса в рассматриваемой системе при конкретной комбинации значений её параметров:  $Y(0)/X(0) = y(\infty)/x(\infty) = 10$ ;  $f_0 = 1$  Гц  $\rightarrow \tau = 0,159155$  с;  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ ;  $\beta_1 K_{10} = 100$ ;  $K_{20\text{max}} = 10$ . Переходный процесс в спроектированной с такими параметрами системе (без оптического модулятора) изображён на рис. 4, откуда следует  $t_1 - t_0 = t_{\text{уп}} \approx 0,45$  с.

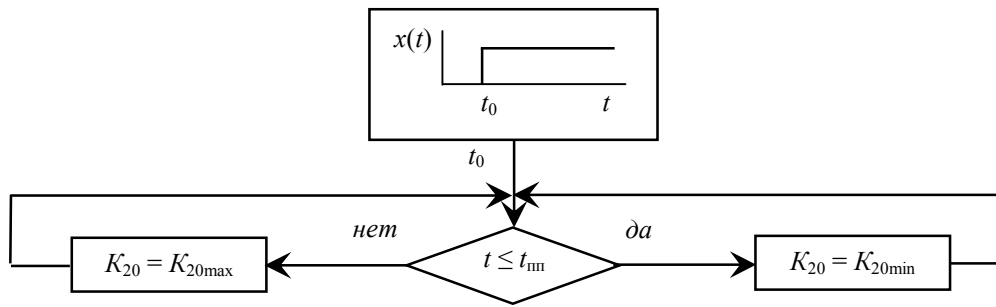
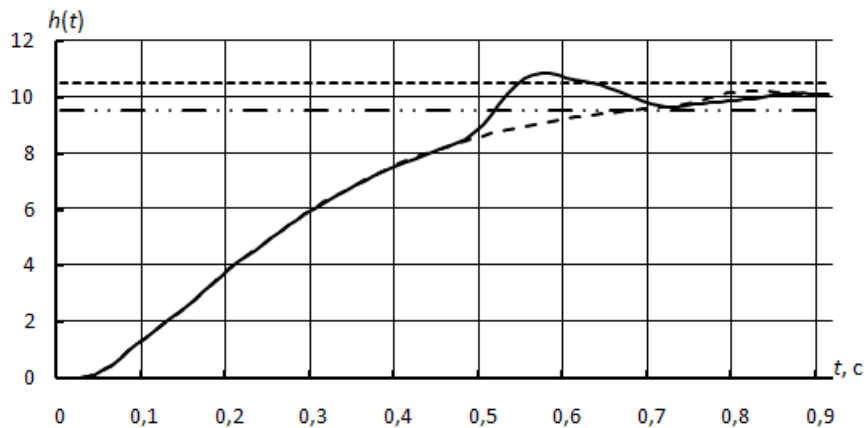


Рисунок 7 – Алгоритм работы управляющего устройства

Рисунок 8 – Кривые переходных процессов системы с модифицированной структурой:  
 $t_{\text{нп}} = 0,45$  с – сплошная линия;  $t_{\text{нп}} = 0,7$  с – пунктирная линия

Длительность переходного процесса системы с модифицированной структурой при значении настроечного параметра узла адаптивного управления  $t_{\text{нп}} \approx 0,45$  с (сплошная линия на рис. 7) равна  $\approx 0,63$  с, то есть увеличилась. Перерегулирование с исходных 40 % (рис. 4) уменьшилось до величины 3 %. При уменьшении размера допустимой зоны относительно установившегося значения (например,  $\pm 3$  % от  $h_{\text{уст}}$ ) длительность переходного процесса в системе с исходной структурой равна примерно 0,7 с. Тогда переходный процесс в системе с узлом адаптивного управления (пунктирная линия на рис. 8) протекает без перерегулирования, однако его длительность увеличилась до значения 0,69 с.

В итоге, рассмотренный в статье механизм управления переходным процессом в двухканальной автоматической системе способен обеспечить компромисс между требованиями к качеству функционирования системы в статическом и переходном режимах. В свою очередь, наличие корреляции между длительностью переходного процесса и перерегулированием предоставляет возможность для адаптации системы к внешним условиям. Дополнительный позитивный фактор, не рассмотренный в статье, заключается в том, что оптический модулятор позволяет обеспечить гальваническую развязку каналов по питанию. Это важно в тех случаях, когда исполнительный механизм, входящий в состав основного канала, и дополнительный канал, играющий роль корректирующего, питаются от источников с различным видом энергии либо от источников с существенно разными уровнями энергии одного вида.

Список литературы

1. Парамзин А.П. Оптимизация частотных характеристик в замкнутых системах аддитивной коррекции погрешностей по входу /А.П. Парамзин, В.М. Сергеев // Проблемы технического прогресса и экологии в строительстве и других отраслях экономики Казахстана: Сб. науч. тр. – Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 1998.
2. Парамзин А.П. Исследование двухканальной автоматической системы с переменными параметрами // Вестник ВКГТУ. – 2009. – № 4. – Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2009. – С. 170-173.
3. Парамзин А.П. Алгоритм управления переходными процессами в двухканальной системе с активным корректором // Вестник ВКГТУ. – 2011. – № 1. – Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2011. – С. 78-82.
4. Парамзин А.П. Адаптивное управление переходным процессом в двухканальной системе // Вестник ВКГТУ. – 2011. – № 3. – Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2011. – С. 50-55.
5. Парамзин А.П. Адаптивное управление переходным процессом в двухканальной системе / А.П. Парамзин, О.Е. Акболин // Вестник ВКГТУ. – 2012. – № 3. – Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2012. – Ч. 2. – С. 16-20.
6. Парамзин А.П. Алгоритмы адаптивного управления переходным процессом в двухканальной системе / А.П. Парамзин, О.Е. Акболин // Вестник ВКГТУ. – 2012. – № 4. – Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2012. – С. 121-128.

Получено 15.05.2013

---

УДК 004.942

**А.В. Пененко**

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
г. Новосибирск

**А.Т. Кусаинова**

ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ПРИМЕСИ  
В АТМОСФЕРЕ НА ОСНОВЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ДИСКРЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ  
ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ**

В настоящее время перспективным направлением решения проблем экологии и охраны окружающей среды является разработка информационно-аналитических систем, математическое обеспечение которых основано на применении численных алгоритмов моделирования распространения загрязняющего вещества [1, 2]. Особое внимание уделяется алгоритмам, которые могут оценивать состояние системы в реальном времени. В задачах усвоения данных требуется спрогнозировать значение функции состояния модели в соответствии с имеющимися данными наблюдений, то есть оценить «реальное» состояние системы, используя математическую модель, априорную информацию и данные измерений.

Для построения согласованных численных схем в работе применяется вариационный принцип построения численных схем [1]. Вариационный подход также используется и для решения задач усвоения данных [3]. В отличие от прямых задач моделирования распространения загрязняющих примесей, при решении задач усвоения данных, модели процессов дополняются моделями наблюдений, которые представляют описание наблюдаемых величин в терминах функций состояния и параметров моделей процессов. Это делает процедуры усвоения данных корректными с математической точки зрения и повышает информативность наблюдений. В технологию моделирования с помощью функционалов включаются данные наблюдений, которые выражают степень близости измеряемых величин и их образов, вычисляемых по моделям процессов и измерений.

Тематика вариационного усвоения данных довольно активно развивается. В настоящей работе представлен алгоритм усвоения данных на примере одномерной нестационарной двухслойной дискретно-аналитической численной схемы для модели конвекции-диффузии примеси в атмосфере. Работа является продолжением работ, посвященных вариационным принципам построения численных схем и схем усвоения данных. В ней совмещены дискретно-аналитические схемы [4, 5] и алгоритмы последовательного усвоения данных в реальном времени [6, 7]. Выбор двухслойной численной схемы является продвижением в сторону схем дискретно-аналитического типа высокого порядка аппроксимации по времени. Факт применения разработанной схемы усвоения данных в реальном времени демонстрирует применение неявной схемы усвоения данных для достаточно сложной численной модели, коей является представленная здесь двухслойная по времени дискретно-аналитическая схема.

*Нестационарная двухслойная дискретно-аналитическая численная схема.* В качестве модели процесса переноса примеси в атмосфере рассматривается краевая задача для нестационарного уравнения переноса с диффузией на ограниченном отрезке  $(0, L)$  по пространству:

$$L\phi \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} - u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + c\phi - f(x, t), \quad (1)$$

со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + a\phi &= q_L, & x &= 0 \\ \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + a\phi &= q_R, & x &= L \end{aligned} \quad (2)$$

и начальными данными:

$$\phi = \phi_0, \quad t < 0, \quad (3)$$

где  $\phi$  – функция концентрации примеси,  $\phi_0$  – начальное распределение концентрации,  $\mu$  – коэффициент турбулентного обмена,  $u$  – скорость переноса примесей,  $c$  – коэффициент распада,  $f(x, t)$  – функция источников,  $0 < x < L$  – интервал изменения по пространству,  $0 < t < M$  – интервал изменения по времени,  $a$  – заданные коэффициенты,  $q_L$ ,  $q_R$  –

заданные функции. Также считаем, что функция  $\phi$  и агрегат  $\mu \frac{d\phi}{dx}$  – непрерывны по пространству. Введем в пространственно-временной области равномерную сетку с шагами  $\Delta t$  и  $\Delta x$ , соответственно, и числом узлов  $M$  и  $N$ , соответственно. Приближим коэффициенты уравнения кусочно-постоянными функциями.

Решению задач такого вида посвящена обширная литература, в фокусе нашего внимания будет подход к построению дискретно-аналитических численных схем для данного уравнения [5]. Для аппроксимации производной по времени была выбрана двухслойная аппроксимация второго порядка из [8]. Исследуем порядок аппроксимации:

$$\begin{aligned} \phi^j &= \phi^{j+1} - \Delta t \frac{\partial \phi^{j+1}}{\partial t} + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi^{j+1}}{\partial t^2} + \frac{(-\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}(\tau_1), \tau_1 \in (t_j, t_{j+1}), \\ \phi^{j-1} &= \phi^{j+1} - (2\Delta t) \frac{\partial \phi^{j+1}}{\partial t} + \frac{(-2\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi^{j+1}}{\partial t^2} + \frac{(-2\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}(\tau_2), \tau_2 \in (t_{j-1}, t_{j+1}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\phi^j = \phi(., t^j)$ .

Следовательно,

$$\frac{\frac{3}{2}\phi^{j+1} - 2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1}}{\Delta t} = \frac{\partial \phi^{j+1}}{\partial t} + \frac{1}{3}(\Delta t)^2 \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}(\tau_1) + \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}(\tau_2) \right), \quad (5)$$

$$\tau_1 \in (t_j, t_{j+1}), \tau_2 \in (t_j, t_{j+1}).$$

Подставляя (5) в (1), получим дифференциально-разностное уравнение:

$$-\Delta t \mu \frac{\partial \phi^{j+1}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \Delta t \mu \frac{\partial \phi^{j+1}}{\partial x} - \left( \frac{3}{2} + \Delta t c \right) \phi^{j+1} = -\Delta t f^{j+1}(x, t) + (-2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1}), \quad (6)$$

где  $\Delta t$  - шаг по времени,  $j$  - номер шага по времени.

Для построения дискретных аппроксимаций воспользуемся интегральным тождеством, полученным после умножения (6) на достаточно гладкую сопряженную функцию  $\phi^*$  и двух интегрирований по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( -\frac{\partial(\Delta t \mu) \phi^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \Delta t \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) \phi^{j+1} dx + \Delta t \mu \phi \phi^* \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \Delta t \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \phi^* \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \Delta t \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \phi \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \left( \frac{3}{2} + \Delta t c \right) \phi^{j+1} + \Delta t f^{j+1}(x, t) - (-2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1}) \right) \phi^* dx = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Кратко опишем алгоритм получения дискретно-аналитических схем из (7):

1. Собираем интегральные слагаемые, содержащие  $\phi^{j+1}$ , и приравниваем подынтегральное выражение к нулю:

$$-\left( \frac{3}{2} + \Delta t c \right) \phi^* - \frac{\partial(\Delta t \mu) \phi^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\Delta t \mu) \frac{\partial \phi^*}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

2. Рассматриваем интервалы  $(x_{i-1}, x_i)$  и  $(x_i, x_{i+1})$ , на них ставим краевые задачи для уравнения (8) с условиями:

$$\begin{cases} \phi^*(x_{i-1}) = 0 \\ \phi^*(x_i) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi^*(x_i) = 1 \\ \phi^*(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

соответственно. Обозначим решения этих задач через  $\phi_L^*, \phi_R^*$ .

3. Решения краевых задач для сопряженной функции подставим в (7).

4. Получаем тождества:

$$\Delta t \mu \phi \phi^* \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \Delta t \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_i} - \Delta t \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \phi \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\Delta t f^{j+1}(x, t) - (-2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1})) \phi^* dx = 0, \quad (10)$$

$$\Delta t \mu \phi \phi^* \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \Delta t \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_i} - \Delta t \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \phi \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta t f^{j+1}(x, t) - (-2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1})) \phi^* dx = 0. \quad (11)$$

5. Полученные тождества для интервалов  $1 \leq i \leq N-2$  суммируем с учетом непрерывности  $\phi$  и  $\mu \frac{d\phi}{dx}$ . В приграничных интервалах  $i=0$  и  $i=N-1$  воспользуемся краевыми условиями.



выми условиями:

$$\Delta t u \phi \phi^* \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \Delta t (q_L - a \phi \Big|_{x_i}) - \Delta t \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \phi \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\Delta t f^{j+1}(x, t) - (-2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1})) \phi^* dx = 0, \quad i = 0, \quad (12)$$

$$\Delta t u \phi \phi^* \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \Delta t (q_R - a \phi \Big|_{x_i}) - \Delta t \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \phi \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\Delta t f^{j+1}(x, t) - (-2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1})) \phi^* dx = 0, \quad i = N-1 \quad (13)$$

6. Правая часть определяется формулами:

$$F_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) \phi_R^*(x) dx - q_L, \quad i = 1, \quad (14)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) \phi_R^*(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) \phi_R^*(x) dx, \quad i = 2, \dots, N-2, \quad (15)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) \phi_R^*(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) \phi_R^*(x) dx, \quad i = 2, \dots, N-2. \quad (16)$$

Интегралы в правых частях (12) и (13) аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) \phi_L^*(x) dx &= \frac{S(x_{i-1}) + S(x_i)}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_L^*(x) dx = \\ &= \frac{S(x_{i-1}) + S(x_i)}{2} \left( \frac{\Delta t}{3 + 2c\Delta t} \right) \left( p \left( \coth \left( \frac{p\Delta x}{2\mu} \right) - e^{\frac{u\Delta x}{2\mu}} \operatorname{csch} \left( \frac{p\Delta x}{2\mu} \right) \right) + u \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) \phi_R^*(x) dx &= \frac{S(x_{i-1}) + S(x_i)}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_R^*(x) dx = \\ &= \frac{S(x_i) + S(x_{i+1})}{2} \left( \frac{\Delta t}{3 + 2c\Delta t} \right) \left( p \left( \coth \left( \frac{p\Delta x}{2\mu} \right) - e^{\frac{-u\Delta x}{2\mu}} \operatorname{csch} \left( \frac{p\Delta x}{2\mu} \right) \right) - u \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $p = \sqrt{u^2 + 4c\mu + \frac{6\mu}{\Delta t}}$ ,  $S(x) = \Delta t f^{j+1}(x, t) - (-2\phi^j + \frac{1}{2}\phi^{j-1})$ .

7. Собираем  $\phi_{i-1} := \phi^{j+1}(x_{i-1})$ ,  $\phi_i := \phi^{j+1}(x_i)$ ,  $\phi_{i+1} := \phi^{j+1}(x_{i+1})$  и получаем трехточечную схему уравнений:

$$B_i \phi_i - C_i \phi_{i+1} = F_i, \quad i = 0, \quad (19)$$

$$-A_i\phi_{i-1} + B_i\phi_i - C_i\phi_{i+1} = F_i, \quad 1 \leq i \leq N-2, \quad (20)$$

$$-A_i\phi_{i-1} + B_i\phi_i = F_i, \quad i = N-1, \quad (21)$$

где  $\phi_i = \phi^{j+1}(x_i)$  и

$$A_i = \frac{(e^{\frac{\Delta x(u_L\Delta t + \sqrt{p_L^2\Delta t^2})}{2\Delta t\mu_L}} \sqrt{p_L^2\Delta t^2})}{(-1 + e^{\frac{\Delta x\sqrt{p_L^2\Delta t^2}}{\Delta t\mu_L}})}, \quad (22)$$

$$B_i = u_L\Delta t - u_R\Delta t + \frac{1}{2}(-u_L\Delta t + \sqrt{p_L^2\Delta t^2} \operatorname{Coth}(\frac{\Delta x\sqrt{p_L^2}}{2\mu_L})) + \frac{1}{2}(u_R\Delta t + \sqrt{p_R^2\Delta t^2} \operatorname{Coth}(\frac{\Delta x\sqrt{p_R^2}}{2\mu_R})), \quad (23)$$

$$C_i = -\frac{e^{\frac{\Delta x(u_R\Delta t + \sqrt{p_R^2\Delta t^2})}{2\Delta t\mu_R}} \sqrt{p_R^2\Delta t^2}}{-1 + e^{\frac{\Delta x\sqrt{p_R^2\Delta t^2}}{\Delta t\mu_R}}}. \quad (24)$$

Здесь  $u_L, \mu_L, p_L$  - значения соответствующих параметров на интервале  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $u_R, \mu_R, p_R$  - значения соответствующих параметров на интервале  $(x_i, x_{i+1})$ .

*Замечание.* Так как в формулы входят экспоненты, вычисление которых с большими показателями затруднительно на ЭВМ, то для получения расчетных формул была произведена группировка экспонент, в частности с помощью гиперболического синуса:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (25)$$

8. Полученную трехточечную схему с найденными коэффициентами решаем с помощью метода прогонки.

*Проверка сходимости численной схемы.* Сходимость численно проанализирована на основе сравнения с известными аналитическими решениями краевой задачи (1)-(3). В частности, была рассмотрена функция:

$$\Phi(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\mu\pi(t-t_0)}} e^{\frac{((x-x_0)-u(t-t_0))^2}{4\mu(t-t_0)}}, \quad (26)$$

где  $Q>0$  – мощность источника, моделирующая поле концентрации примеси от точечного источника, сработавшего в точке с координатой  $x_0$  в момент времени  $t_0$ . Она является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (27)$$

Краевые и начальные условия вычисляются из определения функции (26) при  $t=0$  и  $x=0, L$ . График относительной ошибки численного решения показан на рис. 1.

*Последовательное вариационное усвоение данных.* Предположим, что значения поля концентрации измеряются в некотором конечном наборе точек по пространству и по времени. Обозначим через  $I_i^{j+1}$  результат измерений в  $j$ -й момент времени в точке сетки с индексом  $i$ , а через  $M_i^{j+1}$  - маску системы измерений. Эта сеточная функция равна 1 в

точках пространственно-временной сетки, где доступны данные измерений, и 0 - в противном случае. Для продолжения поля концентрации от точек наблюдения воспользуемся моделью (6) с краевыми условиями (2), и алгоритмом решения задачи последовательного вариационного усвоения данных [6, 7].

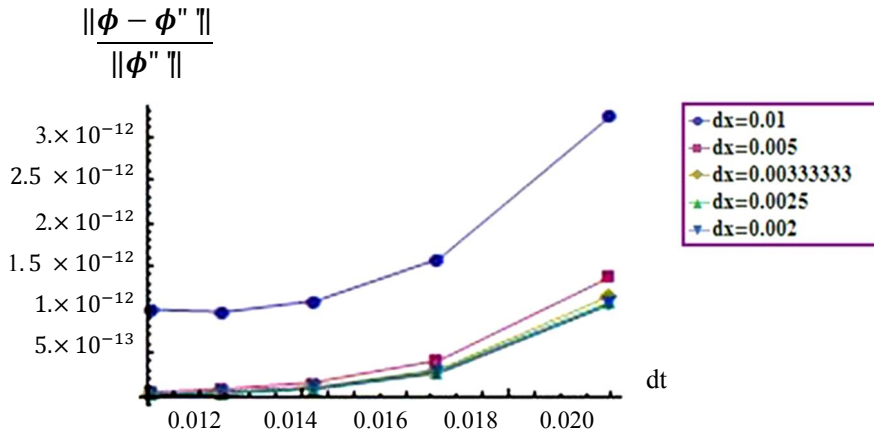


Рисунок 1 - Относительные ошибки численного решения в сравнении с точным аналитическим решением (26) для различных значений шага по времени и при различных шагах по пространству

1. Для аппроксимации априорной модели воспользуемся неявной схемой (19)-(21) добавив в её правую часть функцию управления  $\xi$ . В результате на  $j + 1$  шаге по времени получим:

$$\begin{aligned} -A_i \phi_{i+1}^{j+1} + B_i \phi_i^{j+1} &= \phi_i^j + \Delta t \xi_i^{j+1}, i=0, \\ -A_i \phi_{i+1}^{j+1} + B_i \phi_i^{j+1} - C_i \phi_{i-1}^{j+1} &= \phi_i^j + \Delta t \xi_i^{j+1}, i=1, \dots, N-2, \\ B_i \phi_i^{j+1} - C_i \phi_{i-1}^{j+1} &= \phi_i^j + \Delta t \xi_i^{j+1}, i=N-1. \end{aligned} \quad (28)$$

2. Подстройку модели будем производить в соответствии с поступающими данными наблюдений  $I_i^{j+1}$ . Для этого минимизируем функционал:

$$\Phi(\phi^{j+1}, \xi^{j+1}) = \sum_{i=0}^{N-1} (\phi_i^{j+1} - I_i^{j+1})^2 M_i^{j+1} \Delta t + \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_i^{j+1})^2 \Delta t. \quad (29)$$

3. Для удобства положим  $C_0 = A_{N-1} = 0$ . Включая модель посредством множителей Лагранжа  $\psi_i$  в функционал, получим расширенный функционал:

$$\bar{\Phi}(\phi^{j+1}, \xi^{j+1}, \psi) = \left( \sum_{i=0}^{N-1} (\phi_i^{j+1} - I_i^{j+1})^2 M_i^{j+1} + \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_i^{j+1})^2 \right) \Delta t + \sum_{i=0}^{N-1} (-\Delta t \xi_i^{j+1} - A_i \phi_{i+1}^{j+1} + B_i \phi_i^{j+1} - C_i \phi_{i-1}^{j+1} - \phi_i^j) \psi_i. \quad (30)$$

В соответствии с вариационным принципом запишем условие стационарности расширенного функционала:

$$\partial_{\psi_i} \bar{\Phi}(\xi) = 0, \quad (31)$$

$$\partial_{\xi_i^{j+1}} \bar{\Phi}(\xi) = 0, \quad (32)$$

$$\partial_{\phi_i^{j+1}} \bar{\Phi}(\xi) = 0. \quad (33)$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2M_i^{j+1}\Delta t(\phi_i^{j+1} - I_i^{j+1}) + B_i\psi_i - C_{i+1}\psi_{i+1} &= 0, i = 0, \\ 2M_i^{j+1}\Delta t(\phi_i^{j+1} - I_i^{j+1}) - A_{i-1}\psi_{i-1} + B_i\psi_i - C_{i+1}\psi_{i+1} &= 0, i = 1, \dots, N-2, \\ 2M_i^{j+1}\Delta t(\phi_i^{j+1} - I_i^{j+1}) - A_{i-1}\psi_{i-1} + B_i\psi_i &= 0, i = N-1 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} -\Delta t\xi_i^{j+1} - A_i\phi_{i+1}^{j+1} + B_i\phi_i^{j+1} - \phi_i^j &= 0, i = 0, \\ -\Delta t\xi_i^{j+1} - A_i\phi_{i+1}^{j+1} + B_i\phi_i^{j+1} - C_i\phi_{i-1}^{j+1} - \phi_i^j &= 0, i = 1, \dots, N-2, \\ -\Delta t\xi_i^{j+1} + B_i\phi_i^{j+1} - C_i\phi_{i-1}^{j+1} - \phi_i^j &= 0, i = N-1, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} 2\xi_i^{j+1}\Delta t - \Delta t\psi_i &= 0, i = 0, \\ 2\xi_i^{j+1}\Delta t - \Delta t\psi_i &= 0, i = 1, \dots, N-2, \\ 2\xi_i^{j+1}\Delta t - \Delta t\psi_i &= 0, i = N-1. \end{aligned} \quad (36)$$

Систему уравнений можно представить в виде следующих матричных выражений:  
– при  $i = 0$

$$\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{i+1}^{j+1} \\ \psi_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_i & -\frac{\Delta t}{2} \\ 2M_i^{j+1}\Delta t & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i^{j+1} \\ \psi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_i^j \\ 2M_i^{j+1}\Delta t I_i^{j+1} \end{pmatrix}; \quad (37)$$

– при  $i = 1, \dots, N-2$

$$-\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{i+1}^{j+1} \\ \psi_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_i & -\frac{\Delta t}{2} \\ 2M_i^{j+1}\Delta t & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i^{j+1} \\ \psi_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & A_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{i-1}^{j+1} \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_i^j \\ 2M_i^{j+1}\Delta t I_i^{j+1} \end{pmatrix}; \quad (38)$$

– при  $i = N-1$ ,

$$\begin{pmatrix} B_i & -\frac{\Delta t}{2} \\ 2M_i^{j+1}\Delta t & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i^{j+1} \\ \psi_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_i & 0 \\ 0 & A_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{i-1}^{j+1} \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_i^j \\ 2M_i^{j+1}\Delta t I_i^{j+1} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Для решения полученной системы применяем матричную прогонку.

**Численный эксперимент.** Реализация алгоритма усвоения данных для одномерной нестационарной двухслойной дискретно-аналитической численной схемы выполняется с помощью C++. Для иллюстрации работы полученных алгоритмов были проведены серии численных экспериментов. Выберем параметры для нестационарной двухслойной дискретно-аналитической численной схемы: коэффициент турбулентного обмена  $\mu=0,05 \text{ м}^2/\text{сек}$ , число точек по времени  $M=100$ , число точек по пространству  $N=100$ . Рассматривались следующие варианты для скорости переноса:  $u_1 = 0,5 \text{ м/сек}$ ,  $u_2 = 0 \text{ м/сек}$ ,  $u_3 = -0,5 \text{ м/сек}$ . Результат работы представлен на графиках рис. 2. В этом примере система измерений состояла из трех стационарных постов. Их расположения в пространстве и времени для наглядности отмечены игольчатыми функциями. Они расположены на одинаковых расстояниях друг от друга по пространству и измеряют концентрацию примесей через равные промежутки времени.

*Замечание.* В ходе численных экспериментов было обнаружено, что процедура усвоения данных может накладывать дополнительные требования на численную схему для базовой модели физических процессов. В частности, интерес заслуживают режимы работы алгоритма в случаях разрывного характера поступающих данных измерений.

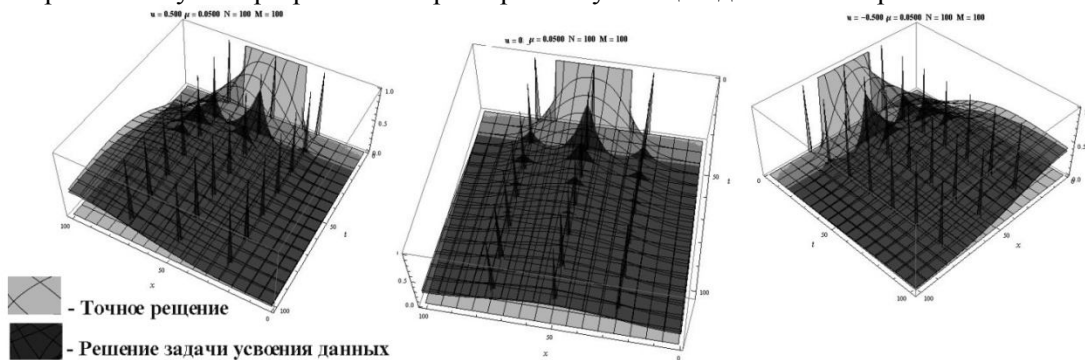


Рисунок 2 - Результат решения задачи усвоения данных относительно «реального» состояния для различных направлений скорости ветра

*Заключение.* Таким образом, проверена возможность реализации алгоритма усвоения данных на основе двухслойной дискретно-аналитической схемы. Численно исследована сходимость схемы на основе сравнения с известными аналитическими решениями. Построен алгоритм усвоения данных концентрации примеси для одномерной нестационарной двухслойной дискретно-аналитической численной схемы, проведены серии численных экспериментов. Далее планируется работа по развитию предложенной технологии совместного использования модели конвекционно-диффузионного переноса и данных наблюдений для решения многомерных задач.

#### Список литературы

1. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. - Л.: Гидрометеоприздат, 1981. - 352 с.
2. Пененко В.В. Модели и методы для задач охраны окружающей среды / В.В. Пененко, А.Е. Алоян. - Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1985. - 256 с.
3. Penenko V.V. Variational methods of data assimilation and inverse problems for studying the atmosphere, ocean, and environment // Numerical Analysis and Applications. - 2009. - V. 2. - № 4. - 341-351.
4. Penenko V.V., Tsvetova E.A. "Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications", J. of Computational and Applied Mathematics, 226 (2009). - 319-330.
5. Пененко В.В. Численные схемы для адвективно-диффузионных уравнений с использованием локальных задач // Ротапринт ВЦ СО РАН. - Новосибирск. - 90 с.
6. Пененко В.В. Вариационное усвоение данных в реальном времени // Вычислительные технологии. - 2005. - Т. 10. - № 8. - С.9-20.
7. Пененко А.В. Некоторые теоретические и прикладные вопросы последовательного вариационного усвоения данных // Выч. тех. - Т. 11. - Ч. 2. - (2006). - 35-40.
8. Thomas B.J. Smoothing properties of implicit finite difference methods for a diffusion equation in maximum norm, SIAM J. NUMER. ANAL., volume 47, number 4, p. 2476-2495.
9. Penenko V., Baklanov A., Tsvetova E., Mahura A. Direct and Inverse Problems in a Variational Concept of Environmental Modeling // Pure Appl. Geophys. DOI: 10.1007/s00024-011-0380-5, (2012) 169: 447-465.

Получено 20.05.2013

