ISSN 1561-4212. ВЕСТНИК ВКГТУ, 2007, № 2

УДК 512 + 519.3:330 + 695

С.В. Коротеев
Зыряновский центр ВКГТУ, г. Зыряновск

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМБИНИРОВАННОЙ ПОЛИТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕСПЕРЕБОЙНОГО АВТОБУСНОГО ДВИЖЕНИЯ

Принятие решений по распределению ресурсов является неизбежным при любом виде хозяйственной деятельности предприятия. Именно задачи распределения ресурсов привели к зарождению в начале 1930-х годов математического моделирования как отдельной дисциплины. Бурное развитие математического аппарата привело к тому, что большое количество задач распределения ресурсов может быть формализовано и решено математическими методами. Но и сегодня находятся все новые и новые проблемы, требующие формализации, разработки методов поиска оптимальных решений, обоснования сходимости методов, устойчивости решений. В настоящее время математики работают с моделями принятия решений при неполной информации, в условиях риска, другими стохастическими задачами. Задачи принятия решений в условиях неполноты информации рассматриваются для различных отраслей народного хозяйства, например для горнорудных предприятий [1].

Рассмотрим следующую постановку задачи. В результате тендера автотранспортное предприятие (АТП) получило лицензию на обслуживание нескольких городских автобусных маршрутов. Но по условиям тендера к каждому городскому маршруту «в нагрузку» добавляется требование обеспечения автобусного сообщения по конкретному пригородному маршруту.

Городские маршруты дают хорошую прибыль, а пригородное сообщение не выгодно по нескольким причинам. Во-первых, наполняемость автобуса достаточна низкая, не обеспечивающая даже окупаемость горюче-смазочных материалов. Во-вторых, загородные дороги низкого качества, что ведет к дополнительной амортизации автобусного парка. В-третьих, в зимнее время требуется производить очистку дорожного полотна от снега. (Даже учитывая, что этим занимается другое предприятие, нужно принять во внимание дополнительное время использование транспорта). В-четвертых, сообщение по пригородным маршрутам должно осуществляться так, чтобы это было удобно жителям пригородных населенных пунктов, то есть, как правило, в часы, когда городские маршруты могли бы давать дополнительную выручку.

Но, несмотря на неудобства и нерентабельность, АТП обязано поддерживать пригородные маршруты на уровне, не вызывающем нареканий со стороны местного населения, и особенно структур, следящих за качеством оказания транспортных услуг и соблюдением условий тендера.

Методами агрегирования параметров и критериев качества функционирования маршрута получим условную величину, называемую состоянием или уровнем развития. Общие вопросы многокритериальной оптимизации рассмотрены [2].

Пусть $t \in [1,T]$ – дискретные периоды принятия решения по распределению ресурсов автотранспортного предприятия (например месяцы);

n – количество городских и пригородных маршрутов, т.е. возможных направлений вложения и использования имеющихся ресурсов;

$i = 1,2, ..., n$ – условные порядковые номера маршрутов, причем уровень развития (состояние) каждого из маршрутов не зависит от развития других;

$c(t) = \varphi(t) + \psi(t)$ – определенное количество ресурсов, причем

$\varphi(t)$ – ресурсы, подлежащие распределению в данный момент времени t,

$\psi(t)$ – ресурсы, направляемые в резерв в виде накопительного или резервного фонда автотранспортного предприятия;

$u_i(t)$ – количество ресурсов, вкладываемых в i-й маршрут в момент времени t;

$y_i(t)$ – уровень развития (состояние) i-го маршрута в момент времени t;

$\overline{y}_i$ – эталонное состояние i-го маршрута;

$S_i(t)$ – эффективность вложения средств в i-й маршрут в момент времени t, т.е. прирост на единицу вкладываемых ресурсов.

$d_i(t)$ – внешний фактор, который обычно принимает отрицательное значение.

Необходимо найти наилучшее распределение имеющихся ресурсов по T периодам планирования по всем n маршрутам.

Распределение ресурсов называется оптимальным, если при его использовании все n маршрутов в течение каждого из T периодов планирования находятся в эталонном состоянии.

Но распределение ресурсов, как правило, производится в обстановке его дефицита. Поэтому достижение и постоянное поддержание эталонного состояния по всем направлениям одновременно не реально. Поэтому речь идет не об оптимальном, а наилучшем с точки зрения некоторой политики.

Различие между текущим и эталонным состояниями системы будем называть диспропорцией системы.

В нашем случае система включает несколько маршрутов (направлений вложения ресурсов), поэтому, говоря о величине диспропорции, логично говорить с точки зрения некоторой применяемой политики распределения ресурсов. Соответственно с политикой определяется наилучшее состояние системы и, соответственно, наилучшее распределение ресурсов.

Существует достаточно большое количество различных политик распределения ресурсов. Краеугольным камнем теории принятия решений в многокритериальном распределении является принцип оптимальности Парето. Альтернатива распределения ресурсов является оптимальной по Парето, если всякая другая альтернатива, являющаяся более предпочтительной для одних объектов вложения ресурсов, в то же время будет менее предпочтительной для оставшихся объектов.

Согласно принципу оптимальности Парето, никогда не следует выбирать альтернативу, которая не является Парето-оптимальной, иначе при подобном подходе всегда можно увеличить состояние, по крайней мере, некоторых направлений, не ущемляя при этом интересы других.

Одними из первых были формализованы классические принципы распределения – эгалитаризм и утилитаризм.

Распределение ресурсов (средств), при котором достигается определенное эталонное состояние развития направлений (объектов) в результате максимально быстрого уничтожения диспропорций в развитии направлений (объектов), является наилучшим с точки зрения эгалитаризма.

Распределение ресурсов (средств), при котором суммарное развитие направлений (объектов) будет максимальным, является наилучшим с точки зрения утилитаризма.

При длительном использовании одного и того же классического принципа неизбежны социальные и экономические кризисы. Таким образом, необходимо использовать эти принципы комбинационно. Целесообразно рассматривать возможность многокритериального компромиссного выбора, компонентами которого являются два классических метода распределения (эгалитаризм и утилитаризм). Также возможны и другие подходы к распределению ресурсов. Так на практике используются:

- пропорциональное распределение, при котором финансовый поток по каждому направлению пропорционален разности эталонного состояния и текущей степени развития данного направления;

- равномерное распределение, целью которого является постепенное сглаживание диспропорции в развитии направлений;

- распределение ресурсов с гарантированным минимумом, когда каждое из направлений поддерживается на том фиксированном уровне финансирования, который бы позволил объекту поддерживать свою работоспособность в рассматриваемом периоде;

- политика «латания дыр», при которой в первую очередь удовлетворяются потребности в ресурсах того направления, чье отставание от эталонного состояния наибольшее.

На практике возможно комбинирование этих политик. Так, в рассматриваемой задаче целесообразно действовать по следующей схеме: сначала все направления получают средства, необходимые для поддержания работоспособного состоянии (т.е. в состоянии гарантированного минимума), а остальные средства направить в пользу наиболее прибыльных направлений. В нашем случае необходимо поддержать все маршруты (как городские, так и пригородные) в состоянии, обеспечивающем минимально допустимый уровень обеспечения работоспособности. После этого оставшиеся средства направляются на развитие наиболее прибыльных маршрутов.

Данную политику логично называть политикой классического утилитаризма с соблюдением политики гарантированного минимума.

Математическая модель данной задачи примет вид:

Найти распределение ресурсов $u_i(t)$, $i = 1,2,...,n$, $t = 1,2,...,T$, удовлетворяющее условиям

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \le c(t) = \varphi(t) + \psi(t); \tag{1}$$

$$y_i(t) = y_i(t-1) + S_i(t)u_i(t) + d_i(t); \tag{2}$$

$$y_i(t) > 0 ; \tag{3}$$

$$y_i(t) \ge y_i(t-1) ; \tag{4}$$

$$S_i(t) \ge 0 ; \tag{5}$$

$$c(t) \ge 0 ; \tag{6}$$

$$u_i(t) \ge 0; \tag{7}$$

$$P_i(t) \geq P_i(t-1)\,; \tag{8}$$

$$0 < P_i(t) \leq y_i(t) \leq \overline{y}_i = y_i(T)\,; \tag{9}$$

доставляющее минимальное значение целевому функционалу

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i}\right) \to \min\,. \tag{10}$$

Ограничение (1) имеет следующее толкование: суммарные средства, расходуемые на все n направлений, не могут превысить величины имеющихся наличных средств (состоящих из расходуемых средств и сбережений). Ограничение (2) означает, что уменьшение величины диспропорции в развития объекта происходит пропорционально вкладываемым средствам с учетом внешнего фактора. Текущее состояние любого объекта, согласно ограничению (3), всегда положительно. Новое состояние любого объекта не хуже его предшествующего состояния, следует из ограничения (4). Согласно ограничению (5), эффективность вложений в любое из направлений не отрицательно. Средства для распределения не могут быть отрицательными, что следует из ограничения (6). Вложения в любое из направлений, согласно ограничению (7), не отрицательны. Состояние гарантированного минимума для каждого направления, согласно ограничению (8), является неубывающей функцией. Условие (9) имеет следующую трактовку: состояние гарантированного минимума всегда положительно; любое из направлений должно находиться в состоянии не худшем, чем состояние гарантированного минимума; ни одно из направлений в своем развитии не перерастает эталонное состояние; в момент времени Т система должна оказаться в эталонном состоянии (для данного объема финансирования). Целевая функция (10) означает, что суммарная диспропорция всех направлений должна быть минимальной.

Если распределение ресурсов является разовым актом, то задача распределения ресурсов представима в следующем виде:

Найти распределение ресурсов $U = u_i$, $i = 1,2,...,n$, удовлетворяющее условиям

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leq c; \tag{11}$$

$$y_i = y_{i0} + S_i u_i + d_i; \tag{12}$$

$$y_i \geq 0\,; \tag{13}$$

$$y_i \geq y_{i0}\,; \tag{14}$$

$$S_i \geq 0\,; \tag{15}$$

$$c \geq 0\,; \tag{16}$$

$$u_i \geq 0; \tag{17}$$

$$0 < P_i \leq y_i \leq \overline{y}_i\,. \tag{18}$$

доставляющее минимальное значение целевому функционалу

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i}\right) \to \min\,. \tag{19}$$

Но на практике чаще применима схема, когда планирование производится в течение

ISSN 1561-4212. ВЕСТНИК ВКГТУ, 2007, № 2

нескольких периодов.

Распределение ресурсов зачастую ведется в условиях неполноты информации. Лицо, принимающее решение, практически не имеет информации о многих внешних факторах, влияющих на компоненты системы. К таким факторам относят природные и техногенные катастрофы. О будущем состоянии рынка ГСМ, транспортных средств, автозапчастей, цен на транспортные услуги он имеет расплывчатую информацию. О некоторых факторах (эффективность вложений, ресурсоемкость) имеются лишь более или менее обоснованные прогнозы. Поэтому следует рассматривать стохастические модели принятия решений.

В случае с распределением ресурсов между направлениями вложения заранее не известна эффективность вложения ($S_i(t,\omega)$), не известны возможные трудности с внедрением проектов ($d_i(t,\omega)$), могут изменяться объемы поступаемых ресурсов.

Тогда задача распределения ресурсов между всеми (городскими и пригородными) маршрутами сводится к задаче принятия решений распределения ресурсов с классическим утилитарным принципом выбора при соблюдении политики гарантированного минимума с вероятностными ограничениями:

$$M\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i}\right)\right\} \to \min;$$

$$P_1\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_i(t) \le c_i(t,\omega)\right\} \ge \alpha_1,\ \ 0,5 < \alpha_1 < 1;$$

$$P_2\{y_i(t+1) = y_i(t) + S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ \ 0,5 < \alpha_2 < 1;$$

$$y_i(t) > 0\ ;\ y_i(t) \ge y_i(t-1)\ ;\ S_i(t) \ge 0\ ;\ c(t) \ge 0\ ;\ u_i(t) \ge 0;$$

$$P_i(t) \ge P_i(t-1)\ ; 0 < P_i(t) \le y_i(t) \le \overline{y}_i = y_i(T)\ ;$$

Здесь a_{ij} – элементы матрицы A – матрицы условий задачи, m – количество потоков вложения ресурсов. Если вложение ресурсов производится однократно в течение каждого периода планирования, то $m=1$. Величины S_i, d_i, c_i (i=1,2, ..., n) являются случайными на множестве Ω реализации случайного параметра ω. Причем, справедливо

$$a_{ij} \ge 0 (i = 1,..,n; j = 1,..,m)$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1\ \ (i = 1,...,n)\ .$$

Для решения поставленной задачи необходимо найти ее детерминированный эквивалент. Введем следующие обозначения:

$$y_i(t+1) - y_i(t) = b_i(t),$$

$$S_i(t,\omega)u_i(t) + d_i(t,\omega) = h_i(t,\omega).$$

Тогда исходная задача примет вид:

$$M\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i}\right)\right\} \to \min; \qquad (20)$$

$$P_1\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_i(t) \le c_i(t,\omega)\right\} \ge \alpha_1,\ \ 0{,}5 < \alpha_1 < 1; \tag{21}$$

$$P_2\{b_i(t) = h_i(t,\omega)\} \ge \alpha_2,\ \ 0{,}5 < \alpha_2 < 1; \tag{22}$$

$$0 < P_i(t) = y_i(t+1) \le \overline{y}_i\,;\ P_i(t) \ge P_i(t-1)\,; \tag{23}$$

$$u_i(t) \ge 0,\ \ y_i(1) > 0,\ \ b_i(t) \ge 0,\ \ c_i(t,\omega) > 0, \tag{24}$$

$$i = \overline{1,n},\ \ \omega \in \Omega,\ \ t \in [1,T]. \tag{25}$$

Теорема 1. Задача принятия решения с утилитарным оптимизационным критерием при условии гарантированного минимума с вероятностными условиями (20)-(25), решение которой определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче линейного программирования при детерминированной матрице $A = \|a_{ij}\|$ и случайных векторах ограничений $C=\{c_i\}$, $H=\{h_i\}$.

Доказательство:

Пусть $\varphi = (c_1, c_2, ..., c_n)$ и $\psi = (h_1, h_2, ..., h_n)$ - совместная плотность распределения составляющих случайных векторов C и H. Плотности распределения отдельных компонент c_i $(i = 1,2,...,n)$ вектора C и компонент $h_i\,(i = 1,2,...,n)$ вектора H соответственно равны

$$\varphi_i(c_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{n-1\,раз}{...} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(c_1, c_2, ..., c_n) \prod_{i \ne j} dc_j \quad \text{и}$$

$$\psi_i(h_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{n-1\,раз}{...} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(h_1, h_2, ..., h_n) \prod_{i \ne j} dc_j\ .$$

Из уравнений

$$\int_{\tilde{c}_i}^{+\infty} \varphi_i(c_i)\,dc_i = \alpha_1 \tag{26}$$

$$\int_{\tilde{h}_i}^{+\infty} \psi_i(h_i)\,dh_i = \alpha_2 \tag{27}$$

вычислим значения $\tilde{c}_i$ и $\tilde{h}_i$.

В случае, если уравнения (26) и (27) имеют несколько решений, то в качестве $\tilde{c}_i$ и $\tilde{h}_i$ выберем наибольшие корни этих уравнений.

Соотношения (21), (22) эквивалентны неравенствам

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_i \le \tilde{c}_i\ ,$$

$$b_i \le \tilde{h}_i\ ,$$

где значения $\tilde{c}_i$ и $\tilde{h}_i$ удовлетворяют соотношениям (26) и (27).

Отсюда следует эквивалентность стохастической задачи принятия решений (20) – (25)

и детерминированной задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{y}_i - y_i(t)}{\overline{y}_i}\right) \to \min; \tag{28}$$

$$AU \le \widetilde{C}; \tag{29}$$

$$B \le \widetilde{H}; \tag{30}$$

$$0 < P_i(t) = y_i(t+1) \le \overline{y}_i;\ P_i(t) \ge P_i(t-1); \tag{31}$$

$$u_i(t) \ge 0,\ \ y_i(1) > 0,\ \ b_i(t) \ge 0,\ \ c_i(t,\omega) > 0, \tag{32}$$

$$i = \overline{1,n},\ \ \omega \in \Omega,\ \ t \in [1,T]. \tag{33}$$

Что и требовалось доказать.

Если случайные величины c_i, h_i характеризуются функциями распределения $F_i(c_i)$, $F_i(h_i)$, то параметры $\widetilde{c}_i$ и $\widetilde{h}_i$ представляют собой наибольшие числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 - F_i(\widetilde{c}_i) \ge \alpha_1,\ 1 - F_i(\widetilde{h}_i) \ge \alpha_2.$$

Если $F_i(c_i)$, $F_i(h_i)$ — непрерывные строго монотонные функции, то последние неравенства эквивалентны уравнениям

$$1 - F_i(\widetilde{c}_i) = \alpha_1,\ 1 - F_i(\widetilde{h}_i) = \alpha_2.$$

Во всех случаях будем записывать

$$\widetilde{c}_i = F_i^{-1}(1-\alpha_1),\ \widetilde{h}_i = F_i^{-1}(1-\alpha_2),$$

где

$$F_i^{-1}(\tau)\sup\{x \mid F_i(x) \le \tau\}.$$

Теорема 2. Для задачи принятия решений с утилитарным принципом выбора с соблюдением политики гарантированного минимума с вероятностными ограничениями (20)-(25) существует эквивалентная детерминированная задача линейного программирования, при условии, что элементы матрицы ограничений детерминированы, а элементы векторов ограничений распределены по нормальному закону, и эта задача единственна.

Доказательство:

Существование эквивалентной детерминированной задачи следует из возможности построения детерминированного эквивалента (29), (30) для вероятностных ограничений (21), (22), соответственно.

Единственность следует из выпуклости функций (29), (30) по t, непрерывности этих функций по всем аргументам и ограниченности этих функций на всей области определения, а также из условия минимизации значения вогнутого целевого функционала.

Что и требовалось доказать.

Полученная эквивалентная детерминированная задача принятия решений решается известными методами линейного программирования.

Список литературы

1. Коротеев С.В. Имитационное моделирование оптимизации производственного процесса горнодобывающего предприятия / Коротеев С.В., Быкова И.Ю., Шапошник Ю.Н. // Состояние,

проблемы и задачи информатизации в Казахстане: Мат. Междунар. науч.-практич. конф.- Вып. 1.- Алматы: РИО, 2004.- С.655-663
2. Мутанов Г.М. Задачи многокритериальной оптимизации / Мутанов Г.М., Коротеев С.В., Быкова И.Ю. // Междунар. конф. «Автоматизация и управление: перспективы, проблемы, решения»: Сб. тр.- Алматы: КазНТУ, 2007.- С.79-82

Получено 5.06.07

УДК 532

С.Ж. Рахметуллина
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

В гидродинамике, согласно закону Ньютона, имеет место линейная связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации

$$\sigma = -pI + 2\eta D,\ \eta = const.$$

Однако многие материалы, в частности расплавы и растворы полимеров, суспензии, глинистые растворы, маслянные краски, фармацевтические и пищевые продукты, кровь, дают примеры жидкостей, отличных от ньютоновских. Кроме того, такие жидкости могут проявлять пластические свойства, заключающиеся в наличии некоторого предельного напряжения сдвига, после которого возникает «текучесть среды». Наконец, эти материалы могут проявлять вязкоупругие свойства таким образом, что состояние среды определяется историей ее деформирования. На этом пути возникли модели Максвелла, Джеффриса, Олдройда и другие. Модели нелинейных вязкоупругих сред, т.е. сред, обладающих как нелинейной вязкостью, так и вязкоупругостью, исследовались в [1-6].

В данной работе рассматривается однородная вязкоупругая жидкость, частицы которой имеют форму гантели, которая может упруго растягиваться и сжиматься. В работе [1] рассмотрена математическая модель течения вязкоупругой жидкости с гантелевидными частицами, доказано существование и единственность обобщенного решения начально-краевой задачи.

Существует немало известных математических моделей фильтрации однородных и неоднородных жидкостей в пористых средах. В основе теории фильтрации лежит экспериментально полученный для стационарных течений закон сопротивления пористой среды движущейся в ней жидкости, закон Дарси. Закон Дарси устанавливает связь между скоростью фильтрации и градиентом давления. Он гласит, что скорость фильтрации однородной жидкости в пористой среде прямо пропорциональна градиенту гидравлического давления и площади сечения, перпендикулярной к направлению потока, и обратно пропорциональна ее вязкости.

Для различных задач, связанных с фильтрацией жидкости, существуют различные обобщенные формы закона Дарси. В работе [7] рассмотрены основные математические модели фильтрации, в том числе и модель Жуковского, использованная в данной статье. По гипотезе Жуковского пористая среда и жидкость рассматриваются как две компоненты однородной жидкости и сила сопротивления среды пропорциональна скорости.

Математическая модель. Рассматривается задача фильтрации для модели однородной вязкоупругой жидкости, в правой части уравнения состояния которой добавлены диффузионные слагаемые ($\alpha\Delta S$), так как предполагается, что частицы жидкости имеют

ISSN 1561-4212. ВЕСТНИК ВКГТУ, 2007, № 2

форму гантели, которая может упруго растягиваться и сжиматься

$$\begin{cases} \left(\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right) + \nabla p = \mu\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\Delta\vec{u} + \nabla S + \vec{f} - \gamma\vec{u}; \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0; \\ S + \lambda_1(S_t + (\vec{u}\nabla)S) = 2\mu(1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1})D + \alpha\Delta S, \end{cases} \qquad (1)$$

$x\in\Omega\subset R^n$, $n=2$; $t\in[0,T]$, $\vec{u}$ - скорость жидкости, p – давление, S – упругая часть тензора напряжений - суть искомые функции. $D=\frac{1}{2}(\Delta\vec{u}+(\Delta\vec{u})^T)$ - тензор скоростей деформаций, λ_1 - время релаксации, λ_2 - время запаздывания, μ - вязкость жидкости, $\gamma\,\bar{u}$ - сила сопротивления среды, $\gamma>0$.

Рассматривается задача для прямоугольной области. Обозначим через Γ^1 участок границы $\Gamma=\partial\Omega$, где происходит втекание жидкости в область Ω, Γ^2 – участок вытекания, а Γ^0 – непроницаемая часть границы. Γ^0: $x\in[0,1]$, $y=0$, $y=1$. Γ^1: $x=0$, $y\in[0,1]$. Γ^2: $x=1$, $y\in[0,1]$. Предполагается, что на Γ^1 известны касательные к Γ^1, составляющие вектора скорости, компоненты тензора S, давление p_1. На участке Γ^2 заданы касательные к Γ^2, составляющие скорости, давление и компоненты тензора S. На Γ^0 должно выполняться условие «прилипания», и компоненты S известны. Без ограничения общности их можно взять следующим образом (рис. 1):

$$\begin{aligned} &\text{при } (x,t)\in\Gamma^1:\ u\geq 0;\ v=0;\ S=S1;\ p=p_1; \\ &\text{при } (x,t)\in\Gamma^2:\ u\geq 0;\ v=0;\ S=S2;\ p=p_2; \\ &\text{при } (x,t)\in\Gamma^0:\ u=0;\ v=0;\ S=0. \end{aligned} \qquad (2)$$

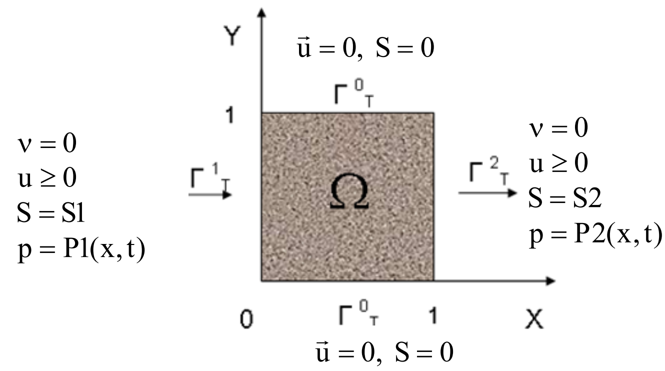

Рисунок 1

Помимо граничных условий, дополним задачу начальными данными:

$$\vec{u}(x,0)=\vec{u}_0(x),\ S(x,0)=S_0(x). \qquad (3)$$

Численная модель. Приведем схему численной реализации задачи (1)-(3).

Рассмотрим равномерную сетку $\{(x_i,y_j),\ x_i=ih,\ y_i=jh,\ i=j=0..k\}$. Существенной трудностью в построении разностных схем для уравнений в переменных скорость-давление является аппроксимация уравнения неразрывности в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Преодоление этой трудности путем замены уравнения неразрывности на уравнение для давления типа уравнения Пуассона рассмотрено в [8].

Проведем следующее преобразование: продифференцируем первое уравнение количества движения по x и второе по y, сложим их и, учитывая уравнение неразрывности, получим следующее уравнение для давления:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=-\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2 S_{11}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 S_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 S_{22}}{\partial y^2}\right).$$

В этом случае граничные условия на давление, необходимые для проведения расчетов, могут быть получены из уравнений количества движения. Например, на твердой неподвижной стенке y=0, y=1 граничное условие на давление выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\lambda\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+f_2+\frac{\partial S_{22}}{\partial y}.$$

Таким образом, уравнение на давление совместно с граничными условиями - это уравнение Пуассона с граничным условием на первую производную: $\begin{cases}\Delta P+F(x,y)=0,\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\varphi(x,y).\end{cases}$

Используя принцип установления для решения этой задачи в качестве итерационной схемы, можно взять схему покомпонентного расщепления для следующего уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\Delta P+F(x).$$

Переход от n-й итерации к n+1-й достигается последовательным применением метода прогонки вдоль строк и вдоль столбцов для трехточечных уравнений:

$$\frac{1}{h^2}P_{i-1\,j}^{n+1/2}-\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}\right)P_{ij}^{n+1/2}+\frac{1}{h^2}P_{i+1\,j}^{n+1/2}=\frac{1}{2}F_{i\,j}^{n}-\frac{P_{i\,j}^{n}}{\tau};$$

$$\frac{1}{h^2}P_{i\,j-1}^{n+1}-\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2}{h^2}\right)P_{ij}^{n+1}+\frac{1}{h^2}P_{i+1\,j}^{n+1}=\frac{1}{2}F_{i\,j}^{n}-\frac{P_{i\,j}^{n+1/2}}{\tau}.$$

Сходимость данного итерационного процесса определена тем, что начально-краевая задача рассматривается в прямоугольной области. Методом прогонки находятся значения P_i^{n+1} i=1..k.

Для аппроксимации уравнения состояния

$$S+\lambda_1(S_t+(\vec{u}\nabla)S)=2\mu(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})D+\alpha\Delta S$$

относительно компонентов S_{11}, S_{12}, S_{22} используется продольно-поперечная схема. Наряду с S_{11}, S_{12}, S_{22} вводятся промежуточные значения $S_{11i,j}^{n+1/2}, S_{12i,j}^{n+1/2}, S_{22i,j}^{n+1/2}$. Для нахождения промежуточных значений строится неявная схема по направлению x и явная по y

$$s_{12_{i,j}}^{n}+\lambda_1\left(\frac{s_{12_{i,j}}^{n+1/2}-s_{12_{i,j}}^{n}}{0{,}5\tau}+u_{i,j}^{n}\frac{s_{12_{i+1,j}}^{n+1/2}-s_{12_{i,j}}^{n+1/2}}{0{,}5h}+v_{i,j}^{n}\frac{s_{12_{i,j+1}}^{n}-s_{12_{i,j}}^{n}}{0{,}5h}\right)=$$

$$=\mu\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j}^{n}}{0{,}5h}+\frac{v_{i+1,j}^{n+1/2}-v_{i,j}^{n+1/2}}{0{,}5h}\right)+$$

$$+\alpha\left(\frac{s_{12_{i+1,j}}^{n+1/2}-2s_{12_{i,j}}^{n+1/2}+s_{12_{i-1,j}}^{n+1/2}}{h^2}+\frac{s_{12_{i,j+1}}^{n}-2s_{12_{i,j}}^{n}+s_{12_{i,j-1}}^{n}}{h^2}\right).$$

Для нахождения значений компонентов тензора на целом слое – явная по x и неявная по y

$$s_{12_{i,j}}^{n+1/2}+\lambda_1\left(\frac{s_{12_{i,j}}^{n+1}-s_{12_{i,j}}^{n+1/2}}{0{,}5\tau}+u_{i,j}^{n}\frac{s_{12_{i+1,j}}^{n+1/2}-s_{12_{i,j}}^{n+1/2}}{0{,}5h}+v_{i,j}^{n}\frac{s_{12_{i,j+1}}^{n+1}-s_{12_{i,j}}^{n+1}}{0{,}5h}\right)=$$

$$=\mu\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{0{,}5h}+\frac{v_{i+1,j}^{n+1/2}-v_{i,j}^{n+1/2}}{0{,}5h}\right)+$$

$$+\alpha\left(\frac{s_{12_{i+1,j}}^{n+1/2}-2s_{12_{i,j}}^{n+1/2}+s_{12_{i-1,j}}^{n+1/2}}{h^2}+\frac{s_{12_{i,j+1}}^{n+1}-2s_{12_{i,j}}^{n+1}+s_{12_{i,j-1}}^{n+1}}{h^2}\right).$$

Аналогично выглядят системы уравнений для S_{11}, S_{22}.

К уравнениям добавляются начальные и краевые условия. Для решения этих систем уравнений используется метод прогонки.

Найденные таким образом значения искомых функций p, S на слое n+1 подставляются в уравнение количества движения

$$\left(\vec{u}_t+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right)+\nabla p=\mu\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Delta\vec{u}+\nabla S+\vec{f}-\gamma\vec{u}.$$

Компоненты скорости на (n+1)-ом слое находятся с использованием продольно-поперечной схемы совместно с граничными и начальными условиями:

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1/2}-u_{i,j}^{n}}{0.5\tau}+u_{i,j}^{n}\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}-u_{i,j}^{n+1/2}}{h}+v_{i,j}^{n}\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i,j}^{n}}{h}\right)+\frac{p_{i+1,j}^{n}-p_{i,j}^{n}}{h}=$$

$$=\mu\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}-2u_{i,j}^{n+1/2}+u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2}\right)+\mu\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{h^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{s11_{i+1,j}^{n}-s11_{i,j}^{n}}{h}+\frac{s12_{i,j+1}^{n}-s12_{i,j}^{n}}{h}\right)+f_{i,j}^{n}-\gamma u_{i,j}^{n}.$$

Для решения этой системы осуществляется прогонка по оси x

$$\left(\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1/2}}{0.5\tau}+u_{i,j}^{n}\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}-u_{i,j}^{n+1/2}}{h}+v_{i,j}^{n}\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h}\right)+\frac{p_{i+1,j}^{n}-p_{i,j}^{n}}{h}=$$

$$=\mu\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1/2}-2u_{i,j}^{n+1/2}+u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2}\right)+\mu\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{s11_{i+1,j}^{n}-s11_{i,j}^{n}}{h}+\frac{s12_{i,j+1}^{n}-s12_{i,j}^{n}}{h}\right)+f_{i,j}^{n}-\gamma u_{i,j}^{n}.$$

Для решения системы на полном шаге осуществляется прогонка по y. Аналогично решается система относительно второй компоненты скорости $v_{i,j}^{n+1}$.

В силу того, что используются неявные схемы, не возникает условий устойчивости, накладывающих ограничения на шаг по времени.

Численные результаты. По построенному алгоритму была составлена программа, которая позволяет проследить динамику течения среды. Результаты представлены ниже. На каждом слое по времени сеточные функции определены в узлах сетки $\{(x_i,y_j),\ x_i=ih,\ y_i=jh,\ i=j=0..20\}$. Положим в начальном условии $v=0$, $S_{11}=S_{22}=0$, $S_{12}=y(1-y)+x$. В качестве начального приближения для поля скоростей использовано течение Пуазейля $u=y(1-y)$, $v=0$. По всей расчетной области $\lambda_1=0{,}2$, $\lambda_2=0{,}1$, $\mu=0{,}00928$, $\gamma=0{,}00348$, $\alpha=0{,}6$. Расчет был прерван при $t=0{,}5$, шаг по времени $\tau=0{,}001$.

На рисунках 2, 3 представлены значения сеточных функций u[i,j], v[i,j], на которых видно, что на границе Γ_0 выполняется условие прилипания, а на границах Γ_1 и Γ_2 скорость среды претерпевает некоторые изменения.

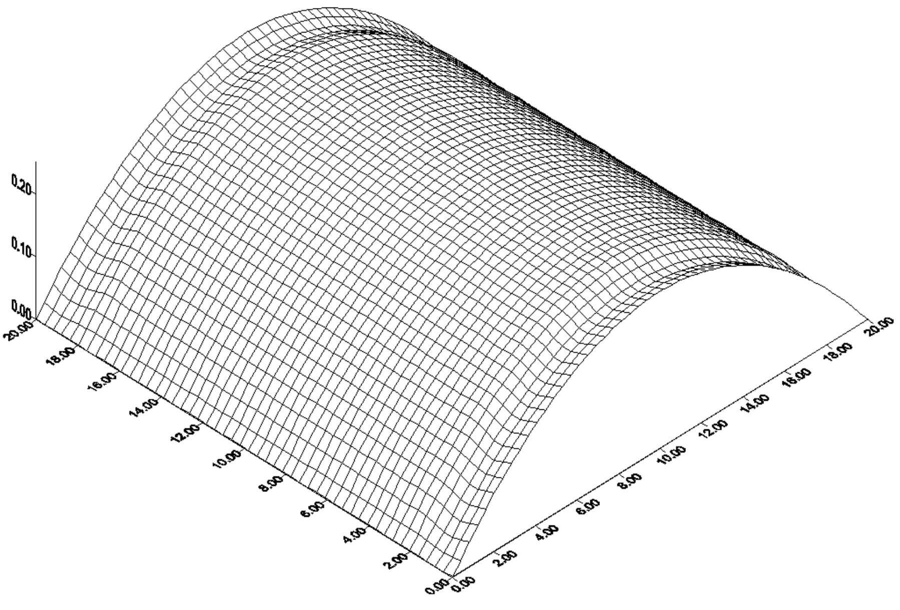

Рисунок 2

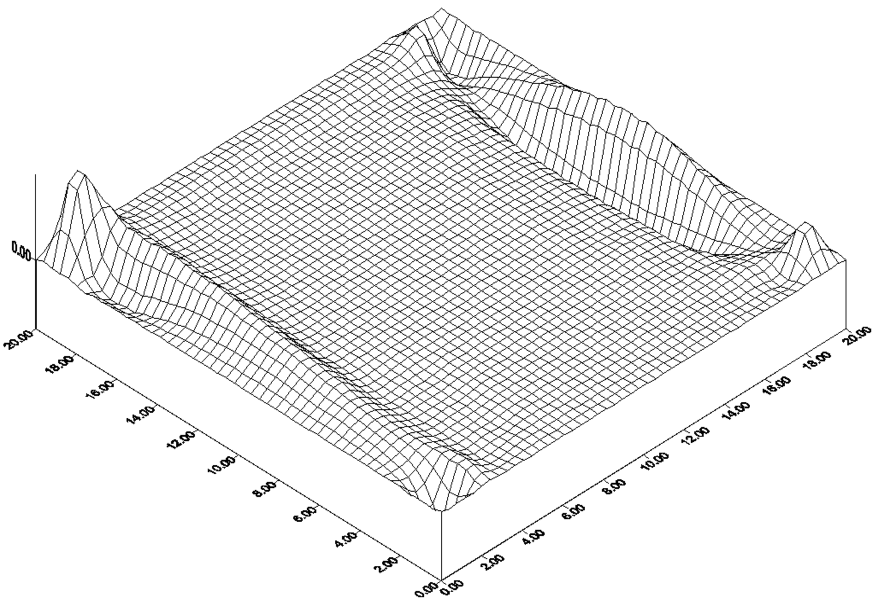

Рисунок 3

На рис. 4 представлены $S_{11}[i,j]$ и $S_{12}[i,j]$ для i=0..20, j=0..20.

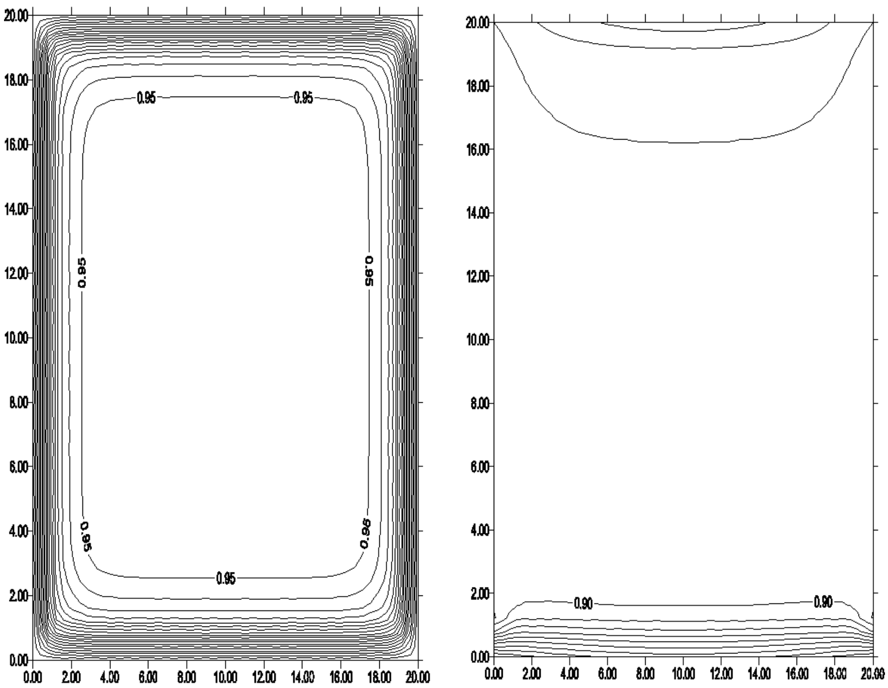

Рисунок 4

На рис. 5 представлено P[i,j] для i=0..20, j=0..20.

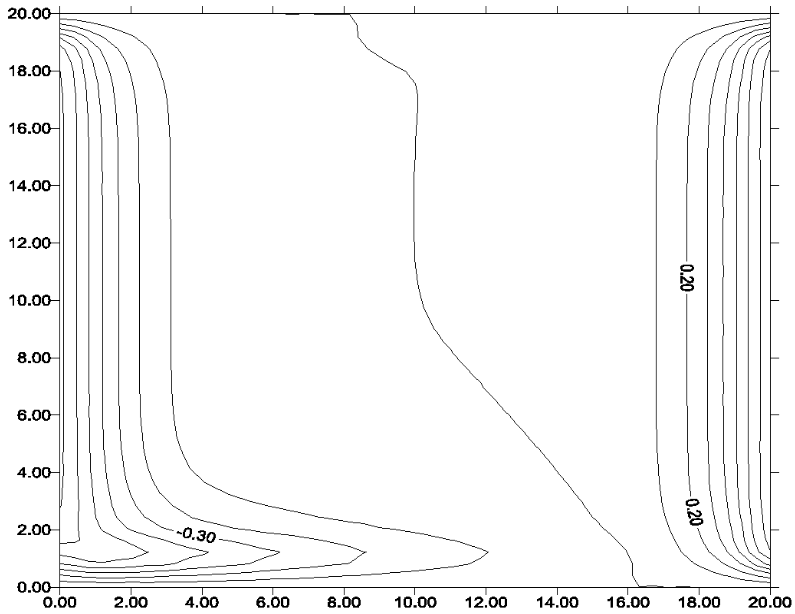

Рисунок 5

Таким образом, построена численная модель фильтрации однородной вязкоупругой жидкости. При аппроксимации уравнения неразрывности с использованием принципа установления был произведен переход к уравнению типа Пуассона. Система уравнений для давления была решена методом покомпонентного расщепления. Для аппроксимации уравнения состояния относительно компонентов S11, S12, S22 была использована продольно-поперечная схема.

Для найденных таким образом значений функций p, S на слое n+1 из уравнения количества движения было найдено искомое поле скоростей.

По численному алгоритму построена программа. Найдено приближенное решение рассмотренной задачи в виде сеточных функций - $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ – скорость жидкости, $p_{i,j}$ – давление, $s_{11i,j}$, $s_{12i,j}$, $s_{22i,j}$ – упругая часть тензора напряжений.

Список литературы

1. Турганбаев Е.М. Начально-краевые задачи для уравнений вязкоупругой жидкости типа Олдройда // Сибирский математический журнал. - 1995. - Т. 36. - №2. - С. 444-458.
2. Воротников Д. А. О движении нелинейно-вязкой жидкости в R^T// Вестник ВГУ. Серия физика, математика. - 2002. - №1. - С. 102-120.
3. Воротников Д.А. Энергетическое неравенство и единственность слабого решения начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой среды // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. - 2004. - №1. - С. 96-102.
4. Звягин В.Г. О разрешимости некоторых начально-краевых задач для математических моделей движения нелинейно-вязких и вязкоупругих жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. - 2003. - Т. 2. - С. 57-69.
5. Vorotnikov D.A. On the solvability of the initial-boundary value problem for the motion equations of nonlinear viscoelastic medium in the whole space // Nonlinear Anal. TMA. 2004. V.58, p. 631-656.
6. Vorotnikov D.A. On the existence of weak solutions initial boundary value problem in the Jeffreys model viscoelastic medium // Applied Analysis. 2004. V. 5, p. 844-858.

7. Жумагулов Б.Т. Гидродинамика нефтедобычи / Б.Т. Жумагулов, В.Н. Монахов. Алматы: КазгосИНТИ, 2001. – 336 с.
8. Пасконов В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. М.: Наука, 1984. - 288 с.
9. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. - Новосибирск: Наука, 1983. – 318 с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.
11. Астарита Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / С.Н. Антонцев, Дж. Астарита. - М.: Мир, 1978. – 309 с.

Получено 20.05.07

КҰТТЫҚТАЙМЫЗ!
ПОЗДРАВЛЯЕМ!

60 *жас*
лет

УСМАНОВУ
МАЙКАМАЛ БИГАЛИЕВНУ,
кандидата химических наук, доцента,
профессора ВКГТУ кафедры химии,
металлургии и обогащения

ЗДОРОВЬЯ, СЧАСТЬЯ, УСПЕХОВ, ДОРОГОЙ ЮБИЛЯР!

•

МЕРЕЙТОЙ ИЕСІНЕ МЫҚТЫ ДЕНСАУЛЫҚ, ТАУСЫЛМАС БАҚЫТ, ТВОРЧЕСТВОЛЫҚ ТАБЫС ТІЛЕЙМІЗ!