ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

УДК 551.342.4

А.Б. Мырзалиева
Кыргызский государственный техничекий университет им. И. Раззакова, г. Бишкек

УРОВНИ ВОСПРИЯТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И ОБРАЗОВ УЧАЩИМИСЯ ТЕХНИЧЕСКОГО КОЛЛЕДЖА

Математические исследования Декарта тесно связаны с его работами по философии и физике. В своей работе «Геометрия» (1637г.) Декарт впервые ввел понятие переменной величины и функции. Переменная величина выступала у Декарта как отрезок переменной длины и постоянного направления (текущая координата точки, описывающей своими движениями кривую) и как непрерывная числовая переменная, пробегающая совокупность чисел, составляющих *координатный* отрезок. Двоякий образ переменной обусловил взаимопроникновение геометрии и алгебры, к которому стремился Декарт. Алгебра Декарта в отличие от алгебры Ф. Виета имеет всегда один основной элемент - линейный отрезок, операции над которым приводят опять-таки к некоторому отрезку.

Из рукописей Декарта видно, что он знал открытое позднее Л. Эйлером соотношение между числами граней, вершин и ребер многогранников - важный результат в топологии поверхностей. Именем Декарта названы: координаты, произведение, парабола, лист, овал. Основным достижением Декарта явился созданный им *метод прямолинейных координат*.

В геометрии современной школы применяются различные методы решения задач - это синтетический (чисто геометрический) метод, метод преобразований, векторный, метод координат и другие. Они занимают различное положение в программе обучения. Основным методом считается синтетический, а из других наиболее высокое положение занимает *метод координат* потому, что он тесно связан с алгеброй.

Сущность метода координат как метода решения задач состоит в том, что, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы можем решать геометрическую задачу средствами алгебры. Обратно, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и таким образом применять геометрию к решению алгебраических задач. Метод координат – это универсальный метод. Он обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией, которые, соединяясь, дают «богатые плоды», какие они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

В отношении курса геометрии колледжа можно сказать, что в некоторых случаях метод координат дает возможность строить доказательства и решать многие задачи более рационально, красиво, чем чисто геометрическими способами. Метод координат связан, правда, с одной геометрической сложностью. Одна и та же задача получает различное аналитическое представление в зависимости от того или иного выбора системы координат. И только достаточный опыт позволяет выбирать систему координат наиболее целесообразно.

ISSN 1561-4212. «ВЕСТНИК ВКГТУ» № 3, 2011.

Можно выделить следующие цели изучения метода координат в геометрии колледжа: *дать учащимся эффективный метод решения задач и доказательства ряда теорем; показать на основе этого метода тесную связь алгебры и геометрии; способствовать развитию вычислительной и графической культуры учащихся.*

Изучение координатного метода в колледже и обучение по его применению для решения различных математических задач происходит в несколько этапов. На первом этапе вводится основной понятийный аппарат, который хорошо отрабатывается в 5-6 классах и систематизируется в курсе геометрии. В 5 классе учащиеся знакомятся с координатным лучом, который впоследствии, при изучении отрицательных чисел, дополняется до координатной прямой. И уже после введения рациональных чисел в 6 классе учащиеся изучают координатную плоскость.

На втором этапе ученики знакомятся с уравнениями прямой и окружности. Данные понятия изучаются ими как в алгебре, так и в геометрии с разной содержательной целью, поэтому учащиеся часто не видят связи между ними, а значит, плохо усваивают суть метода. Так, при изучении курса алгебры 7 класса графики основных функций вводятся путем построения ряда точек, координаты которых вычисляются по аналитическому заданию функции.

В курсе геометрии уравнение прямой и окружности вводится на основе геометрических характеристических свойств, как множество точек, обладающих определенным свойством (равноудаленности от 2 точек – для прямой, от одной точки – для окружности). Обучение применению самого метода координат для решения задач происходит в процессе изучения курса геометрии 9 класса. Для этого сначала раскрываются основные этапы применения метода, а затем на примере ряда задач показывается непосредственное применение метода координат.

Но не следует принимать координатный метод за основной метод решения задач и доказательства теорем. И.Ф. Шарыгин в своей статье [1] говорит о вреде изучения метода координат как для сильных, так и для слабых учеников. Что касается слабых учеников, то «…большей частью в этой группе находятся дети, которые плохо читают, с трудом понимают и запоминают формулы. Для этих детей Геометрия могла бы стать предметом, за счет которого они могли бы компенсировать недостатки общематематического развития. А вместо этого она ложится на них дополнительным грузом. Координатный метод оставляет в стороне геометрическую суть изучаемой геометрической ситуации. Воспитывается исполнитель, решающий заданную конкретную задачу. Не меньше, но и не больше. Не развивается геометрическая, и даже математическая интуиция, что в свою очередь составляет опасность для сильных учеников».

Хорошо известно, что как бы ни строился обучающий курс геометрии, в нем обязательно присутствуют различные методы доказательства теорем и решения задач, среди которых важное место занимают: метод геометрических преобразований, метод координат, векторный метод. Сами эти методы тесно связаны между собой. В зависимости от концепции, раскрываемой авторами учебников геометрии для средней школы, тот или иной метод может занимать доминирующее значение. Так в учебнике [2] активную роль играет метод координат, который весьма плодотворен.

В отличие от других школьных учебников по геометрии, в данном координаты заняли одно из центральных мест. Они вводятся, начиная с 8 класса, после изучения тем «Четырехугольники» и «Теоремы Пифагора». На изучение темы отводится 19 часов. Сразу после рассмотрения основных понятий, связанных с введением координат на плоскости, уравнений окружности и прямой, учащимися изучаются такие вопросы, как пересечение двух окружностей, пересечение прямой и окружности, определение синуса, косинуса и тангенса любого угла от 0° до 180°. Это и есть первые приложения метода координат, с которыми знакомятся школьники.

Чтобы решать задачи как алгебраические, так и геометрические методом координат необходимо выполнить 3 этапа:

1) перевод задачи на координатный (аналитический) язык;

2) преобразование аналитического выражения;

3) обратный перевод, т. е. перевод с координатного языка на язык первоначального формулирования задачи.

Для примера рассмотрим алгебраическую и геометрическую задачи и проиллюстрируем выполнение данных 3 этапов при их решении координатным методом.

№ 1. Сколько решений имеет система уравнений: $y^2 = px$, $x^2 + y^2 = 1$.

Решение:

1 этап: на геометрическом языке в данной задаче требуется найти, сколько точек пересечения имеют фигуры, заданные данными уравнениями. Первое из них является уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1, а второе – уравнением параболы.

2 этап: построение окружности и параболы; нахождение точек их пересечения.

3 этап: количество точек пересечения окружности и параболы является ответом на поставленный вопрос.

№ 2. Найдите множество точек, для каждой из которых расстояния от двух данных точек равны.

Решение:

Обозначим данные точки через A и B. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, а началом координат служила точка A. Предположим далее, что AB=a, тогда в выбранной системе координат $A(0,0)$ и $B(a,0)$. Точка $M(x,y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда $AM=MB$, или, что то же самое, $AM^2=MB^2$. Используя формулу расстояния от одной точки координатной плоскости до другой, получаем: $AM^2=x^2+y^2$, $MB^2=(x-a)^2+y^2$. Тогда $x^2+y^2=(x-a)^2 + y^2$.

Равенство $x^2+y^2=(x-a)^2+y^2$ и является алгебраической моделью ситуации, данной в задаче. На этом заканчивается первый этап ее решения (перевод задачи на координатный язык).

На втором этапе осуществляется преобразование полученного выражения, в результате которого получаем соотношение.

На третьем этапе осуществляется перевод языка уравнения на геометрический язык. Полученное уравнение является уравнением прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от точки A на расстояние, т.е. серединного перпендикуляра к отрезку AB.

Для разработки методики формирования умения применять координатный метод важно выявить требования, которые предъявляет логическая структура решения задач мышлению решающего. Координатный метод предусматривает наличие у обучающихся умений и навыков, способствующих применению данного метода на практике. Проанализируем решения нескольких задач. В процессе этого анализа выделим умения, являющиеся компонентами использования координатного метода при решении задач. Знание компо-

ISSN 1561-4212. «ВЕСТНИК ВКГТУ» № 3, 2011.

нентов этого умения позволит осуществить его поэлементное формирование.

Пусть требуется найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Обозначим данные точки через A и B. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, а началом координат служила точка A (умение оптимально выбирать систему координат). Предположим AB=a, тогда в выбранной системе координат A(0,0), B(a,0). Точка M(x,y) принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда AM^2-MB^2=b^2, где b - постоянная величина (умение переводить геометрический язык на аналитический, составлять уравнения фигур). Далее, используя формулу расстояний между двумя точками, получаем постоянные величины.

Нетрудно заметить, что и для решения этой задачи необходимо овладеть перечисленными выше умениями. Кроме того, для решения приведенной задачи, а также и других задач важно умение «видеть за уравнением» конкретный геометрический образ, которое является обратным к умению составлять уравнения конкретных фигур. Для развития таких умений можно предлагать решение задач следующего типа:

1) на координатной плоскости постройте точки A(7,2), B(-2,1), C(0,2);

2) отметьте на плоскости несколько точек. Начертите произвольную систему координат и найдите в ней координаты заданных точек.

В целях пропедевтической работы можно рекомендовать в 6 классе задачи из учебника на нахождение координат точек по рисунку, разнообразя их с помощью изменения направления осей и начала координат.

С координатной прямой, а затем и с координатной плоскостью учащиеся знакомятся в 5-6 классах при изучении математического материала. При этом удобно использовать мультимедийные презентации, которые позволяют в динамике излагать необходимый материал, использовать всевозможные иллюстрации и звуковые эффекты, тем самым заинтересовывая учащихся и являясь хорошим наглядным средством. Одним из примеров является презентация «Метод координат», опирающаяся на учебник [3], задачи из которого могут быть использованы:

- для развития навыков построения точек по их координатам со всем классом;
- для дополнительных заданий отстающим ученикам;
- для развития интереса к изучаемой теме.

Список литературы

1. Шарыгин И. Нужна ли школе XXI века геометрия: Математика // Приложение к газ. «1 сентября». - 2004. – № 12.
2. Погорелов А.В. Геометрия для 7-11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1990.
3. Дорофеев Г.В. Математика: Учебник для 6 класса общеобразоватольных учебных заведений // Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова. - М.: Дрофа, 1998.

Получено 18.08.11