ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 065+330.85

Г.М. Мутанов, К.А. Габитова, И.Ю. Быкова
ВКГТУ им. Д. Серикбаева

ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УЧЕТА ВРЕМЕНИ И ОБЪЕМОВ ФИНАНСИРОВАНИЯ ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ РИСКА

В условиях рыночной экономики перед макро- и микроэкономическими системами стоит глобальная задача развития и поддержания конкурентоспособности как отдельных экономических субъектов, так и целостных регионов, что невозможно без разработки и реализации проектов, направленных на социально-экономическое развитие предприятий региона и страны в целом. Реализация любого проекта неразрывно связана с инвестиционными и инновационными процессами, которые по своей природе не исключают присутствия риска и неопределенных параметров макро- и микроуровня экономической системы. Все чаще встает вопрос нахождения наилучшего решения стохастических моделей, адекватно описывающих те или иные инвестиционно-экономические процессы. Одним из подходов разрешимости стохастических моделей принятия решений по реализации проектов является итеративный метод. Рассмотрим его использование на примере многоцелевой стохастической модели учета времени и объемов финансирования проектов.

Примем следующие обозначения [1]:

t_i – продолжение i-го периода реализации проекта, $i=\overline{1,n}$;

n – количество периодов реализации проекта;

a_i – требуемы ресурсы для реализации проекта, $i=\overline{1,n}$;

m – количество видов уже имеющихся ресурсов на предприятии;

b_j - объем имеющихся на предприятии ресурсов, используемых в производственном процессе, $j=\overline{1,m}$;

C_l – среднегодовая себестоимость выпускаемой продукции l-го вида;

x_l – среднегодовой выпуск l-го вида продукции;

N – количество позиций товарной номенклатуры;

$E_н$ - нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений;

v_t - объем кредитования t периода реализации проекта;

r – норма дисконтирования;

T – периоды реализации проекта (количество временных интервалов);

t – количество временных периодов до пускового года;

$Ц_i$ – цена реализации i-го вида продукции;

y_j – количество единиц нового вида оборудования, задействованного в производственном процессе при реализации проекта;

β_j – стоимость единицы нового вида оборудования с учетом его монтажа и обслуживания при реализации проекта;
z_j – объем новых материально-сырьевых ресурсов j-го вида, используемых в производственном процессе при реализации проекта;
γ_j – стоимость единицы материально-сырьевых ресурсов j-го вида;
W – дополнительные реализационные затраты, не учитываемые в себестоимости продукции;
$\sum_{i=1}^{N}(Ц_i - C_i) - W$ – валовая прибыль от реализации продукции;
g_{ij} - требуемое количество сырья j-го типа для производства i-го вида продукции;
L_j – объем имеющихся материально-сырьевых ресурсов на предприятии;
t_{ij} – время, затрачиваемое на обработку или изготовление единицы продукции i-го вида с использованием j-го оборудования;
d_j – число оборудования j-го типа, имеющегося в распоряжении предприятия и участвующего в производственном процессе;
V – объем кредитования проекта;
S_j –площадь, необходимая для установки единицы нового оборудования j-го типа;
$\hat{S}$ – свободная производственная площадь;
q_i^t - потребность рынка в продукции i-го типа в момент времени t;
Q_i^t – заказ или требуемый объем выпуска продукции i-го вида в момент времени t;
$x_i \ge 0,\ \ y_j \ge 0,\ \ z_j \ge 0$.

Пусть:

$$\phi_1 = \left[\sum_{i=1}^{N}(Ц_i(\omega^к) - C_i(\omega^к)) \cdot x_i(\omega^к) - W(\omega^к)\ \middle|\omega^{(к-1)}\right],\ \phi_2 = \left[z_j(\omega^к) + L_j\ \middle|\omega^{к-1}\right],$$

$$\phi_3 = \left[\ y_j\tau_j(\omega^к) + d_j\tau_j(\omega^к)\ \middle|\omega^{к-1}\ \right],\ \phi_4 = \left[V(\omega^к)\middle|\omega^{к-1}\right],\ \phi_5 = \hat{S},\ \phi_6 = \left[x_i^t(\omega^к)\middle|\omega^{к-1}\right],$$

$$\phi_7 = \left[x_i^t(\omega^к)\middle|\omega^{к-1}\right],\ \text{при}\ x_i(\omega^к) \ge 0.$$

$$y_j \ge 0\ ,\quad z_j(\omega^к) \ge 0,\quad x = x(\omega\ ) \in X\quad ,\qquad \omega \in \Omega\ ,$$

$$b_1 = \sum_{j=1}^{k1} y_j \cdot \beta_j(\omega^{к-1}) + \sum_{j=1}^{m1} z_j(\omega^{к-1}) \cdot j_j(\omega^{к-1}),\ \ b_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i(\omega^{к-1}) \cdot g_{ij},\ \ b_3 = \sum_{i=1}^{N} t_{ij}x_i(\omega^{к-1}),$$

$$b_4 = \sum_{j=1}^{к1} y_{j\cdot}\ \beta_j(\omega^{к-1}) + \sum_{j=1}^{m1} z_j(\omega^{к-1}) \cdot j_j(\omega^{к-1}),\ \ b_5 = \sum_{j=1}^{к1} S_j \cdot y_j\ \ b_6 = q_i^t(\omega^{к-1}),$$

где i=1,..N; $t \in [1;T]$,

$$b_7 = Q_i^t\ ,\quad \text{при}\ x_i(\omega^к) \ge 0.$$

$$y_j \ge 0,\qquad z_j(\omega^к) \ge 0,\quad x = x(\omega\ ) \in X,\qquad \omega \in \Omega.$$

В условиях принятых обозначений представим модель учета времени и объемов финансирования в виде разрешимой многоэтапной задачи стохастического программирования вида

$$M\psi_0(\omega^n,x^n)\to sup\ , \tag{1}$$

$$M\{\psi_k(\omega^k,x^k),\omega^{k-1}\}\geq b_k(\omega^{k-1}), \tag{2}$$

$$x_k\in X_k,\quad k=1,...,n. \tag{3}$$

Введем рекуррентным образом λ-функцию [2] для исходного целевого функционала $\phi_0^{(k)}(\omega^n,x^{n-k},\lambda^{n-k+1,\,n})$ следующим образом.

$$\phi_0^{(k-1)}(\omega^n,x^{n-k-1},\lambda^{n-k,\,n})=(\lambda_{n-k}(\omega^{n-k-1}),b_{n-k}(\omega^{n-k-1}))-$$
$$-\inf_{x_{n-k}\in X_{n-k}}\left[\left(\lambda_{n-k}(\omega^{n-k-1}),\phi_{n-k}(\omega^{n-k},x^{n-k})\right)-\phi_0^{(k)}(\omega^n,x^{n-k},\lambda^{n-k+1,\,n})\right],\ k=0,1,...,n-1, \tag{4}$$

где $$\lambda^{k,n}=\left(\lambda_k(\omega^{k-1}),\lambda_{k+1}(\omega^k),...,\lambda_n(\omega^{n-1})\right), \tag{5}$$

$$\phi_0^{\,0}(\omega^n,x^n)=\phi_0(\omega^n,x^n). \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. В принятых предположениях относительно функций $\psi_0(\omega^n,x^n)$ и $\psi_k(\omega^k,x^k)$, определяющих условия многоэтапной задачи (1)– (3), двойственная к ней задача (Λ - задача) может быть представлена в виде

$$\inf_{\lambda^n\geq 0} M_{\omega^n}\phi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda^n(\omega^{n-1})). \tag{7}$$

Условия теоремы 1 гарантируют вогнутость $\phi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda^n)$ по $\lambda^n\geq 0\quad\forall\omega^n$.

При некоторых дополнительных нежестких предположениях относительно функции $\phi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda^n)$ можно построить достаточно эффективный алгоритм решения Λ - задачи (7).

Рассмотрим итеративный метод решения задачи (7) выпуклого программирования, представляющий собой обобщение метода Гаусса–Зейделя покоординатного спуска. В [3] метод Гаусса–Зейделя распространен на случай, когда на каждом шаге производится оптимизация не по отдельным переменным, а по векторам, составляющие которых – некоторые подмножества переменных задачи. Задача (7) не укладывается в класс задач, для решения которых в [3] обосновано обобщение метода покоординатного спуска. Векторы $\lambda_k(\omega^{k-1})$ - аргументы функции $\phi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda^n)$ - представляют собой вектор- функции, определенные для разных k на различных пространствах.

Рассмотрим следующую модификацию итеративного алгоритма.

Зададим некоторую постоянную r.

На первом шаге фиксируются функции $\lambda_2(\omega^1)=\overset{(0)}{\lambda_2}(\omega^1),\ldots,\lambda_n(\omega^{n-1})=\overset{(0)}{\lambda_n}(\omega^{n-1})$ и вычисляется вектор λ_1, определяющий $\inf\limits_{\lambda_{1l}\geq 0,\|\lambda^n\|\leq r} M_{\omega^n}\phi_0^{(n)}(\omega^n,\lambda_1,\overset{(0)2,n}{\lambda}(\omega^{n-1}))$.

Пусть соответствующая нижняя грань достигается при $\lambda_1=\overset{(1)}{\lambda_1}$.

Далее $\forall\omega_1 \in \Omega_1$ вычисляется $\lambda_2(\omega^1) = \overset{(1)}{\lambda_2}(\omega^1)$, на которой достигается

$$\inf_{\lambda_1 \ge 0, \|\lambda^n\| \le r} M_{\omega^{2,n}} \phi_0^{(n)}(\omega^n, \overset{(1)}{\lambda_1}, \lambda_2(\omega^1), \overset{(0)3,n}{\lambda}(\omega^{n-1})).$$

Продолжая этот процесс, находим $\forall\omega^{k-1}$ вектор-функцию $\overset{(1)}{\lambda_k}(\omega^{k-1})$,
$k = 3,...,n$, на которой достигается

$$\inf_{\lambda_k \ge 0, \|\lambda^n\| \le r} M_{\omega^{k,n}} \phi_0^{(n)}(\omega^n, \overset{(1)}{\lambda^{k-1}}(\omega^{k-2}), \lambda_k(\omega^{k-1}), \overset{(0)k+1,n}{\lambda}(\omega^{n-1})),$$

n шагов описанного вида составляют одну итерацию метода. После вычисления $\overset{(1)}{\lambda_n}(\omega^{n-1})$ переходим к первому шагу второй итерации и вычисляем вектор $\overset{(2)}{\lambda_1}$, на котором достигается

$$\inf_{\lambda_1 \ge 0, \|\lambda^n\| \le r} M_{\omega^n} \phi_0^n(\omega^n, \lambda_1, \overset{(1)2,n}{\lambda}(\omega^{n-1})),$$

и так далее.

В условиях $\|\lambda^n(\omega^{n-1})\| \le r$ на каждом шаге процесса предполагается , что все составляющие $\lambda^n(\omega^{n-1})$, кроме тех, по которым ведется оптимизация, зафиксированы таким образом, как и в целевом функционале.

Если процесс сходится (сильно или по функционалу) к некоторой точке $\overset{*}{\lambda^n}(\omega^{n-1})$, содержащейся внутри шара радиуса r , будем считать, что решение задачи получено.

Если точка $\overset{*}{\lambda^n}$ принадлежит сфере $\|\lambda^n(\omega^{n-1})\| = r$, повторим процесс решения задачи, в которой дополнительное условие $\|\lambda^n\| \le r$ заменяется условием $\|\lambda^n(\omega^{n-1})\| \le 2r$. При некоторых условиях (о них скажем ниже), продолжая процесс, придем к шару достаточно большого радиуса $\nu \cdot r$, внутри которого содержится точка $\overset{*}{\lambda^n}$, определяющая решение задачи.

Примем следующие допущения:

1) функционал $Q(\lambda^n)$ выпуклый, дифференцируем по Фреше и слабо непрерывен;

2) пространство B , в котором определяется решение Λ - задачи, рефлексивно;

3) при $\|\overset{(s)}{\lambda^n}\| \to \infty$ $Q(\overset{(s)}{\lambda^n}) \prec Q(\tilde{\lambda}^n)$, где $\tilde{\lambda}^n$ - некоторая точка пространства B.

Сформулируем следующую лемму.

Лемма. Пусть функционал $Q(\lambda^n)$ выпуклый и выполняются условия (1)-(3), тогда Λ - задачи сходится по функционалу.

Это означает, что итеративный процесс не выводит из некоторой ограниченной области пространства B.

Для слабой непрерывности функционала $Q(\lambda^n)$ достаточно компактности градиента Q в шаре $\|\lambda^n\| \le r$.(Помним, что оператор, действующий из X в Y, называется компактным на множестве $G \subset X$, если он преобразует всякое ограниченное множество из G в компактное множество пространства Y).

Теорема 2. При условиях (1-3) итеративный процесс решения Λ - задачи сходится по функционалу к $\inf\limits_{\lambda^n \ge 0} Q(\lambda^n)$.

Доказательство.

Шар в рефлексивном пространстве слабо компактен. Поэтому описанный итеративный процесс при каждом r позволяет выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\overset{(s)}{\lambda}_n(\omega^{n-1})$. В соответствии с допущением (3) существует достаточно большое число ν , при котором слабо сходящаяся подпоследовательность $\overset{(s)}{\lambda}_n$ и ее слабый предел $\overset{*}{\lambda^n}$ не выходят из шара радиуса $\nu \cdot r$.

По построению при фиксированном r с каждым шагом процесса

$Q(\lambda^n) = M_{\omega^n} \phi_0^{(n)}(\omega^n, \lambda^n(\omega^{n-1}))$ во всяком случае не возрастает, т.е.

$Q(\overset{(s+1)}{\lambda^k}, \overset{(s)}{\lambda^{k+1,n}}) \ge Q(\overset{*}{\lambda^n})$.

При этом в силу слабой непрерывности функционала Q левая часть неравенства монотонно убывает и при $s \to \infty$ стремится к $Q(\overset{*}{\lambda^n})$.

Остается доказать, что если $Q(\overset{(s)}{\lambda^n})$ сходится $Q(\overset{*}{\lambda^n})$, то $Q(\overset{*}{\lambda^n}) = \inf\limits_{\lambda^n \ge 0} Q(\lambda^n)$.

Приведем доказательства для n=2. Аргументация без труда может быть по индукции распространена на случай произвольного n .

Покажем, что $\forall \lambda_1 \ge 0$:

$$Q(\lambda_1, \overset{*}{\lambda}_2) \ge Q(\overset{*}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) . \tag{8}$$

Пусть, наоборот, существует $\lambda_1 \ge 0$, такое, что

$$Q(\lambda_1, \overset{*}{\lambda}_2) \prec Q(\overset{*}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) . \tag{9}$$

Тогда на каждой подпоследовательности $\overset{(s)}{\lambda}_1$, слабо сходящейся к λ_1 , при достаточно большом s имеем в силу слабой непрерывности функционала Q

$$Q(\overset{(s)}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) \prec Q(\overset{*}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) .$$

Но
$$Q(\overset{(s)}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) \underset{(1)}{\ge} \inf_{\lambda_2 \ge 0} Q(\overset{(s)}{\lambda}_1, \lambda_2) \underset{(2)}{=} Q(\overset{(s)}{\lambda}_1, \overset{(s)}{\lambda}_2) \underset{(3)}{\ge} Q(\overset{*}{\lambda}_1, \overset{*}{\lambda}_2) . \tag{10}$$

Равенство (2) определяется описанной модификацией обобщенного метода покоординатного спуска. Неравенство (3) следует из монотонности рассматриваемого итеративного процесса.

Неравенство (10) противоречат предположению (9). Аналогичным образом доказывается неравенство

$$Q(\overset{*}{\lambda}_1,\lambda_2)\ge Q(\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2),\quad \forall\lambda_2\ge 0.$$

В точке минимума выпуклого дифференцируемого по Фреше функционала $Q(\lambda_1,\lambda_2)$ на вогнутом множестве имеют место соотношения

$$(\nabla_{\lambda_1}Q(\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2),\lambda_1-\overset{*}{\lambda}_1)\ge 0;\qquad (\nabla_{\lambda_2}Q(\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2),\lambda_2-\overset{*}{\lambda}_2)\ge 0. \tag{11}$$

При недифференцируемом функционале Q, когда под $\nabla_\lambda Q$ подразумевается опорный функционал, неравенства (11) могут нарушаться.

Для выпуклой дифференцируемой функции имеет место следующее неравенство $\forall\lambda$, принадлежащее выпуклому множеству (в частности $\forall\lambda_1,\lambda_2\ge 0$)

$$Q(\lambda_1,\lambda_2)\ge Q(\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2)+(\nabla_{\lambda_1}Q(\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2),\lambda_1-\overset{*}{\lambda}_1))+(\nabla_{\lambda_2}Q(\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2),\lambda_2-\overset{*}{\lambda}_2)).$$

Учитывая (11), получаем $Q(\lambda_1,\lambda_2)\ge Q(\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2)$, $\forall\lambda_1,\lambda_2\ge 0$, т.е. $\overset{*}{\lambda}_1,\overset{*}{\lambda}_2$ функционала $Q(\lambda_1,\lambda_2)$, $\forall\lambda_1,\lambda_2\ge 0$. Как уже указывалось, утверждение по индукции легко распространяется на случай функционала от любого конечного числа функций $\lambda_k(\omega^{k-1})$.

Список литературы

1.Габитова К.А. Многоэтапная стохастическая инвестиционная модель с вероятностными ограничениями и функционалом // Материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. «Наука и инновации -2008». - Premysl: Nauka I studia, 2008. - С. 21-27.

2. Юдин Д.Б. Задачи и методы управления в условиях неполноты информации. - М.: Советское радио, 1974.

3. Гольштейн Е.Г. Методы расчета и синтеза импульсных автоматических систем. Ч.2 - «Автоматика и телемеханика» / Е.Г.Гольштейн, Д.Б.Юдин. - М., 1963. - Т. XXIV. - № 12.

Получено 23.12.08

ҚҰТТЫҚТАЙМЫЗ!
ПОЗДРАВЛЯЕМ!

70 жас лет

КОЧЕВОГО
НИКОЛАЯ АНДРЕЕВИЧА,

кандидата технических наук кафедры безопасности жизнедеятельности и охраны окружающей среды

ЗДОРОВЬЯ, СЧАСТЬЯ, УСПЕХОВ, ДОРОГОЙ ЮБИЛЯР!

•

МЕРЕЙТОЙ ИЕСІНЕ МЫҚТЫ ДЕНСАУЛЫҚ, ТАУСЫЛМАС БАҚЫТ, ШЫҒАРМАШЫЛЫҚ ТАБЫС ТІЛЕЙМІЗ!