УДК 539.4:624.07

С.С. Айвазян, Е.С. Беденко
ВКГТУ, г. Усть-Каменогорск

РЕШЕНИЕ СЛОЖНЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИММЕТРИЧНЫХ РАМНЫХ СИСТЕМ СПОСОБОМ ГРУППИРОВКИ НЕИЗВЕСТНЫХ

Существует несколько более точных и приближенных методов расчета статически неопределимых рам. Таковыми являются: метод сил, метод перемещений (деформаций), смешанный и комбинированный методы.

Как правило, у большинства рамных систем степень кинематической неопределимости меньше, чем степень статической неопределимости. Рассмотрим симметричную раму на действие ветровой нагрузки (рис. 1, *а*). Степень статической неопределимости, определяемая формулой $Л = 3 \cdot К + С_0 - Ш - 3$, равна девяти, а степень кинематической неопределимости, определяемая формулой $n = n_{уг} + n_{лин}$, равна пяти. Следовательно, заданную раму следует рассчитать методом перемещений (деформаций). Если угловую деформацию первого узла представить как сумму двух чисел, то угловую деформацию узла 4 можно представить как разность этих же чисел, т.е. $\varphi_1 = Z_1 + Z_2$; $\varphi_4 = Z_1 - Z_2$. Отсюда имеем: $Z_1 = (\varphi_1 + \varphi_4)/2$; $Z_2 = (\varphi_1 - \varphi_4)/2$, где $\varphi_2 = Z_3 + Z_4$; $\varphi_3 = Z_3 - Z_4$. Отсюда имеем: $Z_3 = (\varphi_2 + \varphi_3)/2$; $Z_4 = (\varphi_2 - \varphi_3)/2$.

Основная система метода перемещений получается путем ввода дополнительных связей (моментных и силовых). Моментные связи вводятся в свободные жесткие узлы для ликвидации угловых перемещений $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, силовые связи – для ликвидации линейных перемещений. На рис. 1, *б* приведена основная система.

Канонические уравнения запишутся в виде

$$\tau_{11} \cdot Z_1 + \tau_{12} \cdot Z_2 + \tau_{13} \cdot Z_3 + \ldots\ldots + \tau_{15} \cdot Z_5 + R_{1p} = 0,$$
$$\tau_{21} \cdot Z_1 + \tau_{22} \cdot Z_2 + \tau_{23} \cdot Z_3 + \ldots\ldots + \tau_{25} \cdot Z_5 + R_{2p} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tau_{51} \cdot Z_1 + \tau_{52} \cdot Z_2 + \tau_{53} \cdot Z_3 + \ldots\ldots + \tau_{55} \cdot Z_5 + R_{5p} = 0.$$

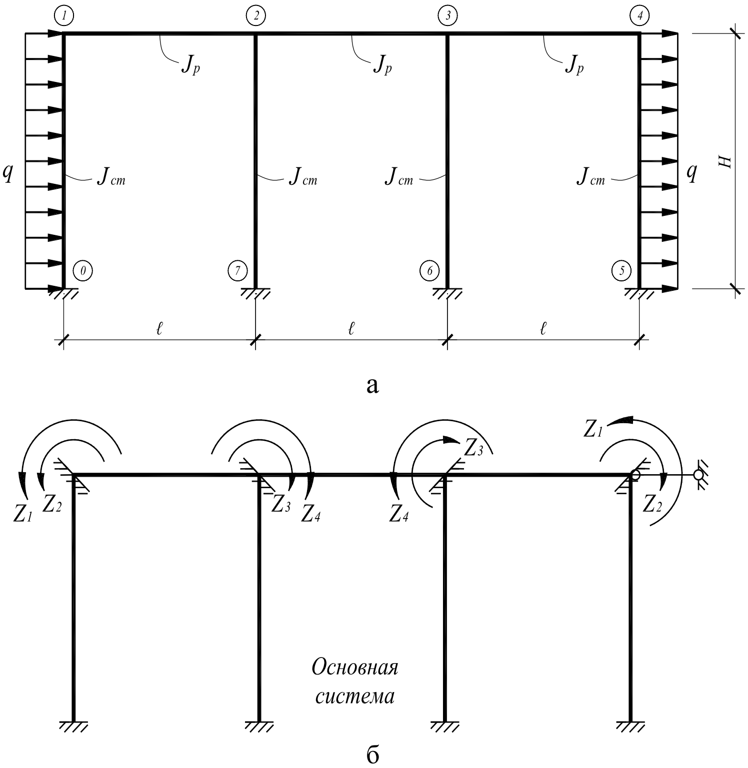


Рисунок 1

Для построения единичных эпюр примем следующие обозначения:

$$L/H = n; \quad J_p/J_{ст} = m; \quad 2EJ_{ст}/H = к.$$

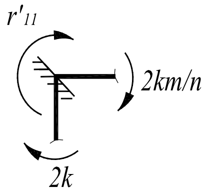
На рис. 2 приведены единичные и грузовая эпюры.

Так как неизвестные Z_1, Z_3, Z_5 – кососимметричные, а Z_2 и Z_4 – симметричные, то эпюры M_1, M_3, M_5 – кососимметричные, а эпюры M_2 и M_4 – симметричные.

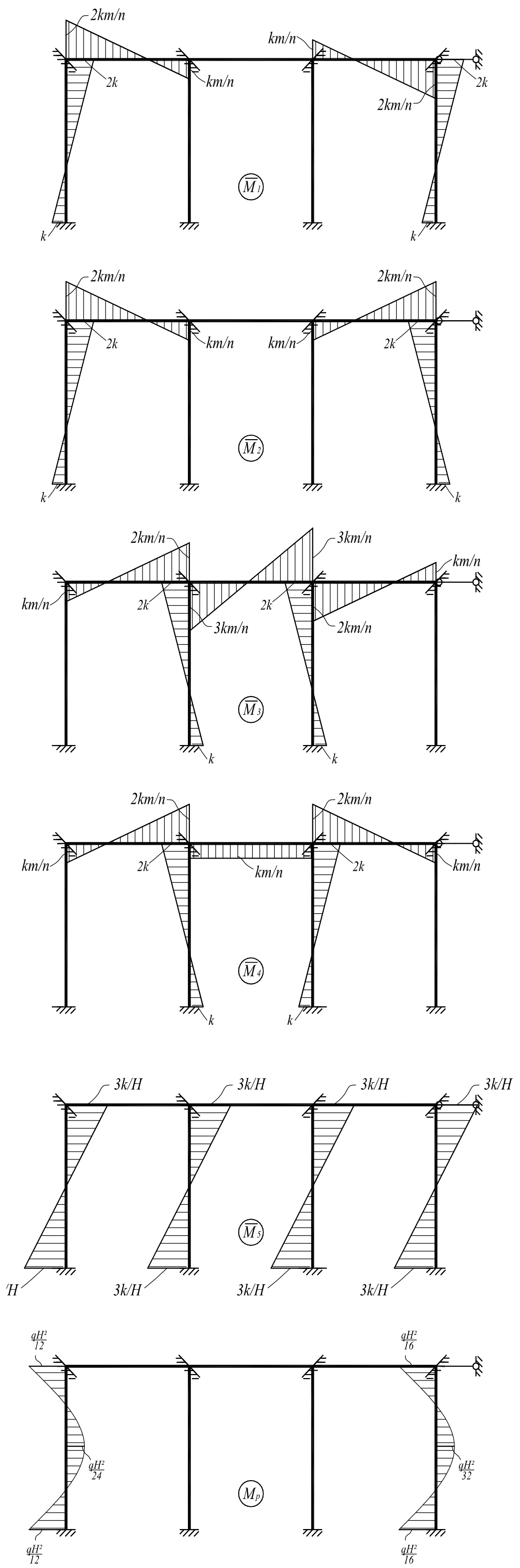
Коэффициенты канонических уравнений представляют собой реактивные усилия (моменты или силы). Так как для ликвидации угловых перемещений во все четыре узла введены моментные связи, то все коэффициенты первых четырех канонических уравнений представляют собой момент. В частности τ_{11} – реактивный момент, возникающий в первой связи от $Z_1 = 1$. Первая связь имеется как в первом, так и в четвертом узле.

Следовательно, τ_{11} состоит из двух слагаемых $\tau_{11} = \tau'_{11} + \tau''_{11}$,

где τ'_{11} – момент, возникающий в первом узле от $Z_1 = 1$; τ''_{11} – момент, возникающий в четвертом узле от $Z_1 = 1$.

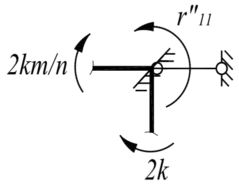


$$\sum M_{уз} = 0; \quad r'_{11} = 2k \cdot {(m+n)}/{n}.$$


2km/n
km/n
2k
km/n
2km/n
2k
k
k
$\overline{M}_1$
2km/n
2km/n
2k
km/n
km/n
2k
k
k
$\overline{M}_2$
2km/n
3km/n
km/n
km/n
2k
2k
3km/n
2km/n
k
k
$\overline{M}_3$
2km/n
2km/n
km/n
2k
km/n
2k
km/n
k
k
$\overline{M}_4$
3k/H
3k/H
3k/H
3k/H
3k/H
3k/H
3k/H
$\overline{M}_5$
$\frac{qH^2}{12}$
$\frac{qH^2}{16}$
$\frac{qH^2}{24}$
$\frac{qH^2}{32}$
M_p
$\frac{qH^2}{12}$
$\frac{qH^2}{16}$

f

Рисунок 2



$$\sum M_{уз} = 0; \qquad r''_{11} = 2k \cdot {(m+n)}/{n}.$$

Следовательно, $\tau_{11} = 2 \cdot 2\kappa \cdot {(m + n)}/{n} = 4\kappa \cdot {(m + n)}/{n}$.

Таким же образом определены все коэффициенты первых четырех канонических уравнений

$$\tau_{22} = 4\kappa \cdot {(m + n)}/{n}; \ \tau_{33} = 2\kappa \cdot {(5m + 2n)}/{n};$$

$$\tau_{44} = 2\kappa \cdot {(3m + 2n)}/{n}; \ \tau_{45} = 0; \ \tau_{12} = \tau_{21} = 0; \ \tau_{34} = \tau_{43} = 0;$$

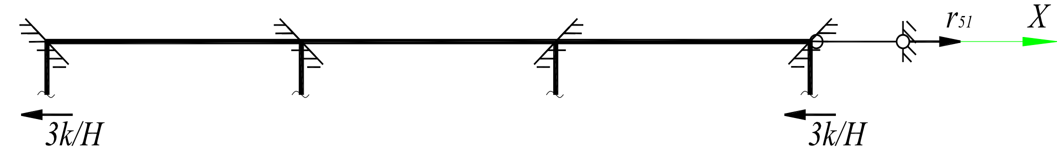
$$\tau_{14} = \tau_{41} = 0; \ \tau_{24} = -{2\kappa \cdot m}/{n}; \ \tau_{13} = -{2\kappa \cdot m}/{n} = \tau_{31};$$

$$\tau_{23} = \tau_{32} = 0; \ R_{1p} = -{7q \cdot H^2}/{48}; \ R_{2p} = -{q \cdot H^2}/{48};$$

$$R_{3p} = 0; \ R_{4p} = 0.$$

Коэффициенты пятого канонического уравнения представляют собой силу, так как пятая связь – силовая.

τ_{51} – сила, возникающая в пятой связи от $Z_1 = 1$.

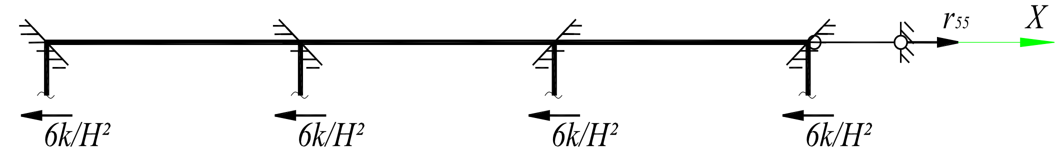


$$\Sigma X = 0; \ -{3\kappa}/{H} - {3\kappa}/{H} + \tau_{51} = 0.$$

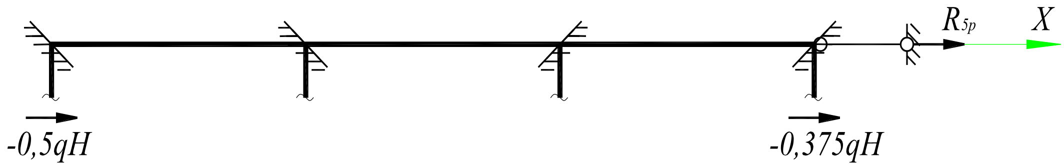
Отсюда $\tau_{51} = {6\kappa}/{H} = \tau_{15}$.

Аналогично определяются все коэффициенты пятого уравнения

$$\tau_{52} = 0; \ \tau_{53} = \tau_{35} = -{6\kappa}/{H}; \ \tau_{53} = \tau_{45} = 0.$$



$$\Sigma X = 0; \ \tau_{55} = 4 \cdot {6\kappa}/{H^2} = {24\kappa}/{H^2}.$$



$$\Sigma X = 0; \ R_{5p} = -0,875 \cdot q \cdot H.$$

Так как в первом, третьем и пятом уравнениях по два побочных коэффициента равны нулю, а во втором и четвертом - по три побочных коэффициента равны нулю, то система распадается на две подсистемы:

$$\begin{aligned} \tau_{11} \cdot Z_1 + \tau_{13} \cdot Z_3 + \tau_{15} \cdot Z_5 + R_{1p} = 0, \\ \tau_{31} \cdot Z_1 + \tau_{33} \cdot Z_3 + \tau_{35} \cdot Z_5 + R_{3p} = 0, \\ \tau_{51} \cdot Z_1 + \tau_{53} \cdot Z_3 + \tau_{55} \cdot Z_5 + R_{5p} = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{22} \cdot Z_2 + \tau_{24} \cdot Z_4 + R_{2p} = 0, \\ \tau_{42} \cdot Z_2 + \tau_{44} \cdot Z_4 + R_{4p} = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Для того чтобы расчет довести до определения внутренних усилий M, Q и N в элементах заданной рамы, следует задаться размерами и жесткостью элементов. Пусть L = 18 м; H = 6 м; $\left(n = L/H = 18/6 = 3\right)$; $m = J_p / J_{cm} = 2{,}5$.

Решив системы (1) и (2) строится окончательная эпюра изгибающих моментов по формуле

$$M = M_p + \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \overline{M}_3 \cdot Z_3 + \overline{M}_4 \cdot Z_4 + \overline{M}_5 \cdot Z_5.$$

Затем строиться эпюра поперечных сил по эпюре изгибающих моментов, после чего строится эпюра продольных сил по эпюре поперечных сил (рис. 3).

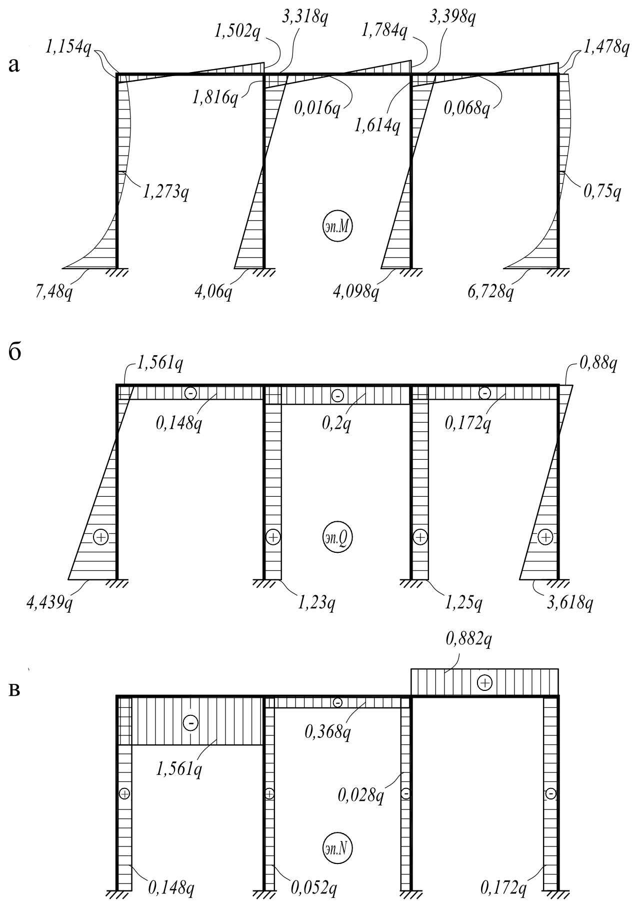


Рисунок 3

Построив эпюры M, Q и N, следует их проверить, т.е. выполнить деформационную и статическую проверки.

Так как заданная система статически неопределима, то должно иметь место:

$$\sum_{1}^{n} \frac{M \cdot \overline{M}^{\,0}}{EJ} ds = 0,$$

где M – эпюра моментов в статически неопределимой системе от заданной нагрузки в заданной раме; $\overline{M}^{\,0}$ – единичная эпюра моментов от любой единичной неизвестной в статически определимой системе (рис. 4).

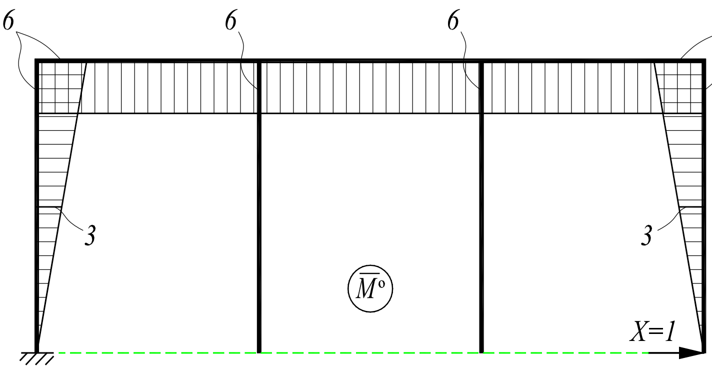


Рисунок 4

$$\frac{6}{6EJ_{ст}}\cdot(0\cdot7,48\cdot q+4\cdot3\cdot1,237\cdot q+6\cdot1,154\cdot q)-$$
$$-\frac{6\cdot18\cdot0,174\cdot q}{EJ_{риг}}+\frac{6\cdot18\cdot0,016\cdot q}{EJ_{риг}}+\frac{6\cdot18\cdot0,068\cdot q}{EJ_{риг}}+$$
$$+\frac{6}{6EJ_{ст}}\cdot(0-4\cdot3\cdot0,75\cdot q-6\cdot1,478\cdot q)=$$
$$=\frac{3,9\cdot q}{EJ_{ст}}-\frac{9,62}{EJ_{риг}}=\frac{3,9\cdot q}{EJ_{ст}}-\frac{3,848\cdot q}{EJ_{ст}}=0,052\cdot q/EJ_{ст}.$$

Погрешность составляет

$\varepsilon=\frac{0,052}{3,848}\cdot100\%=1,35\%$, что допустимо.

Общая статическая проверка должна удовлетворить требованию:

$$\Sigma X=0;\ \Sigma У=0;\ \Sigma M_{к}=0,$$

где $к$ – любая характерная точка (сечение) рамы. Примем за точку «к» точку (сечение) «0» (рис. 5).

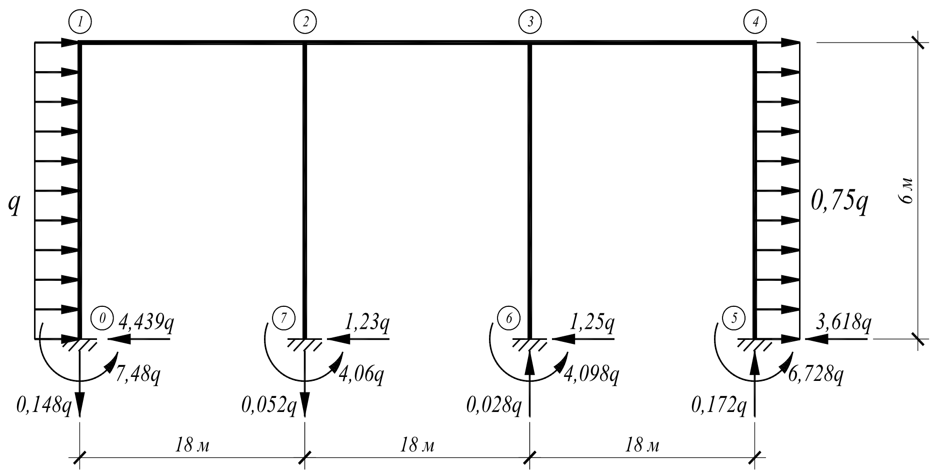


Рисунок 5

Первая проверка:

$$\Sigma X = 0;$$

$$-4{,}439 \cdot q - 1{,}23 \cdot q - 1{,}25 \cdot q - 3{,}618 \cdot q + 6 \cdot q + 6 \cdot 0{,}75 \cdot q =$$

$$= -10{,}537 \cdot q + 10{,}5 \cdot q = -0{,}037 \cdot q.$$

Погрешность составляет

$$\varepsilon = \frac{-0{,}037 \cdot q}{10 \cdot q} \cdot 100\,\% = 0{,}35\,\%$$, что допустимо.

Вторая проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$-0{,}148 \cdot q - 0{,}052 \cdot q + 0{,}028 \cdot q + 0{,}172 \cdot q = -0{,}2 \cdot q + 0{,}2 \cdot q = 0.$$

Третья проверка:

$$\Sigma M_0 = 0;$$

$$q \cdot 6 \cdot 3 + 0{,}75 \cdot q \cdot 6 \cdot 3 + 0{,}052 \cdot q \cdot 18 - 0{,}028 \cdot q \cdot 2 \cdot 18 - 0{,}172 \cdot q \cdot 3 \cdot 18 -$$

$$-7{,}48 \cdot q - 4{,}06 \cdot q - 4{,}098 \cdot q - 6{,}728 \cdot q =$$

$$= 32{,}436 \cdot q - 32{,}662 \cdot q = -0{,}226 \cdot q.$$

Погрешность составляет

$$\varepsilon = \frac{-0{,}226 \cdot q}{32{,}436 \cdot q} \cdot 100\,\% = 0{,}7\%$$, что допустимо.

Получено 11.05.12