

ЗУБЕНКО ОЛЕСЯ ВЛАДИМИРОВНА

О ВЫЧИСЛИМОСТИ ЦЕНТРА ВЫЧИСЛИМОЙ ГРУППЫ

Специальность 6N0601 «Математика»

Автореферат
магистерской диссертации на соискание
академической степени магистра естественных наук

Республика Казахстан
г. Усть-Каменогорск,
2011 г.

Работа выполнена в Восточно-Казахстанском государственном техническом университете им. Д.Серикбаева

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор
Хисамиев Н.Г.

Официальные оппоненты

д.ф.-м.н., профессор
Бадаев С.А.

Защита состоится «22» июня 2011 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета по специальности 6N0601 «Математика» при Восточно-Казахстанском государственном техническом университете имени Д. Серикбаева по адресу: 070010, Республика Казахстан, Восточно-Казахстанская область, г. Усть-Каменогорск, ул. Серикбаева, 19, главный корпус, Г-3-304.

Реферат разослан «13» мая 2011 года.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РГКП «Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д.Серикбаева

Диссертант

Зубенко О.В.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Ж.Т. Рахметуллина

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Современное развитие математики и электронно-вычислительной техники приводит к тому, что понятие алгоритма становится одним из важнейших понятий современной математики. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные задачи, появляются новые направления. Одним из таких направлений является теория конструктивных моделей. Бурное развитие теории моделей, одного из разделов математической логики, приходится на последние два десятилетия. Становление теории конструктивных моделей как интересного самостоятельного направления современной математической логики обязано появлению статьи А.И.Мальцева «Конструктивные алгебры». А.И.Мальцеву принадлежит и ряд важнейших результатов, как по разрешимости элементарных теорий, так и по конструктивным моделям. Наиболее свежей проблематикой обладает теория конструктивных моделей – теория, которая возникла на стыке теории моделей и теории нумераций. За этот период теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Конструктивные абелевы группы изучались в работах А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, В.П.Добрица, А.Т.Нуртазина, Н.Г.Хисамиева Дж. Найт и других авторов. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало. Ю.Л.Ершов [1] доказал, что конструктивизация локально нильпотентной группы без кручения продолжается естественным образом до ее пополнения. В работе С.С.Гончарова, А.В.Молокова, Н.С.Романовского [2] построена нильпотентная группа, алгоритмическая размерность которой конечна. И.В.Латкин [3] построил пример позитивно нумерованной нильпотентной группы без кручения, которая неконструктивизируема.

Теория групп относится к одному из важнейших разделов современной алгебры. Она имеет богатую и содержательную историю. К настоящему времени эта часть математики превратилась в широкую и богатую содержанием науку, имеющую многочисленные применения, как в самой математике, так и за ее пределами – в топологии, теории функций, кристаллографии, квантовой механике, теории кодирования, криптографии и других областях математики и естествознания. Одним из важнейших классов групп являются нильпотентные группы, промежуточные между абелевыми и разрешимыми группами.

Работа посвящена исследованию вопросов вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы.

Объект и предмет исследования является конструктивные нильпотентные группы.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование вопросов вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы.

Методология и методы исследования. Методологическую основу составили научные труды зарубежных и отечественных математиков,

М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов, посвященные теории групп и теории конструктивных моделей.

Информационной базой исследования послужили монографии [4], [5].

Научная новизна и практическая значимость исследования – исследованы вопросы вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в материалах XI Республиканской научно-технической конференции «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана» [8] и в журнале «Вестник КАСУ» (выпуск 2011 г.) [9].

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на научно-практической конференции «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана» в 2011 году.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

Разрешимые группы представляют собою очень широкое обобщение абелевых групп и лишь весьма немногие нетривиальные свойства последних удается распространить на разрешимые группы. В этом отношении более интересны нильпотентные группы, промежуточные между абелевыми и разрешимыми группами.

Пусть в группе G дан инвариантный ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots \subset A_n = G \quad (1.1)$$

Этот ряд называется центральным рядом, если при $i = 0, 1, \dots, n-1$ фактор-группа A_{i+1}/A_i лежит в центре фактор-группы G/A_i ; иными словами, если взаимный коммутант $[A_{i+1}, G]$ лежит в A_i ,

$$[A_{i+1}, G] \subseteq A_i, i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.2)$$

Заметим, что инвариантности ряда (1.1) можно было бы и не требовать, так как из (1.2) вытекает для всех i включение

$$[A_i, G] \subseteq A_i,$$

равносильное тому, что A_i нормально в G .

Группа G , обладающая хотя бы одним центральным рядом, называется нильпотентной.

Всякая подгруппа и всякая фактор-группа нильпотентной группы сами нильпотентны.

Действительно, пусть в нильпотентной группе G с центральным рядом (1.1) дана подгруппа H . Если

$$B_i = A_i \cap H, i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

то ввиду (1.2) при $i = 0, 1, \dots, n-1$ будет

$$[B_{i+1}, H] \subseteq [A_{i+1}, G] \cap H \subseteq A_i \cap H = B_i.$$

Подгруппы (1.3) составят, следовательно, после удаления повторений центральный ряд для подгруппы H .

Пусть, с другой стороны, дано гомоморфное отображение φ нильпотентной группы G с центральным рядом (1.1) на группу \bar{G} . Обозначим через \bar{A}_i образ подгруппы A_i при этом гомоморфизме, $i = 0, 1, \dots, n$. Пусть \bar{a}_{i+1} и \bar{g} – элементы соответственно из \bar{A}_{i+1} и \bar{G} , $i = 0, 1, \dots, n-1$, а a_{i+1} и g – некоторые их прообразы при гомоморфизме φ в A_{i+1} и G ,

$$a_{i+1}\varphi = \bar{a}_{i+1}, g\varphi = \bar{g}.$$

Так как, по (1.2), $[a_{i+1}, g] \in A_i$ то

$$[\bar{a}_{i+1}, \bar{g}] = [a_{i+1}, g]\varphi \in \bar{A}_i.$$

Подгруппы $\bar{A}_i, i = 0, 1, \dots, n$, составят, следовательно, после удаления повторений центральный ряд группы \bar{G} .

Прямое произведение конечного числа нильпотентных групп нильпотентно.

В самом деле, пусть

$$G = \prod_{k=1}^s G_k,$$

причем все группы G_k нильпотентны. Выбираем в этих группах по одному центральному ряду, причем считаем, что длины этих рядов совпадают, допуская, если нужно, ряды с повторениями. Пусть

$$E = A_{k0} \subseteq A_{k1} \subseteq \dots \subseteq A_{ki} \subseteq \dots \subseteq A_{kn} = G_k$$

будет центральный ряд группы $G_k, k = 1, 2, \dots, s$. Тогда подгруппы

$$B_i = \prod_{k=1}^s A_{ki}, i = 0, 1, \dots, n,$$

будут составлять центральный ряд группы G .

Заметим, что расширение нильпотентной группы при помощи нильпотентной не обязано быть нильпотентным, так как иначе все разрешимые группы оказались бы нильпотентными.

Цепь подгрупп

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_k \supseteq \dots,$$

где

$$G_{k+1} = [G_k, G], k = 0, 1, 2, \dots$$

называется нижней центральной цепью.

Построим эту цепь в нильпотентной группе G с центральным рядом (1.1). По (1.2)

$$G_1 = [G, G] = [A_n, G] \subseteq A_{n-1}.$$

Пусть уже доказано, что $G_k \subseteq A_{n-k}$. Тогда

$$G_{k+1} = [G_k, G] \subseteq [A_{n-k}, G] \subseteq A_{n-k-1}.$$

Отсюда следует, что

$$G_n \subseteq A_0 = E,$$

т.е. $G_n = E$.

Этим доказано, что в нильпотентной группе нижняя центральная цепь в конечном числе шагов доходит до единицы, т.е. превращается в нижний центральный ряд, причем длина этого ряда больше длины любого центрального ряда группы. Нижний центральный ряд удовлетворяет данному выше определению центрального ряда и поэтому существование конечного нижнего центрального ряда можно принять в качестве одного из определений нильпотентной группы.

Во всякой группе G можно построить также верхнюю центральную цепь: это будет такая последовательность подгрупп

$$E = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_k \subseteq \dots,$$

что Z_1 есть центр группы $G, Z_2/Z_1$ – центр группы G/Z_1 , вообще Z_{k+1}/Z_k – центр группы G/Z_k . Эту цепь, состоящую из характеристических подгрупп, в

общем случае можно продолжать трансфинитно, причем она стабилизируется, не обязательно доходя до самой группы G .

Построим верхнюю центральную цепь в нильпотентной группе G с центральным рядом (1.1). Так как, по (1.2), $[A_1, G] = E$ то $A_1 \subseteq Z_1$. Пусть уже доказано, что $A_k \subseteq Z_k$. Тогда, по (1.2),

$$[A_{k+1}, G] \subseteq A_k \subseteq Z_k.$$

Это показывает, что при естественном гомоморфном отображении группы G на фактор-группу G/Z_k подгруппа A_{k+1} будет отображаться в центр этой фактор-группы, а поэтому $A_{k+1} \subseteq Z_{k+1}$. Отсюда следует, что

$$A_n = G \subseteq Z_n,$$

т.е. $Z_n = G$.

Этим доказано, что в нильпотентной группе верхняя центральная цепь в конечном числе шагов доходит до самой группы, т.е. превращается в верхний центральный ряд, причем длина этого ряда не превосходит длину любого центрального ряда группы. Существование верхнего центрального ряда также может быть принято в качестве определения нильпотентной группы.

В нильпотентной группе нижний и верхний центральные ряды имеют одну и ту же длину, равную минимальной длине центральных рядов группы. Эта длина называется классом нильпотентной группы. В частности, нильпотентными группами класса 1 будут абелевы группы, нильпотентными группами класса 2 – некоммутативные метабелевы группы.

Пусть G – нильпотентная группа, класс которой не превосходит k . Тогда k -й член G_k нижней центральной цепи этой группы равен E . Иными словами, в группе G будет тождественно выполняться соотношение

$$[\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_{k+1}] = 1.$$

Поэтому, группа G будет фактор-группой некоторой приведенной свободной группы, соответствующей этому тождественному соотношению. Это будет фактор-группа свободной группы F по k -му члену F_k ее нижней центральной цепи.

Фактор-группа F/F_k сама будет нильпотентной группой класса k ; называется ее свободной нильпотентной группой класса k . Число свободных образующих группы F называется рангом группы F/F_k .

Пусть M – подмножество группы G . Множество $Z(M) = \{x \in G \mid mx = xm, m \in M\}$ называется централизатором M в группе G . Централизатор всей группы называется ее центром и обозначается через Y .

Группа G называется нильпотентной степени n , если справедливо равенство $\zeta_n G = G$ (или, что равносильно, $\gamma_n G = 1$).

Секцией группы G называется всякая факторгруппа B/A , где B, A – подгруппы из G , причем A – нормальная подгруппа в B .

Если G – нильпотентная группа без кручения и все секции ее верхнего центрального ряда имеют конечную размерность, то будем говорить, что группа G имеет конечную размерность.

Абелева подгруппа A группы G называется максимально абелевой, если A не содержится ни в какой большей абелевой подгруппе.

2 КОНСТРУКТИВНЫЕ МОДЕЛИ

Теория конструктивных моделей - один из разделов математики, возникший на границе моделей теории, алгебры и теории рекурсивных функций и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах.

Статья А.И. Мальцева «Конструктивные алгебры» явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в которой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дальнейшие пути развития этой теории. Большую роль в становлении и развитии этого раздела математики сыграли работы Ю.Л. Ершова и его учеников, в которых был решен ряд основных проблем, выработаны новые понятия и определены новые направления в исследовании конструктивных моделей.

Все общие рассуждения будут вестись обычно в некоторой фиксированной сигнатуре $\sigma_0 = (P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots)$, содержащей только предикатные символы и такой, что функция $f: k \mapsto n_k$ общерекурсивна. Рассмотрим следующие сигнатуры:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_0 \cup \langle a_0, a_1, \dots \rangle; \\ \sigma_2 &= \sigma_0 \cup \langle c \rangle; \\ \sigma_3 &= \sigma_1 \cup \langle c \rangle,\end{aligned}$$

которые получаются присоединением к сигнатуре σ_0 символов для констант. Будем предполагать, что $n_0 = 2$ и предикат P_0 на любой модели определен как равенство (вместо $P_0(x, y)$ будем писать $x = y$).

Пусть L_i - совокупность всех формул языка узкого исчисления предикатов с равенством (P_0) сигнатуры $\sigma_i, i = 0, 1, 2, 3$. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{ccc} & L_1 & \\ & \subseteq & \subseteq \\ L_0 & & L_3, L_1 \cap L_2 = L_0. \\ & \subseteq & \subseteq \\ & L_2 & \end{array}$$

Предположим еще, что задана какая-нибудь фиксированная геделева нумерация g множества $L_3 (g: \omega \rightarrow L_3)$. Под геделевой нумерацией множества L_3 понимаем любую нумерацию g этого множества такую, что по g -номеру можно эффективно построить саму формулу, а по формуле из L_3 можно эффективно найти ее g -номер.

С каждым подмножеством $S \subseteq L_3$ связывается множество $g^{-1}(S)$ всех номеров формул S . Назовем S разрешимым множеством, если $g^{-1}(S)$ рекурсивно. Так, множества L_0, L_1 и L_2 разрешимы.

Введем несколько определений, относящихся к нумерованным множествам и моделям.

Пусть S – произвольное множество. Нумерацией ν множества S назовем отображение $\nu: \omega \rightarrow S$ множества всех натуральных чисел ω на множество S . Пара (S, ν) , где S – множество, а ν – его нумерация, называется нумерованным множеством; морфизмом одного нумерованного множества (S_0, ν_0) в другое (S_1, ν_1) назовем всякое отображение $\mu: S_0 \rightarrow S_1$, для которого существует общерекурсивная функция h такая, что $\mu\nu_0 = \nu_1 h$.

Нумерованной моделью (сигнатуры σ_0) назовем пару (\mathfrak{R}, ν) , где $\mathfrak{R} = \langle M, P_0, P_1, \dots \rangle$ – модель (сигнатуры σ_0), а ν – нумерация основного множества M модели \mathfrak{R} . Гомоморфизмом нумерованной модели (\mathfrak{R}_0, ν_0) в нумерованную модель (\mathfrak{R}_1, ν_1) назовем всякое отображение $\mu: M_0 \rightarrow M_1$ основного множества M_0 модели \mathfrak{R}_0 в основное множество M_1 модели \mathfrak{R}_1 , которое является как гомоморфизмом модели \mathfrak{R}_0 в модель \mathfrak{R}_1 , так и морфизмом из (M_0, ν_0) в (M_1, ν_1) .

Гомоморфизм μ нумерованной модели (\mathfrak{R}_0, ν_0) в нумерованную модель (\mathfrak{R}_1, ν_1) назовем эквивалентностью, если μ – изоморфизм \mathfrak{R}_0 на \mathfrak{R}_1 , а обратное отображение μ^{-1} есть морфизм из (M_1, ν_1) в (M_0, ν_0) . Если существует эквивалентность из (\mathfrak{R}_0, ν_0) в (\mathfrak{R}_1, ν_1) , то эти нумерованные модели назовем эквивалентными и будем обозначать это так: $(\mathfrak{R}_0, \nu_0) \approx (\mathfrak{R}_1, \nu_1)$.

По каждой нумерованной модели (\mathfrak{R}, ν) можно каноническим образом построить некоторое σ_1 – обогащение \mathfrak{R}_ν модели \mathfrak{R} (т.е. модель сигнатуры σ_1 , основное множество которой есть основное множество модели \mathfrak{R} , а предикаты из σ_0 в \mathfrak{R}_ν совпадают с соответствующими предикатами \mathfrak{R}) следующим образом: в качестве значения константы $a_k, k \in \omega$, берем элемент $\nu k \in M$.

$Th_0(\mathfrak{R}, \nu)$ – элементарная теория модели \mathfrak{R} , т.е. множество всех замкнутых формул сигнатуры σ_0 , истинных на модели \mathfrak{R} ; $Th_1(\mathfrak{R}, \nu)$ – элементарная теория модели \mathfrak{R}_ν , т.е. множество всех замкнутых формул сигнатуры σ_1 , истинных на модели \mathfrak{R}_ν ; $Th_3(\mathfrak{R}, \nu)$ – теория сигнатуры σ_3 , системой аксиом которой является множество формул

$$Th_1(\mathfrak{R}, \nu) \cup \{c \neq a_0, \dots, c \neq a_k, \dots\};$$

$$Th_2(\mathfrak{R}, \nu) = Th_3(\mathfrak{R}, \nu) \cap L_2.$$

Нумерованная модель (\mathfrak{R}, ν) называется конструктивной моделью, если множество $\bar{D}(\mathfrak{R}, \nu) = \left\{ \langle k, m_1, \dots, m_{n_k} \rangle \mid \mathfrak{R} \models P_k(\nu m_1, \dots, \nu m_{n_k}) \right\}$ рекурсивно.

Одной из основных проблем является нахождение условий, при которых теория T имеет конструктивную модель, т.е. такую конструктивную модель (\mathfrak{R}, ν) что $Th_0(\mathfrak{R}, \nu) \subseteq T$.

Следующее определение выделяет важный частный случай понятия конструктивной модели, который существен при изучении разрешимых теорий.

Нумерованная модель (\mathfrak{R}, ν) называется сильно конструктивной, если $Th_1(\mathfrak{R}, \nu)$ – разрешимая теория.

Не менее важным вопросом, чем вопрос о существовании (сильно) конструктивных моделей у теории, является вопрос о том, можно ли занумеровать конкретную модель так, чтобы она стала (сильно) конструктивной.

Если $\nu : \omega \rightarrow |\mathfrak{R}|$ – нумерация основного множества модели \mathfrak{R} такая, что (\mathfrak{R}, ν) – (сильно) конструктивная модель, то ν называется (сильной) конструктивизацией модели \mathfrak{R} . Модель называется (сильно) конструктивизируемой, если она имеет по крайней мере одну (сильную) конструктивизацию.

Сформулируем две проблемы в этой терминологии:

Проблема существования (сильно) конструктивизируемой модели у заданной теории T .

Проблема существования (сильной) конструктивизации у заданной модели \mathfrak{R} .

Если проблема (сильной) конструктивизируемости для модели \mathfrak{R} имеет решение, то естественно встает вопрос о единственности (сильной) конструктивизации этой модели.

Если ν_0 и ν_1 – две конструктивизации модели \mathfrak{R} , то назовем их эквивалентными, если тождественное отображение $|\mathfrak{R}|$ на себя есть эквивалентность нумерованных моделей (\mathfrak{R}, ν_0) и (\mathfrak{R}, ν_1) . Пусть ν_0 и ν_1 – две нумерации множества M ; сводится к ν_1 (символически: $\nu_0 \leq \nu_1$), если существует одноместная общерекурсивная функция f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Нумерации ν_0 и ν_1 эквивалентны ($\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leq \nu_1$ и $\nu_1 \leq \nu_0$.

(Сильно) конструктивизируемая модель \mathfrak{R} называется (сильно) конструктивно устойчивой, если любые две (сильные) конструктивизации \mathfrak{R} эквивалентны.

Таким образом, конструктивно устойчивые модели – это модели, для которых проблема конструктивизации имеет единственное решение.

Существует и другое понятие, которое характеризует единственность конструктивизации модели в более слабом смысле.

Конструктивизируемая модель \mathfrak{R} называется автоустойчивой, если для любых двух конструктивизаций ν_0 и ν_1 модели \mathfrak{R} существует эквивалентность $\mu : (\mathfrak{R}, \nu_0) \rightarrow (\mathfrak{R}, \nu_1)$.

Одной из основных проблем конструктивных моделей является проблема существования конструктивных моделей с различными элементарными

свойствами, т.е. свойствами, записываемыми на языке узкого исчисления предикатов. В этом направлении получен (к 1978 г.) ряд интересных и важных теорем. Существование широкого класса сильно конструктивных моделей дает следующая теорема: если $T \subseteq L_0$ - разрешимая теория, то существует такая последовательность сильно конструктивных моделей

$$(\mathfrak{R}_0, \nu_0), (\mathfrak{R}_1, \nu_1), \dots, (\mathfrak{R}_k, \nu_k), \dots, k < \omega,$$

что:

- 1) $T = Th(\{\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \dots\})$
- 2) множество $\{\langle x, y \rangle \mid g(y) \in Th_1(\mathfrak{R}_x, \nu_x)\}$ является рекурсивным.

Было замечено, что существуют формулы, не имеющие конструктивных моделей. Следующие две теоремы дают некоторые достаточные условия существования конструктивных моделей у теории с рекурсивно перечислимым множеством аксиом.

Если T – рекурсивно перечислимая $\forall\exists$ -теория, имеющая модель \mathfrak{R} с рекурсивно перечислимой \exists -теорией, то теория T имеет конструктивную модель.

Теория T конечной сигнатуры $s = \langle P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k}, c_0, \dots, c_l \rangle$ называется \forall -конечной, если универсальная теория любого расширения $T' \subseteq T$ (той же сигнатуры) конечно аксиоматизируема (универсальными предложениями). Теория T называется сильно \forall -конечной, если для любого конечного множества $\langle c_{l+1}, \dots, c_N \rangle$ константных символов теория T^* , определенная теорией T в языке сигнатуры $\sigma^* = \sigma \cup \langle c_{l+1}, \dots, c_N \rangle$, является \forall -конечной.

Если теория T сильно \forall -конечна, а T' – рекурсивно перечислимое расширение T , то T' имеет конструктивную модель.

Другой круг исследуемых вопросов связан с проблемой существования для заданной модели \mathfrak{R} нумерации ν такой, чтобы пара (\mathfrak{R}, ν) стала (сильно) конструктивной моделью. Модель, для которой существует такая нумерация, называется (сильно) конструктивизируемой, а соответствующая нумерация (сильной) конструктивизацией. Для решения ряда вопросов, связанных с конструктивизируемостью моделей, оказывается полезной теорема Ершова о ядре, применение которой к конкретным алгебраическим системам позволяет решить ряд естественных вопросов. В частности, установлено: 1) для любой конструктивной локально нильпотентной группы без кручения существует конструктивное пополнение; 2) если (F, ν) – конструктивное поле, F_0 - алгебраическое расширение поля F , то ν продолжается до конструктивизации поля F_0 тогда и только тогда, когда семейство конечных множеств многочленов над F от счетного числа переменных, имеющих корень в F , рекурсивно перечислимо.

Пусть G – группа. Отображение $\nu: \omega \rightarrow G$ множества всех натуральных чисел на G называется нумерацией группы G . Если существует алгоритм, который по любым числам n , m и s определяет справедливость равенства $\nu n \cdot \nu m = \nu s$, то пара (G, ν) называется конструктивной группой.

Группа G называется конструктивизируемой, если существует такая ее нумерация ν , что (G, ν) – конструктивная группа. Подгруппа $H \subseteq G$ называется вычислимо перечислимой (вычислимой) в (G, ν) , если множество $\nu^{-1}H$ вычислимо перечислимо (вычислимо). Максимальная система линейно независимых элементов абелевой группы без кручения A называется базисом группы A , а число элементов базиса – размерностью группы A .

3 О ЦЕНТРЕ ДВУХ СТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В работе Н.Г. Хисамиева, А.А. Конырхановой «О конструктивных нильпотентных группах» доказана следующая теорема. [1]

Теорема 1. Если в конструктивной нильпотентной группе без кручения (G, ν) существует вычислимо перечислимая абелева нормальная подгруппа A , содержащая центр Z , и такая, что факторгруппа $\bar{G} = G/A$ без кручения и имеет конечную размерность, то центр Z является вычислимой подгруппой в (G, ν) .

Доказательство. Пусть

$$\bar{Z}_0 = e \subseteq \bar{Z}_1 \subseteq \dots \subseteq \bar{Z}_n = \bar{G}$$

гиперцентры группы \bar{G} , и $\varphi: G \rightarrow \bar{G}$ – естественный гомоморфизм, а $Z_i = \varphi^{-1}\bar{Z}_i$. Так как факторгруппа $\bar{Z}_i / \bar{Z}_{i-1}$ изоморфна Z_i / Z_{i-1} , то группа Z_i / Z_{i-1} имеет конечную размерность. Пусть $\bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{im_i}$ – база факторгруппы $\bar{Z}_i / \bar{Z}_{i-1}$.

Докажем, что тогда справедлива эквивалентность

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge \wedge \{xg_{ij} = g_{ij}x \mid i \leq n, 1 \leq j \leq m_i\}.$$

Действительно, пусть для $x \in G$ справедлива правая часть эквивалентности и g – произвольный элемент группы G . Тогда существуют числа $s, k_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i$ и элемент $a \in A$ такие, что верно равенство

$$g^s = g_{n1}^{k_{n1}} \dots g_{nm_n}^{k_{nm_n}} \dots g_{11}^{k_{11}} \dots g_{1m_1}^{k_{1m_1}} a.$$

Отсюда и из предположения о справедливости правой части эквивалентности имеем $g^s x = x g^s$. Отсюда и из того, что в любой нильпотентной группе без кручения верна импликация:

1) если $x^m y^n = y^n x^m$, то $xy = yx$,

имеем равенство $xg = gx$, т.е. x принадлежит центру группы G . Эквивалентность доказана. Отсюда и из условия теоремы получаем, что центр Z является вычислимо перечислимой подгруппой в G . Так как дополнение центра в любой конструктивной группе вычислимо перечислим, то по теореме Поста центр Z вычислимая подгруппа в (G, ν) . Теорема доказана.

Следствие 1. Если в конструктивной нильпотентной группе без кручения (G, ν) ступени 2 существует вычислимо перечислимая максимальная абелева

подгруппа A такая, что факторгруппа $\bar{G} = G/A$ имеет конечную размерность, то центр C является вычислимой подгруппой в (G, ν) .

Доказательство. Покажем, что все условия теоремы 1 выполнены. Очевидно, что центр группы G содержится в A . Подгруппа A является нормальной в G . Действительно, пусть даны элемент $a \in A$ и произвольный элемент $x \in G$. Покажем, что элемент $x^{-1}ax$ перестановочен с любым элементом a_0 из A . Так как коммутант содержится в центре нильпотентной группы без кручения степени 2, то справедливы равенства:

$$x^{-1}axa_0 = x^{-1}axa^{-1}aa_0 = x^{-1}axa_0a = a_0x^{-1}axa^{-1}a = a_0x^{-1}ax.$$

Отсюда и из того, что A является максимальной абелевой подгруппой в G следует, что A является нормальной в G . Отсюда в силу максимальной подгруппы A и импликации 1) получим, что факторгруппа G/A не имеет кручения. Таким образом все условия теоремы 1, а следовательно и следствия, доказаны.

Теорема 2. Если в конструктивизируемой двух ступенно нильпотентной группе G без кручения существует конечное множество $G_0 = \{g_1, \dots, g_n\}$ такое, что централизатор $A = Z(G_0)$ абелев и G/A имеет конечную размерность, то центр Z является вычислимым при любой конструктивизации ν группы G .

Доказательство. Докажем, что для подгруппы A справедливо условие теоремы 1. Для этого нужно показать, что A – нормальна в G . Пусть даны произвольные элементы $g \in G$ и $a \in A$. Нам нужно доказать, что $g^{-1}ag \in A$, т.е. $(g^{-1}ag) \cdot g_i = g_i \cdot (g^{-1}ag)$. Действительно,

$$g^{-1}ag \cdot g_i = g^{-1}aga^{-1}ag_i = g^{-1}aga^{-1}g_i a = g_i g^{-1}aga^{-1}a = g_i \cdot (g^{-1}ag)$$

Следовательно $g^{-1}ag \in A$, т.е. $A \trianglelefteq G$.

Докажем, что G/A – без кручения. Действительно, пусть $g^n \in A$. Тогда $g^n g_i = g_i g^n$. Отсюда по свойству нильпотентных групп без кручения имеем $g \cdot g_i = g_i \cdot g$, т.е. $g \in A$.

Вычислимая перечислимость подгруппы A очевидно. Отсюда получаем требуемое.

Теорема 3. Пусть (G, ν) – конструктивная нильпотентная группа. Тогда существует вычислимая последовательность вычислимых подгрупп

$$G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} \supseteq \dots$$

такая, что центр $Z = \bigcap G_n$.

Доказательство. Пусть $g_n = \nu_n$ и $G_n = Z(g_0, \dots, g_{n-1})$ – централизатор множества $M_n = \{g_0, \dots, g_{n-1}\}$. Тогда подгруппа G_n вычислима и $G_n \supseteq G_{n+1}$. Легко проверить, что последовательность $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq G_{n+1} \supseteq \dots$ вычислима и $Z = \bigcap G_n$.

Следствие. Если в конструктивизируемой нильпотентной группе G существует конечное множество $M_n = \{g_0, \dots, g_{n-1}\} \subseteq G$ такое, что для любого

$x \in G$ верно $Z(M_0) = Z(M_0, x)$, то центр Z вычислим при любой конструктивизации ν группы G .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время понятие вычислимости становится, безусловно, одним из важнейших понятий современной математики. Бурное развитие математической логики привело к развитию математической теории вычислимости. А это создало необходимую предпосылку к созданию электронных вычислительных машин. Развитие новых вычислительных средств для выполнения заданных программами алгоритмов оказало революционное влияние и на саму математику. Существенную часть исследований в математике стала занимать вычислительная математика, тесно связанная с использованием нового инструмента алгоритмического решения многочисленных математических проблем. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные новые задачи. Само исследование феномена вычислимости как объекта изучения математической теории привело к созданию целого ряда интересных и актуальных направлений современной математики. Одна из этих направлений - теорию конструктивных моделей, которая возникла в 50-е годы. Это направление связано с исследованием зависимости алгебраических свойств абстрактных моделей на основе построения для них представления на натуральных числах и изучения взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей. Таким образом, лежащее в фундаменте современной математики понятие группы является весьма равносильным орудием самой математики – оно является как важнейшая составная часть ряда сложных алгебраических систем, как чуткий отражатель свойств различных топологии, как испытательный полигон теории алгоритмов и многими иными путями. Важным классом групп является нильпотентные группы. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами.

Таким образом, работа посвящена исследованию вопросов вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы. В первом и во втором разделах данной работы были даны необходимые определения и общие свойства, необходимые в дальнейшем. В третьем разделе нами были доказаны теоремы, исследованы вопросы вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы.

Оценка полноты решений поставленных задач:

- поставленная цель работы достигнута, задачи решены полностью;
- теоретическая ценность диссертации состоит в изучении вопросов вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Ю.Л. Существование конструктивизаций. // Доклады АН СССР.-1972.- №5(204)-С.1041-1044.
2. Гончаров С.С., Молоков А.В., Романовский А.С. Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности // Сиб. мат. журнал.-1989.-№1(30)-С.82-88.
3. Латкин И.В. Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения. // Алгебра и логика.-1996.-№3(35)-С.308-313
4. С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов, Конструктивные модели, серия: школа алгебры и логики, Новосибирск, Научная книга, 1999.
5. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп, 4-е изд., М.: Наука, 1996.
6. Хисамиев Н.Г. О конструктивных нильпотентных группах. // Сиб. мат. журнал.-2007.-№1(48)-С.214-223.
7. N.G.Khisamiev, Construcnive R_p -torsion free nilpotent groups. // Siberian Mathematical Journal.-2009.- No 1)(vol.50)- p.117-123
8. Зубенко О.В., Хисамиев Н.Г. О центре двух ступенно нильпотентной группы без кручения. Материалы XI Республиканской научно-технической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых. // Усть-Каменогорск: ВКГТУ им. Д.Серикбаева, ч.5, стр.75.
9. Зубенко О.В., Центр вычислимой нильпотентной группы, журнал «Вестник КАСУ», выпуск 2011 г.
10. Н.Г. Хисамиев, О.В. Зубенко, Е.Т. Джелилова, Математическая логика, Усть-Каменогорск, 2011 г.

АННОТАЦИЯ

Зубенко Олеся Владимировна

О ВЫЧИСЛИМОСТИ ЦЕНТРА ВЫЧИСЛИМОЙ ГРУППЫ

Современное развитие математики и электронно-вычислительной техники приводит к тому, что понятие алгоритма становится одним из важнейших понятий современной математики. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные задачи, появляются новые направления. Одним из таких направлений является теория конструктивных моделей. Бурное развитие теории моделей, одного из разделов математической логики, приходится на последние два десятилетия. Становление теории конструктивных моделей как интересного самостоятельного направления современной математической логики обязано появлению статьи А.И.Мальцева «Конструктивные алгебры». А.И.Мальцеву принадлежит и ряд важнейших результатов, как по разрешимости элементарных теорий, так и по конструктивным моделям. Наиболее свежей проблематикой обладает теория конструктивных моделей – теория, которая возникла на стыке теории моделей и теории нумераций. За этот период теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Конструктивные абелевы группы изучались в работах А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, В.П.Добрица, А.Т.Нуртазина, Н.Г.Хисамиева, и других авторов. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало.

Теория групп относится к одному из важнейших разделов современной алгебры. Она имеет богатую и содержательную историю. К настоящему времени эта часть математики превратилась в широкую и богатую содержанием науку, имеющую многочисленные применения, как в самой математике, так и за ее пределами – в топологии, теории функций, кристаллографии, квантовой механике, теории кодирования, криптографии и других областях математики и естествознания. Одним из важнейших классов групп являются нильпотентные группы, промежуточные между абелевыми и разрешимыми группами.

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы.

ТҮЙІНДЕМЕ

Зубенко Олеся Владимировна

ЕСЕПТЕЛІНЕТІН ТОПТАРДЫҢ ЕСЕПТЕЛІНЕТІН ОРТАЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Математика және электронды-есептеу техникасының дамуы алгоритм түсінігін қазіргі заманғы математиканың ең маңызды түсініктерінің бірі болуына әкелді. Есептеу техникасының дамуы математикалық теория алдына көптеген есептерді қойды, жаңа бағыттар пайда болды. Математикалық логика бөлімдерінің бірі модельдер теориясының қарқынды дамуы соңғы екі онжылдықта болды. Қазіргі заманғы математикалық логиканың қызықты әрі өздік бағыттарының бірі ретінде конструктивті модельдер теориясының құрылуы А.И. Мальцевтің «Конструктивті алгебра» мақаласының жарық көруімен байланысты. А.И. Мальцевке элементарлы теория және конструктивті модельдер бойынша маңызды нәтижелер қатары жатады. Конструктивті абельді топтар А.И. Мальцев, Ю.Л.Ершов, С.С.Гончаров, В.П.Добриц, А.Т.Нуртазин Н.Г.Хисамиев және тағы да басқа авторлар жұмыстарында зерттелді. Конструктивті нильпотентті топтар аз зерттелген.

Топтар теориясы қазіргі заманғы алгебраның ең маңызды бөлімдерінің біріне жатады. Қазіргі уақытта математиканың осы бөлімі ауқымды және мазмұны бай ғылымға айналды және де тек математика саласында ғана емес, сонымен қатар, топология, функциялар теориясы, математика және жаратылыстану облыстарында да қолданылды. Топтардың ең маңызды кластарының бірі – нильпотентті топтар.

Диссертация конструктивті нильпотентті топтар орталығын есептеу сұрақтарын зерттеуге арналған.

ABSTRACT

Zubenko Olesya Vladimirovna

ABOUT COMPUTABILITY OF THE CENTER OF A COMPUTABLE GROUP

The modern development of mathematics and computer technology leads to the following - the concept of algorithm becomes one of the major concepts of modern mathematics. The development and enhancement of computer technology set the mathematical theory numerous tasks, therefore new directions appear. One of these directions is the theory of constructive models. The rapid development of the theory of models, one of sections in logistics, falls on the last two decades. The formation of the theory of constructive models as an interesting independent direction of modern logistics is obliged to A.I. Maltseva's article «Constructive algebras». A.I.Maltsev has also made a number of major results, both in resolvability of elementary theories, and in constructive models. The theory of constructive models is of great topicality, it is a theory that appeared at the intersection of the theory of models and the theory of numberings. For this period, the theory was enriched with new ideas, methods and structures. Constructive Abelian groups were studied in A.I.Maltseva, J.L.Ershova, S.S.Goncharova, V.P.Dobritsa, A.T.Nurtazina, N.G.Hisamieva's works, and other authors. Constructive nilpotent groups are investigated a little.

The theory of groups belongs to one of the major sections in modern algebra. It has a rich and substantial history. By this time this part of mathematics has turned into a wide and rich with the content science, having numerous applications, both in mathematics, and beyond – in topology, theory of functions, crystallography, quantum mechanics, theory of coding, cryptography and other areas of mathematics and natural sciences. One of the major classes of groups is nilpotent groups; they are intermediate between Abelian and solvable groups.

The thesis is devoted to the research of issues of computability of the center of a constructive nilpotent group.