УДК 51 На правах рукописи

РАХИМЖАНОВА АЛИМА МЫРЗАБЕКОВНА

ВЫЧИСЛИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТЫЕ ГРУППЫ, РАЗМЕРНОСТИ КОММУТАНТОВ КОТОРЫХ КОНЕЧНЫ

Специальность 6N0601-Математика

Автореферат
магистерской диссертации на соискание
академической степени магистра естественных наук

Республика Казахстан
г. Усть-Каменогорск,
2011 г.

Работа выполнена в Восточно-Казахстанском государственном техническом университете им.Д.Серикбаева

Научный руководитель д.ф-м.н, профессор Хисамиев Н.Г.

Официальные оппоненты д.ф.-м.н., профессор Бадаев С.А.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат ф-м.н, Рахметуллина Ж.Т.

Защита состоится «22» июня 2011 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета по специальности 6N0601 «Математика» при Восточно-Казахстанском государственном техническом университете имени Д. Серикбаева по адресу: 070010, Республика Казахстан, Восточно-Казахстанская область, г. Усть-Каменогорск, ул. Серикбаева, 19, главный корпус.

Реферат разослан « 12 » мая 2011 года.

Диссертант Рахимжанова А.М.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире, переживающем информационную революцию, связанную с использованием компьютеров и информационных технологий, как в производстве, так и в повседневной жизни, понятие алгоритма становится едва ли не самым важным из всех математических понятий. Усовершенствование цифровых вычислительных машин дает возможность реализовать на них все более сложные алгоритмы. Наиболее общее интуитивное понимание состоит в том, что исходными данными и результатами алгоритмов могут служить самые разнообразные конструктивные объекты. Таким образом развитие и совершенствование вычислительной техники способствовало появлению теории конструктивных моделей. Данная теория – один из разделов математики, возникший на границе теории моделей, алгебры и теории рекурсивных функций. Статья А.И. Мальцева в 1961г. под названием «Конструктивные алгебры» явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в которой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дельнейшие пути развития этой теории. А.И.Мальцеву принадлежит и ряд важнейших результатов по разрешимости элементарных теорий. За этот период теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Конструктивные абелевы группы изучались в работах А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, В.П.Добрица, А.Т.Нуртазина, Н.Г.Хисамиева, и других авторов.

Теория групп имеющеет многочисленные применения как в самой математике, так и за ее пределами — в топологии, теории функций, квантовой механике и других областях математики и естествознания. Конечной целью собственно теории групп является описание всех групповых композиций. Таким образом, лежащее в фундаменте современной математики понятие группы является весьма разносторонним орудием самой математики — оно используется как важнейшая составная часть ряда сложных алгебраических систем, как чуткий отражатель свойств различных объектов топологии, как испытательный полигон теории алгоритмов и многими иными путями. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами.

Диссертация посвящена исследованию проблемы существования конструктивизации нильпотентных групп, размерность коммутанта которых конечна.

Актуальность темы исследования

В настоящее время теория групп является одной из самых развитых областей алгебры. Важным классом групп является нильпотентные группы. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало, поэтому исследования в этой области актуальны.

Объект и предмет исследования является конструктивные нильпотентные группы.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследования вопросов существования вычислимой нильпотентной группы, размерность коммутанта, которой конечна.

Методология и методы исследования. Методологическую основу составили научные труды зарубежных и отечественных математиков: А.И. Мальцева, Ю.И. Мерзлякова, Н.Г. Хисамиева, Ю.Л.Ершова, посвященные теории групп и теории конструктивных моделей.

Информационной базой исследования послужили монографии [4], [5].

Научная новизна и практическая значимость исследования **-** найдены условия для существования конструктивизации нильпотентной группы, размерность коммутанта которой конечна.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в материалах XI Республиканской научно-технической конференции «Творчество молодых - инновационному развитию Казахстана», статья «О вычислимых нильпотентных группах, размерность коммутантов которых конечна» [9] и журнале «Вестник КАСУ», статья «Конструктивизация нильпотентной группы без кручения» [10].

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 КОНСТРУКТИВНЫЕ МОДЕЛИ

В первой главе даны необходимые определения и результаты по теории конструктивных моделей.

Сигнатурой σ языка узкого исчислении предикатов называется пара, состоящая из трех непересекающихся множеств σ^P, σ^F, σ^C и отображения $\mu : \sigma^P \cup \sigma^F \to \omega^+ = \{1,2,...\}$. Если $P \in \sigma^P$ и $\mu(P) = n$, то Р называется *n-местным предикатным символом.* Если $f \in \sigma^F$ и $\mu(f) = m$, то f называется *m-местным функциональным символом.* Элементы σ^C называются *константными символами.* Мы часто используем запись вида $\sigma = \left\langle P_1^{n_1},...,P_k^{n_k}; f_1^{m_1},...,f_s^{n_s}; c_1,...,c_t \right\rangle$, где верхние индексы являются значениями отображения μ на соответствующих символах. Запись $P \in \sigma$ ($f \in \sigma$ или $c \in \sigma$) означает, что P (f или c) является предикатным (функциональным или константным) символом сигнатуры σ.

Множество всех формул языка узкого исчисления предикатов сигнатуры σ обозначается L_σ. Запись $\Phi(x_1,....,x_n)$ означает, что все свободные переменные формулы Ф принадлежат $\{x_1,....,x_n\}$.

Алгебраической системой (или просто *системой)* $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ называется пара, состоящая из непустого множества $|\mathfrak{A}|$, называемого *основным множеством* системы $\mathfrak{A}$, и набора предикатов $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^{\mu(P)}$($P \in \sigma^P$), функций $f^{\mathfrak{A}}$:$|\mathfrak{A}|^{\mu(P)} \to |\mathfrak{A}|$($f \in \sigma^F$) и выделенных элементов $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$($c \in \sigma^C$), называемых соответственно *основными предикатами, операциями* и *константами.*

Для формулы $\Phi(x_1,....,x_n)$ сигнатуры σ и системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ определено понятие *истинности* формулы Ф на $\mathfrak{A}$ при означивании $x_i \to a_i \in |\mathfrak{A}|$, $i = 1,...,n$. Выражение $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1,... ,a_n)$ означает, что Ф истинна на $\mathfrak{A}$ на элементах $a_1,... ,a_n$. Если T — система предложений (т. е. формул, не содержащих свободных переменных), то $\mathfrak{A} \models T$ означает, что $\mathfrak{A} \models \Phi$ для всех $\Phi \in T$.

Совокупность T предложений сигнатуры σ называется *теорией,* если T замкнута относительно выводимости, т.е. если для любых предложения Ф сигнатуры σ из выполнимости следующего условия для любой системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Phi$ следует $\Phi \in T$. Используя понятие выводимости $\vdash$ в узком исчислении предикатов, можно дать следующее определение теории: $T \vdash \Phi \Rightarrow \Phi \in T$. Ясно, что для любого класса K алгебраических систем сигнатуры σ совокупность всех предложений Ф таких, что $\mathfrak{A} \in K \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Phi$, будет теорией. Эта теория T обозначается $Th(K)$. $Th(K)$ называется *элементарной теорией класса К.* Подмножество A теории T называется *системой аксиом* для T (символически: $T = [A]$), если для любой системы $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{A} \models A$ следует $\mathfrak{A} \models T$ или, что то же, $T = \{\Phi \mid \Phi$ — предложение сигнатуры σ, $A \vdash \Phi\}$.

Теория T называется *непротиворечивой,* если она отлична от множества всех предложении. Теория T называется *полной,* если она непротиворечива и для любого предложения Φ либо $\Phi \in T$. либо $\neg\Phi \in T$.

Если непустое подмножество $B \subseteq |\mathfrak{A}|$ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ замкнуто относительно основных операций и констант, т.е. $f^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n) \in B$ для любых $a_1,\dots,a_n \in B$, $f^m \in \sigma^F$ и $c^{\mathfrak{A}} \in B$ для любого $c \in \sigma^C$, то на B естественным образом можно задать структуру алгебраической системы сигнатуры σ, которую будем обозначать $\mathfrak{A}|B$. Если $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ — две системы сигнатуры σ, $|\mathfrak{A}_0| \subseteq |\mathfrak{A}_1|$ и $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1 \mid |\mathfrak{A}_1|$, то $\mathfrak{A}_0$ называется *подсистемой* $\mathfrak{A}_1$ (обозначение $\mathfrak{A}_0 \leq \mathfrak{A}_1$).

Если $\mathfrak{A}_0 \leq \mathfrak{A}_1$ и для любой формулы $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры σ и любых $a_1,\dots,a_n \in |\mathfrak{A}_0|$

$$\mathfrak{A}_0 \models \Phi(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \models \Phi(a_1,\dots,a_n),$$

то $\mathfrak{A}_0$ называется *элементарной подсистемой* $\mathfrak{A}_1$. Элементарные подсистемы обозначаются так: $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1$.

Имеется ряд теорем, которые показывают, что любая система достаточно большой мощности $\mathfrak{A}$ имеет элементарную подсистему ограниченной мощности. Например, если сигнатура σ не более чем счетна, то для любой бесконечной системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ существует счетная система $\mathfrak{A}'$ такая, что $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}_\xi$, $\xi \in \Xi$, — семейство алгебраических систем сигнатуры σ такое, что для любых $\xi, \xi' \in \Xi$ либо $\mathfrak{A}_\xi \leq \mathfrak{A}_{\xi'}$, либо $\mathfrak{A}_{\xi'} \leq \mathfrak{A}_\xi$, то на множестве $\bigcup_{\xi\in\Xi} |\mathfrak{A}_\xi|$ можно единственным образом задать структуру алгебраической системы так, что все $\mathfrak{A}_\xi$ будут ее подсистемами.

Введем несколько определений, относящихся к нумерованным множествам и моделям.

Пусть S – произвольное множество. Нумерацией ν множества S назовем отображение $\nu:\omega \to S$ множества всех натуральных чисел ω на множество S. Пара (S,ν), где S – множество, а ν – его нумерация, называется нумерованным множеством; морфизмом одного нумерованного множества (S_0,ν_0) в другое (S_1,ν_1) назовем всякое отображение $\mu: S_0 \to S_1$, для которого существует общерекурсивная функция h такая, что $\mu\nu_0 = \nu_1 h$.

Нумерованной моделью (сигнатуры σ_0) назовем пару $(\mathfrak{R},\nu)$, где $\mathfrak{R} = \langle M, P_0, P_1, \dots\rangle$ – модель (сигнатуры σ_0), а ν – нумерация основного множества M модели $\mathfrak{R}$. Гомоморфизмом нумерованной модели $(\mathfrak{R}_0,\nu_0)$ в нумерованную модель $(\mathfrak{R}_1,\nu_1)$ назовем всякое отображение $\mu: M_0 \to M_1$ основного множества M_0 модели $\mathfrak{R}_0$ в основное множество M_1 модели $\mathfrak{R}_1$, которое является как гомоморфизмом модели $\mathfrak{R}_0$ в модель $\mathfrak{R}_1$, так и морфизмом из (M_0,ν_0) в (M_1,ν_1).

Если $\nu : \omega \to |\Re|$ – нумерация основного множества модели $\Re$ такая, что $(\Re, \nu)$ – (сильно) конструктивная модель, то ν называется (сильной) конструктивизацией модели $\Re$. Модель называется (сильно) конструктивизируемой, если она имеет по крайней мере одну (сильную) конструктивизацию.

Для решения ряда вопросов, связанных с конструктивизируемостью моделей, оказывается полезной теорема Ершова о ядре, применение которой к конкретным алгебраическим системам позволяет решить ряд естественных вопросов. В частности, установлено: 1) для любой конструктивной локально нильпотентной группы без кручения существует конструктивное пополнение; 2) если (F, ν) – конструктивное поле, F_0 - алгебраическое расширение поля F, то ν продолжается до конструктивизации поля F_0 тогда и только тогда, когда семейство конечных множеств многочленов над *F* от счетного числа переменных, имеющих корень в *F*, рекурсивно перечислимо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Прямое произведение (сильно) конструктивных моделей является (сильно) конструктивной моделью.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть теория T_1 (сигнатуры σ) модельно полна относительно теории *T* (сигнатуры σ). Предположим, что T_1 рекурсивно аксиоматизируема. Тогда любая конструктивная модель (M_0, ν_0) теории *T* изоморфна рекурсивно перечислимой подмодели некоторой сильно конструктивной модели (M_1, ν_1) теории T_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Две конструктивизации алгебраической системы рекурсивно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $P \subseteq A^2$ множество

$$\nu^{-1}(P) = \{ < n, m > | < \nu n, \nu m > \in P \}$$

Рекурсивно тогда и только тогда, когда рекурсивно множество

$$\mu^{-1}(P) = \{ < n, m > | < \mu n, \mu m > \in P \}.$$

2 НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

Разрешимые группы представляют собою очень широкое обобщение абелевых групп и лишь весьма немногие нетривиальные свойства последних удается распространить на разрешимые группы. В этом отношении более интересны нильпотентные группы, промежуточные между абелевыми и разрешимыми группами.

Ключевые определения и теоремы второй главы:

Пусть *M* – подмножество группы *G*. Подмножество кольца, группы или полугруппы R, состоящее из элементов, перестановочных (коммутирующих) со всеми элементами из некоторого множества называется централизатором. $C(M) = \{ x \in G \mid mx = xm, m \in M \}$, *C*(*M*) – централизатор *M* в группе *G*.

Коммутатор элементов g и h есть элемент $[g,h]=ghg^{-1}h^{-1}$. Элементы g и h называют коммутирующими, если их коммутатор равен единичному элементу группы (такое происходит когда $gh = hg$).

Множество всевозможных коммутаторов в группе G порождает подгруппу, называемую коммутантом группы G.

A, $B \subseteq G$. Подгруппа из всех коммутаторов $[a,b]$ и их всевозможных произведений образует взаимный коммутант $[A,B]=\{aba^{-1}b^{-1} \mid a \in A, b \in B\}$.

Группа без кручения – это группа, не имеющая элементов конечного порядка. Факторгруппа группы без кручения G по ее нормальной подгруппе H есть группа без кручения тогда и только тогда, когда из того, что $x^n \in H$, следует $x \in H$ для всех $x \in G$ и для любого натурального n.

Определим в G возрастающий и убывающий ряды $\xi_0 G \le \xi_1 G \le \ldots$; $\gamma_1 G \ge \gamma_2 G \ge \ldots$; следующим образом: $\xi_0 G = 1, \gamma_1 G = G$ и если подгруппы $\xi_n G$ и $\gamma_n G$ уже определены, то $\xi_{n+1} G / \xi_n G = C(G/\xi_n G)$ и $\gamma_{n+1} G = [\gamma_n G, G]$, здесь $[A,B]$ - взаимный коммутант подгрупп A и B. Полученные ряды подгрупп называются соответственно верхним и нижним центральными рядами, а $\xi_n G$ и $\gamma_n G$ - n-м централом группы G. Группы, обладающие центральными рядами, называются нильпотентными.

В нильпотентной группе нижний и верхний центральные ряды имеют одну и ту же длину, равную минимальной длине центральных рядов группы. Эта длина называется классом нильпотентной группы. В частности, нильпотентными группами класса 1 будут абелевы группы, нильпотентными группами класса 2 – некоммутативные метабелевы группы.

Группа G называется нильпотентной группой ступени n, если справедливо равенство $\xi_n G = G$ (или, что равносильно, $\gamma_n G = 1$).

Секцией группы G называется всякая факторгруппа B/A, где B, A – подгруппы из G, причем A – нормальная подгруппа в B. Наибольшая полная подгруппа группы G называется ее полной частью.

Всякая подгруппа и всякая факторгруппа нильпотентной группы сами нильпотентны.

Прямое произведение конечного числа нильпотентных групп нильпотентно. В самом деле, пусть

$$G = \prod_{k=1}^{s} G_k,$$

причем все группы G_k нильпотентны. Выбираем в этих группах по одному центральному ряду, причем считаем, что длины этих рядов совпадают, допуская, если нужно, ряды с повторениями. Пусть

$$E = A_{k0} \subseteq A_{k1} \subseteq .. \subseteq A_{ki} \subseteq \ldots \subseteq A_{kn} = G_k$$

будет центральный ряд группы $G_k, k = 1,2,\ldots,s$. Тогда подгруппы

$$B_i = \prod_{k=1}^{s} A_{ki}, i = 0,1,\ldots,n,$$

будут составлять центральный ряд группы G.

Заметим, что расширение нильпотентной группы при помощи нильпотентной не обязано быть нильпотентным, так как иначе все разрешимые группы оказались бы нильпотентными.

Пусть G – нильпотентная группа, класс которой не превосходит n. Тогда n–й член G_k нижней центральной цепи этой группы равен e. Иными словами, в группе G будет тождественно выполняться соотношение

$$[...[[x_1, x_2], x_3],..., x_{n+1}] = 1.$$

Поэтому, группа G будет факторгруппой некоторой приведенной свободной группы, соответствующей этому тождественному соотношению. Это будет факторгруппа свободной группы F по n–му члену F_n ее нижней центральной цепи.

Факторгруппа F / F_n сама будет нильпотентной группой класса n; называется ее свободной нильпотентной группой класса n. Число свободных образующих группы F называется рангом группы F / F_n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть (G, v) – конструктивная группа, а B – ее вычислимо перечислимая подгруппа, содержащаяся в центре Z(G) группы G, такая, что факторгруппа Z(G)/B абелева без кручения и имеет конечный ранг. Тогда подгруппы B и Z(G) вычислимы, а следовательно, подгруппы B,Z(G) и факторгруппы G/B, G/Z(G) с естественными нумерациями, определяемыми по v, конструктивны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a}_0,...,\bar{a}_{n-1}$ – максимальная линейно независимая система элементов группы Z(G)/B. Из эквивалентности $vm \in Z(G)$ $\Leftrightarrow \exists b \in B \exists m_0 \ . \ . \ .m_{n-1} \in Z(vm = a_0^{m_0},..., a_{n-1}^{m_{n-1}} b$) следует, что центр Z(G) вычислимо перечислим в (G, v), а следовательно, вычислим. Если в правой части этой эквивалентности дополнительно потребовать условие $\sum|m_i| \neq 0$, то $vm \in Z(G) \setminus B$. Отсюда получаем вычислимость подгруппы B.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть (G,v) – конструктивная группа и B – ее вычислимо перечислимая подгруппа, содержащаяся в центре Z(G) группы G, такая, что фактор-группа G/B абелева без кручения и ранг Z(G)/ В бесконечен. Тогда существует нумерация μ группы G, для которой справедливы следующие свойства:

1) группа (G, v) конструктивна;

2) подгруппа В вычислима в (G, μ);

3) существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{c_i|i \in I\}$ в (G, μ), что смежные классы $\{c_iB\}$ образуют базис факторгруппы G/B.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа (G, v) и подгруппа В удовлетворяют условиям теоремы. По предложению 1 можно считать, что ранг факторгруппы Z(G)/B бесконечен.

Пусть $\{B^t \mid t \in \omega\}$ – сильно вычислимая последовательность конечных множеств такая, что выполнены условия:

(1) $\bigcup B^t = B$,

(2) $\left\{x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \mid x, y \in B^{t}, |\alpha|, |\beta| \leq t\right\} \subseteq B^{t+1}$.

Пусть $\bar{c} = \{c_i \mid i < n\}$ – система элементов группы G. t-Оболочкой системы $\bar{c}$ назовем множество

$$\left|\bar{c}\right|_t = \left\{x \mid x^{\alpha} = \prod c_i^{\alpha_i} b, b \in B^t, |\alpha|, |\alpha_i| \leq t, \alpha \neq 0\right\}.$$

Введем множества

$$\overline{B_t} = B^t \cup \left\{\left|x, y\right| \mid x, y \in \left|\bar{c}\right|_t\right\} \cup \left\{x \mid x^{\alpha} \in B^t, \alpha < t, \nu^{-1} x \leq t\right\},\ B^t = \left\{x_1 \ldots x_t \mid x_i \in \overline{B_t}\right\}.$$

Систему $\bar{c}$ назовем t-независимой, если из

$$\prod_{i<n} c_i^{\alpha_i} b = e,$$

где $b \in B_t$, $|\alpha_i| \leq t$, следует $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

ЛЕММА 2.1**.** Пусть G – нильпотентная группа ступени s $\geq$ 2. Любая её подгруппа, порожденная коммутантом и одним элементом, имеет ступень нильпотентности меньше s.

ТЕОРЕМА 2.2**.** Пусть G – нильпотентная группа. Если A – ее подгруппа с условием A[G,G]=G, то A=G. В частности, A[G,G]≤Ф(G).

Свойства нильпотентных групп:

- В любой нильпотентной группе нижний (а также верхний) центральный ряд обрывается на единичной подгруппе и имеет длину, равную классу нильпотентности группы.
- Конечные нильпотентные группы исчерпываются прямыми произведениями p-групп.
- В любой нильпотентной группе элементы конечных порядков образуют подгруппу, факторгруппа по которой не имеет кручения.
- Конечно порожденные нильпотентные группы без кручения исчерпываются группами целочисленных треугольных матриц с единицами на главной диагонали и их подгруппами.
- Конечно порожденные нильпотентные группы являются полициклическими группами, более того, они имеют центральный ряд с циклическими факторами.
- Любая конечно порождённая нильпотентная группа без кручения является решёткой в односвязной нильпотентной группе Ли.

3 ВЫЧИСЛИМАЯ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППА, РАЗМЕРНОСТЬ КОММУТАНТА КОТОРОЙ КОНЕЧНА

В третем разделе получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 3.1. Существует конструктивизируемая двухступенно нильпотентная группа G без кручения, размерность коммутанта которой равна 1, а ее факторгруппа по полной части не конструктивизируема.

Для доказательства теоремы были даны и доказаны леммы:

ЛЕММА 3.1. Для любых $i, k, s \in \omega$ в G справедливо

$$b_{ik}a^{\gamma_{ik}(s)}=b_{i,k+s}^{p^s},$$

$$\gamma_{ik}(s)=p^{s-1}\nu_i(k+s-1)+p^{s-2}\nu_i(k+s-2)+\ldots+\nu_i(k).$$

ЛЕММА 3.2. Группа G является конструктивизируемой двухступенно нильпотентной группой без кручения, размерность коммутанта которой равна 1.

ЛЕММА 3.3. Для любых k, s и элемента $g_k=b_{i_0k}^{\alpha_0}\ldots b_{i_nk}^{\alpha_n}$ справедливо $g_k a^{\eta_g(s)}\equiv g_{k+s}^{p^s}(\mathrm{mod}\,G')$, где $\eta_{g_k}(s)=\alpha_0\gamma_{i_0k}(s)+\ldots+\alpha_n\gamma_{i_nk}(s)$.

Элемент $g\in G$ назовем полным, если для любого $s\in\omega$ существует $\sqrt[p^s]{g}$ в G.

ЛЕММА 3.4. Элемент g из централизатора элементов d, a является полным тогда и только тогда, когда $\eta_g(s)$ делится на p^s при любом s.

ЛЕММА 3.5. Если факторгруппа H/P конструктивизируема, то семейство $F'/\approx$ допускает однозначную вычислимую нумерацию и $F'\supseteq F$.

Как следствие к Теореме 3.1 была выведена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. Существует конструктивизируемая двухступенно нильпотентная группа G без кручения, размерность коммутанта которой конечна, а ее полная часть не является вычислимой при любой конструктивизации группы G.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время теория групп является одной из самых развитых областей алгебры, имеющей многочисленные применения как в самой математике. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало. Диссертация посвящена исследованию проблемы существования конструктивизации нильпотентных групп, размерность коммутанта которых конечна.

В первом и во втором разделах диссертационной работы были даны необходимые определения, теоремы и общие свойства, необходимые в исследовании вопроса. В третьем разделе были введены и доказаны теоремы и леммы. Найдены условия для существования конструктивизации нильпотентной группы, размерность коммутанта которой конечна. Исследованы проблемы переноса конструктивизации нильпотентной группы на ее факторгруппы и построена двухступенно нильпотентная группа без кручения, размерность коммутанта которой равна 1, а ее факторгруппа по полной части не конструктивизируема.

Поставленная цель работы достигнута, задачи решены полностью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.И.Мальцев, О рекурсивных абелевых группах, Докл.АН СССР, 146, 5(1962), 1009-1012.
2. Ю.Л.Ершов, Существование конструктивизаций, Докл.АН СССР, 204, 5(1972), 1041-1044.
3. С.С.Гончаров, Автоустойчивость модели и абелевых p-групп, алгебра и логика, 19, 1(1980), 23-44.
4. Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивных матричных и упорядоченных группах, Алгебра и логика. 2004, 43, №3. С.353-363.
5. Хисамиев З.Г. Вычислимые нумерации и отношения эквивалентности, Сиб. мат. жур. 1986. Т.27, №5, С.182-187.
6. Ю.Л.Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1996.
7. С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов, Конструктивные модели, серия: школа алгебры и логики, Новосибирск, Научная книга, 1999.
8. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп, 4-е изд., М.: Наука, 1996.
9. А.М. Керимова, Н.Г. Хисамиев. Вычислимые нильпотентные Rp – группы без кручения. Материалы XI-й Республиканской научно-технической конференции молодых ученых и студентов «Творчество молодых инновационному развитию Казахстана», ЧV, Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2011.
10. А.М. Рахимжанова. Конструктивизация нильпотентных групп без кручения, Вестник КАСУ, 2011.

АННОТАЦИЯ

Рахимжанова Алима Мырзабековна

ВЫЧИСЛИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТЫЕ ГРУППЫ, РАЗМЕРНОСТЬ КОММУТАНТА КОТОРОЙ КОНЕЧНА

В современном мире, переживающем информационную революцию, связанную с использованием компьютеров и информационных технологий, как в производстве, так и в повседневной жизни, понятие алгоритма становится едва ли не самым важным из всех математических понятий. Наиболее общее интуитивное понимание состоит в том, что исходными данными и результатами алгоритмов могут служить самые разнообразные конструктивные объекты. Таким образом развитие и совершенствование вычислительной техники способствовало появлению теории конструктивных моделей. Данная теория – один из разделов математики, возникший на границе теории моделей, алгебры и теории рекурсивных функций. А.И.Мальцеву принадлежит ряд первых важнейших результатов по теории конструктивных моделей и разрешимости элементарных теорий. С тех пор теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Конструктивные абелевы группы изучались в работах А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, В.П.Добрица, А.Т.Нуртазина, Н.Г.Хисамиева, и других авторов.

В настоящее время теория групп является одной из самых развитых областей алгебры, имеющей многочисленные применения как в самой математике, так и за ее пределами. Конечной целью собственно теории групп является описание всех групповых композиций. Таким образом, лежащее в фундаменте современной математики понятие группы является весьма разносторонним орудием самой математики. Важным классом групп является нильпотентные группы. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало.

Диссертация посвящена исследованию проблемы существования конструктивизации нильпотентных групп, размерность коммутанта которых конечна.

ТҮЙІНДЕМЕ

Рахимжанова Алима Мырзабековна

ЕСЕПТЕЛІНЕТІН НИЛЬПОТЕНТТІ ТОПТАР, КОММУТАНТТЫҢ КӨЛЕМІ ШЕКТЕЛГЕН

Қазіргі уақытта есептелу ұғымы қазіргі математикада үлкен рөл атқарады. Математикалық логиканың қарқынды дамуы математикалық есептелу теориясының дамуына ықпал етті. Ал бұл есептелу машиналарының дамуына тікелей әсер етті. Бағдарламалармен берілген алгоритмдерді есептеу құрылғыларының дамуы математиканың өзінің дамуына әкеп соқты. Математиканың көптеген мәселелерін алгоритмдік түрде шешу құралы математиканың зерттеу бөлімінен үлкен орын алды. Есептеу құралының қарқынды дамуына байланысты математикада да үлкен мәелелер, жаңа бағыттар пайда болды. Сондай бағыттардың бірі – 50-ші жылдары пайда болған құрылымдық модельдер теориясы. Топтың негізгі класы нильпотентті топтар болып табылады. Нильпотенттік топ абелдік топ пен шешілмелі топтардың аралығындағы класты құрайды. Диссертацияның өзетілігі нильпотент және матрицалық топтардың құрылымдылығының бар болатындығын зерттеу болып табылады.

Диссертациялық жұмыс есептелінетін нильпотентті топтар, коммутанттың көлемі шектелген зерттеуге арналады.

ANNOTATION

Rakhimzhanova Alima Myrzbekovna

COMPUTABLE NILPOTENT GROUPS, COMMUTANT DIMENSION OF WHICH IS FINITE

In the modern world leading its path through information revolution which is connected with the use of computers and information technology, both in manufacture, and in an everyday life, the concept of algorithm becomes quite probably the most important of all the mathematical concepts.The most general intuitive comprehension is that the initial data and results of algorithms can be different constructive objects can.

Thus, development and enhancement of computer science promoted occurrence of the constructive model theory. This theory is one of the mathematic areas, appeared on the border of the model theory, algebras and of the recursive function theory. A. I. Maltsev provided a number of the first major results of the constructive model theory and of the elementary theory resolvability. Since then the theory has been enriched with new ideas, methods and constructions. The constructive Abelian groups were studied in works by A. I. Maltsev, J. L. Ershov, S. S. Goncharov, V. P. Dobrits, A. T. Nurtazin, N. G. Hisamiev, and other authors.

Nowadays the group theory is one of the most developed areas of the algebra having numerous applications both in the mathematics, and out of its area. An ultimate goal of the group theory is the description of all group compositions. Thus, the concept of the group which is in the base of the modern mathematics is rather versatile tool of the mathematics. An important class of the groups are the nilpotent groups. The nilpotent groups compose a class, intermediate between Abelian and the solvable groups. The constructive nilpotent groups are investigated insufficiently.

The dissertation is devoted to the problem research of the nilpotent group constructivisation existence, with finite nilpotent group commutant dimension.