УДК 51 На правах рукописи

КОТОВА МАРИНА ВИКТОРОВНА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

Специальность 6N0601-Математика

Автореферат
магистерской диссертации на соискание
академической степени магистра естественных наук

Республика Казахстан
г. Усть-Каменогорск,
2011 г.

Работа выполнена в Восточно-Казахстанском государственном техническом университете им. Д.Серикбаева

Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор
Хисамиев Назиф Гарифуллинович

Официальные оппоненты д.ф.-м.н., профессор
Бадаев Серикжан Атыбаевич

Защита состоится «22» июня 2011 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета по специальности 6N0601 «Математика» при Восточно-Казахстанском государственном техническом университете имени Д.Серикбаева по адресу: 070010, Республика Казахстан, Восточно-Казахстанская область, г. Усть-Каменогорск, ул. Серикбаева, 19, главный корпус, Г-3-304.

Реферат разослан «13» мая 2011 года.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РГКП «Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

Ученый секретарь
диссертационного совета Ж.Т. Рахметуллина

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Существенную часть исследований в математике стала занимать вычислительная математика, тесно связанная с использованием нового инструмента алгоритмического решения многочисленных математических проблем. Развитие вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные новые задачи. Исследование феномена вычислимости как объекта изучения математической теории привело к созданию целого ряда интересных и актуальных направлений современной математики. Одна их этих направлений - теория конструктивных моделей, которая возникла в 50-е годы. Это направление связано с исследованием зависимости алгебраических свойств абстрактных моделей на основе построения для них представления на натуральных числах и изучения взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей.

Теория моделей представляет собой раздел математической логики, изучающий соотношение между формальным языком и его интерпретациями, или моделями. Предшественниками теории моделей были Б.Больцано и Э.Шредер, осознавшие понятие выполнимости формулы на интерпретации. В настоящий момент теория моделей делится на следующие разделы: Классическая теория моделей, изучающая теоретикомножественные модели классических теорий, которая берет начало от работ Лёвенгейма (1915) и Скулема (1920), установивших существование моделей любой бесконечной мощности для любой непротиворечивой теории, имеющей бесконечную модель. Фундаментальным результатом классической теории моделей явилась теорема Геделя о полноте классической логики предикатов (первого порядка), из которой следует существование моделей у любых (основанных на этой логике) непротиворечивых теорий. В 70-е гг. выяснилось, что теорема Геделя о полноте эквивалентна аксиоме выбора множеств теории.

Алгебраическая теория моделей, изучающая прежде всего модели неклассических логик, базирующиеся на обобщенной семантике истинностных значений. Трудностью в Алгебраической теории моделей является интерпретация кванторов. Для данной цели была развита теория цилиндрических алгебр.

Теория моделей Кринке (СВМ), изучающая модели неклассических логик, базирующиеся на возможных миров семантике. Семантика возможных миров предлагалась уже Аристотелем, который рассматривал теорию модальных суждений. Ее предшественником можно считать Г. Лейбница, который явно ввел понятие возможного мира. В современном виде она впервые была предложена для частного случая интуиционистской логики Э. Бетам (1954) и последовательно развита для целого ряда логик С. Кринке, имя которого она и получила. При СВМ интерпретациях имеется некоторая алгебраическая система классических (либо, в более тонких случаях, алгебраических) моделей, называемых мирами, связанных отношениями и порою функциями. Для модальных логик СВМ интерпретации обычно используют единственное бинарное отношение достижимости.

Интерпретации реализуемости (ИР), моделирующие логики и теории как исчисления задач. Колмогоровская интерпретация допускает значительную гибкость в классе используемых функционалов, поэтому в ИР используются и алгоритмы, и топологические пространства с непрерывными преобразованиями, и категории, и формальные выводы, и комбинации данных объектов.

Наиболее значительные в методологических аспектах результаты, полученные при помощи ИР.

С целью привлечения развитой теории алгоритмов для исследования алгоритмических проблем алгебры в 60-х годах прошлого века было введено понятие конструктивной модели. В настоящее время теория конструктивных моделей – бурно развивающаяся область математической логики. Она находит важное применение в теоретическом программировании и в теории баз данных. Основные проблемы и результаты в данной области изложены в монографии С.С. Гончарова и Ю.Л. Ершова «Конструктивные модели» [1]. Одной из главных здесь является проблема существования конструктивизации у заданной модели.

Исследованию конструктивных моделей посвящены работы Ю.Л. Ершова, С.С Гончарова, В.П. Добрица, Б.Н. Дроботуна, А.Т. Нуртазина, Н.Г. Хисамиева.

Основными проблемами теории конструктивных моделей являются проблемы существования конструктивизации у заданной модели, автоустойчивости, переноса конструктивизаций, существования вычислимой нумерации заданного класса конструктивных моделей, и т.д.

Диссертация посвящена исследованию проблемы конструктивизации для моделей с конечным числом эквивалентностей.

Объект и предмет исследования являются конструктивные модели.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследования проблемы существования конструктивизации для моделей с конечным числом эквивалентностей.

Методология и методы исследования. Методологическую основу составили научные труды зарубежных и отечественных математиков, С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, В.П. Добрица, Б.Н. Дроботуна, Г. Кейслер, Ч.Ч. Чэн, Н.Г. Хисамиев посвященные теории групп и теории конструктивных моделей.

Информационной базой исследования послужили монографии [1], [2], [4].

Научная новизна и практическая значимость исследования. Найдены условия для существования конструктивизации у моделей с конечным числом эквивалентностей.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в материалах II-ой Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Единство образования, науки и инноваций» и X Республиканской научно-технической конференции «Творчество молодых - инновационному развитию Казахстана» часть IV.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первом разделе - *«Конструктивные модели»* даны необходимые определения, результаты и простейшие свойства по теории конструктивных моделей, необходимые в дальнейшем.

Введем обозначения, связанные с языком узкого исчисления предикатов данной сигнатуры σ. *Сигнатурой* σ языка узкого исчислении предикатов называется пара, состоящая из трех непересекающихся множеств σ^P, σ^F, σ^C и отображения μ: $\sigma^P \cup \sigma^F \rightarrow w^+ \Leftrightarrow \{1,2...\}$. Если $P \in \sigma^P$ и $\mu(P)= n$ то P называется *n-местным предикатным символом.* Если $f \in \sigma^F$ и $\mu(f) = m$, то f называется *m-местным функциональным символом.* Элементы σ^C называются *константными символами.* Часто используется запись вида $\sigma= < P_1^{n_1}, ..., P_k^{n_k}; f_1^{m_1}, ..., f_s^{m_s}; c_1,...,c_t$), где верхние индексы являются значениями отображения μ на соответствующих символах. Запись $P \in \sigma$ ($f \in \sigma$ или $c \in \sigma$) означает, что P (f или c) является предикатным (функциональным или константным) символом сигнатуры σ.

Алгебраической системой (или просто *системой)* S сигнатуры σ называется пара, состоящая из непустого множества $|S|$ называемая основным множеством системы S и набора предикатов $P^{S'} \subseteq |S|^{\mu(P)}$ $P \in \sigma^P$, функций f^S: $|S|^{\mu(f)} \rightarrow |S|$ ($f \in \sigma^F$) и выделенных элементов $c^S \in |S|$ ($c \in \sigma^C$), называемых соответственно основными предикатами, операциями и константами.

Простейшие свойства конструктивных моделей. Исследуются простейшие свойства конструктивных моделей относительно теоретико-модельных конструкций. Прежде всего, рассмотрен вопрос о конструктивности подмоделей.

Предложение 1.1 *Пусть (M, v) – конструктивная модель.* $\boldsymbol{M_0}$ *подмодель модели* $\boldsymbol{M}$ *с основным множеством* $M_0 \subseteq M$. *Если* $v^{-1}(Mo)$ *- рекурсивно перечислимое множество, то существует нумерация* v_0: $w \rightarrow M_0$ *такая, что* (M_0, v_0) *конструктивная модель и вложение i:* $M_0 \rightarrow M$ *является гомоморфизмом* (M_0, v_0) *в (M, v). Если (M, v) – сильно конструктивная модель и* M_0 *элементарная подмодель M, то* (M_0, v_0) *— сильно конструктивная модель.*

Предложение 1.2. *Прямое произведение (сильно) конструктивных моделей является (сильно) конструктивной моделью.*

А также в первом разделе сформулированы основные вопросы теории конструктивных моделей.

Во втором разделе - *«Некоторые необходимы условия существования конструктивных моделей»* рассмотрены основные теоремы, необходимые (достаточные) условия существования конструктивных моделей, и существование конструктивизаций.

Формулу *U,* находящуюся в предваренной нормальной форме и не содержащую кванторов всеобщности (существования), назовем $\exists$ *-формулой* ($\forall$ *-формулой* или *универсальной формулой).*

Через σ_U, будем обозначать совокупность всех сигнатурных символов, которые имеют хотя бы одно вхождение в формулу *U*.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если (M, ν) - конструктивная модель, то* $\exists$-*теория M рекурсивно перечислима.*

Любое $\exists$-*предложение* $U = \exists x_0 \ldots \exists x_n U'(x_0, \ldots, x_n)$ эффективно приводится к виду $\bigvee_{i=0}^{m} U_i$, где каждое предложение U_i –диаграммное (в сигнатуре σ_U формулы U) предложение с переменными $x_0, \ldots, x_n$. Тогда $M \models U \Leftrightarrow M \models U_i$ для некоторого $i \leq m$. А диаграммное предложение U_i истино с M тогда и только тогда, когда найдется последовательность элементов $a_0, \ldots, a_n \in |M|$ такая, что U_i есть σ_U-диаграмма σ_U подмодели модели M, определенной подмножеством $\{a_0, \ldots, a_n\}$. Множество всех таких подмоделей рекурсивно перечислимо, поэтому и множество диаграммных предложений, истинных в M, рекурсивно перечислимо. Следовательно, и $\exists$-теория M рекурсивно перечислима.

$\exists$-предложение U назовем *диаграммным,* если бескванторная часть U_0 предложения U есть конъюнкция элементарных формул или отрицаний элементарных формул, причем для любой элементарной формулы, построенной из символов σ_U (и переменных, входящих в U_0, эта формула имеет одно и только одно вхождение в формулу U.

С л е д с т в и е 2.1. *Для того чтобы теория T имела конструктивизируемую модель, необходимо, чтобы у T была модель M с рекурсивно перечислимой* $\exists$-*теорией.*

Т е о р е м а 2.1. *Если T- рекурсивно перечислимая* $\forall\exists$-*теория, имеющая модель M с рекурсивно перечислимой* $\exists$-*теорией, то теория T имеет конструктивизируемую модель.*

Рекурсивная перечислимость $\exists$ - теории позволяет эффективно выписать последовательность всех (с точностью до изоморфизма) конечных подмоделей M.

$$M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$$

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ - рекурсивно перечислимая последовательность всех $\forall\exists$-предложений теории T, φ_i имеет вид $\forall x_0 \ldots \forall x_{k_i} \exists y_0 \ldots \exists y_{s_i} \varphi_i'(x_0, \ldots; y_0, \ldots)$, $i \in \omega$. Строим возрастающую последовательность конечных моделей

$$N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_l \leq N_{l+1} \leq \ldots \qquad (*)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. *Всякая модель* N_0 *изоморфна одной из моделей* M_n *(т. е. изоморфна подмодели M).*

2. *Для всякого l, всякого* $i \leq l$ *и всякого набора элементов* $a_0, \ldots, a_{ki} \in |N_l|$, *в* $|N_{l+1}|$ *найдутся элементы* $b_0, \ldots b_{si}$ такие, что $N_{l+1} \models \varphi_i' \varphi\ (a_0 \ldots; b_0, \ldots)$.

Для того чтобы уметь выполнять второе условие, заметим следующее: *для любых n, i и любого набора элементов* $c_0, \ldots, c_{k_i} \in |M_n|$ *найдутся такие m и изоморфное вложение* ψ: $M_n \to M_m$, *что* $M_m \models \varphi_i'(\psi c_0, \ldots, \psi c_{k_i};\ a_0 \ldots a_{s_i})$ *для некоторых* $a_0 \ldots a_{s_i} \in |M_m|$.

Это утверждение следует из того, что M_n изоморфна подмодели M, а в M истины все предложения φ_i.

Сделанное замечание позволяет эффективно выбрать последовательность (*) со свойствами 1 и 2. Если положить $N \Leftrightarrow \bigcup_{n\in\omega} N_n$, то из определения видно, что N – конструктивизируемая модель, в которой истины все предложения $\varphi_0, \ldots, \varphi_i, \ldots$, т.е. N – модель теории T.

З а м е ч а н и е 1. Без труда можно построить *последовательность* (*) с дополнительным свойством 3: всякая модель M_n изоморфно вкладывается в некоторую N_l. Тогда $\exists$-теории *N и M* будут совпадать.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Если теория T рекурсивно перечислимо аксиоматизируема и имеет первичную модель M_0, то $\exists$-теория модели M_0 рекурсивно перечислима, точнее $\exists$ - теория модели M_0 состоит в точности из всех $\exists$ - предложений из T.*

С л е д с т в и е 2.2

Если рекурсивно перечислимо аксиоматизируемая $\forall\exists$ - теория T имеет первичную модель, то T имеет конструктивизируемую модель.

В третьем разделе – *«Об одном классе конструктивных моделей».*

Приводятся необходимые определения и понятия для доказательства теоремы.

Напомним, что отношение E на некотором множестве M называется эквивалентностью, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. для любых x, y, z справедливы: xEx, $xEy \rightarrow yEx$, $xEy \wedge yEx \rightarrow xEz$. Любое отображение υ из N на непустое множество S будем называть нумерацией множества S. Нумерация $\upsilon: \omega \rightarrow S$ семейства S подмножеств ω натуральных чисел называется сильно вычислимой, если множество $\bar{S} = \{<i, x> \mid x \in \upsilon i\}$ вычислимо.

В математической школе алгебры и логики, созданной А.И. Мальцевым, исследования по конструктивным и рекурсивным алгебраическим системам были начаты А.И. Мальцевым и продолжены его учениками и их последователями. В основу предложенного им подхода положено понятие нумерации. Нумерации позволяют транслировать основные алгоритмические проблемы над абстрактными структурами к изучению алгоритмов на натуральных числах или словах некоторого конечного алфавита. Использование нумераций (конструктивизаций) позволяет изучать алгоритмические свойства системы, их (не)зависимость от выбора конструктивизации. К числу фундаментальных проблем этого направления относятся проблемы существования и (не)единственности конструктивизаций (со специальными свойствами), проблемы продолжения конструктивизаций и многие другие.

Множество S натуральных чисел называется вычислимым, если существует алгоритм, который по любому натуральному числу n отвечает на вопрос $n \in S$ или нет.

Пара, состоящая из непустого множества $|S|$ называемая основным множеством системы S и набора предикатов $P^{S'} \subseteq |S|^{\mu(P)}$ $P \in \sigma^P$, функций f^S: $|S|^{\mu(f)} \rightarrow |S|$ $(f \in \sigma^F)$ и выделенных элементов $c^S \in |S|$ $(c \in \sigma^C)$, называемых соответственно основными предикатами, операциями и константами.

Нумерованной моделью (сигнатуры σ без функциональных символов) называется пара (A, v), где A=(M, P_0, P_1, …) – модель (сигнатуры σ), а v нумерация основного множества M модели A.

Нумерованная модель (A, v) называется конструктивной, если рекурсивно множество

Дана и доказана следующая теорема:

Теорема 3.1. Пусть дана модель A=<ω, $E_1,\ldots,E_n$>, где для любого i отношение E_i является эквивалентностью на ω. Тогда A конструктивна если и только если семейство множеств $S_i=\{A_x^i | x \in \omega\}$, $A_x^i=\{y \mid xE_iy\}$ имеет однозначную сильно вычислимую нумерацию υ_i для любого $1 \le i \le n$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конструктивизм в математике проявлялся на протяжении всей ее истории, хотя, только К.Гаусс впервые выразил принципиальное для конструктивной математики различие становящейся актуальной математической бесконечности и возразил против употребления последней. Дальнейшие критические шаги в этом направлении были сделаны Л.Кронекером, А.Пуанкаре и особенно Л.Брауэром. В критике Л.Брауэра, совпавшей по времени с кризисом оснований математики конца XIX - начала XX в.в., энергично отвергалась как вера в экзистенциональный характер бесконечных множеств, так и убеждение в допустимости неограниченной экстраполяции классических логических принципов, в особенности закона исключенного третьего. В качестве альтернативы теоретико-множественному подходу Л. Брауэр, а затем и его последователи, разработали оригинальную программу построения математики, известную ныне под названием *интуиционизм.* Интуиционистскую математику Л.Брауэра можно считать первой систематической попыткой построения математики на конструктивной основе.

Теория моделей – раздел математической логики, изучающий связи между формальным языком и его интерпретациями, или моделями. Теория конструктивных моделей один из разделов математики, возникший на границе моделей теории, алгебры и теории рекурсивных функций и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах. Статья А. И. Мальцева "Конструктивные алгебры" [1] явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в которой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дальнейшие пути развития этой теории. Большую роль в становлении и развитии этого раздела математики сыграли работы Ю. Л. Ершова и его учеников, в которых был решен ряд основных проблем, выработаны новые понятия и определены новые направления в исследовании конструктивных моделей (см. [2]).

В диссертации рассмотрены основные теоремы существования конструктивных моделей, исследуются проблемы существования конструктивной модели данной теории. Этот вопрос решен для моделей теории с конечным числом эквивалентностей. Найдено необходимое и достаточное условие существования конструктивизации для моделей с конечным числом эквивалентностей.

Оценка полноты решений поставленных задач. Поставленная цель работы достигнута, задачи решены полностью.

Теоретическая ценность диссертации состоит в изучении и освоении результатов теории конструктивных моделей;

Основные результаты диссертации опубликованы в сборниках материалов II-ой Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Единство образования, науки и инноваций», г. Усть-Каменогорск, 2011 год. И X Республиканской научно-технической конференции «Творчество молодых - инновационному развитию Казахстана» часть IV, г. Усть-Каменогорск, 2010 год.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.И.Мальцев, Конструктивные алгебры, Успехи математических наук, т.16, вып. 3(99), 1961 г. май-июнь.
2. С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов, Конструктивные модели, серия: школа алгебры и логики, Новосибирск, Научная книга, 1999.
3. Ю.Л.Ершов, Существование конструктивизаций, Докл.АН СССР, 204, 5(1972), 1041-1044.
4. Ю.Л.Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М.: Наука, 1996.
5. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп, 4-е изд., М.: Наука, 1996.
6. Г. Кейслер, Ч.Ч. Чэн, Теория моделей, М.: Мир, 1977.
7. Котова М.В., Хисамиев Н.Г. Об одном классе конструктивных моделей. Материалы II-ой Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Единство образования, науки и инноваций» // Усть-Каменогорск: ВКГУ, 2011.
8. Котова М.В. Конструктивные модели и теория баз данных. Материалы X Республиканской научно-технической конференции «Творчество молодых - инновационному развитию Казахстана» часть IV.
9. Н.Г. Хисамиев, А.М. Рахимжанова, М.В. Котова, Элементы теории алгоритмов, Усть-Каменогорск, 2011.

АННОТАЦИЯ

Котова Марина Викторовна

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

Теория моделей представляет собой раздел математической логики, изучающий соотношение между формальным языком и его интерпретациями, или моделями. С целью привлечения развитой теории алгоритмов для исследования алгоритмических проблем алгебры в 60-х годах прошлого века было введено понятие конструктивной модели. В настоящее время теория конструктивных моделей – бурно развивающаяся область математической логики. Она находит важное применение в теоретическом программировании и в теории баз данных. Основные проблемы и результаты в данной области изложены в монографии С.С. Гончарова и Ю.Л. Ершова «Конструктивные модели» [1]. Одной из главных здесь является проблема существования конструктивизации у заданной модели.

Исследованию конструктивных моделей посвящены работы Ю.Л. Ершова, С.С Гончарова, В.П. Добрица, Б.Н.Дроботуна, А.Т. Нуртазина, Н.Г. Хисамиева.

Основными проблемами теории конструктивных моделей являются проблемы существования конструктивизации у заданной модели, автоустойчивости, переноса конструктивизаций, существования вычислимой нумерации заданного класса конструктивных моделей, и т.д.

Диссертация посвящена исследованию проблемы конструктивизации для моделей с конечным числом эквивалентностей. Найдено необходимое и достаточное условие существования конструктивизации для моделей с конечным числом эквивалентностей.

ТҮЙІНДЕМЕ

Котова Марина Викторовна

Құрылымдық модельдердің бір тобы бойынша

Модельдер теориясының формальдік тілін, оның интерпретациясын және моделінің түйістігін зерттейтін математикалық логиканың бөлімі. Өткен ғасырдың 60-шы жылдары дамыған алгоритмдер теориясын тарту мақсатымен құрылымдық модель түсініктемесі еңгізілген. Қазіргі таңда құрылымдық модель теориясы қарқынды дамып келе жатқан математикалық логиканың облысы. Ол өзінің маңызды қолданысын теоретикалық бағдарламалау мен мәліметтер базасы теориясында табады. Теорияның басты мәселелері және осы облыстағы қорытындылар С.С. Гончаровпен Ю.Л. Ершовтың «Құрылымдық модельдер» атты монографиялары көрсетілген [1]. Осы жерде ең басты мәселенің бірі – берілген модельдің құрылымдауының бар болуы.

Құрылымдық модельдер зерттеуіне Ю.Л. Ершов, С.С.Гончаров, В.П.Добрица, Б.Н. Дроботун, А.Т. Нуртазин, Н.Г.Хисамиевтің еңбектері арналған.

Құрылымдық модельдер теориясының ең басты мәселелері берілген модельдің құрылымдауының бар болуы, автотұрақтылығы, құрылымдауының көшірілімі, берілген құрылымдық моделінің шығарымды нөмірінің барлығы және т.б.

Диссертация эквиваленттіктің соңғы саны бар модельдердің құрылымдау мәселесіне арналған. Эквиваленттіктің соңғы саны бар модельдердің құрылымдауының бар болуы үшін керекті және жеткілікті шарттары табылған.

ANNOTATION

Kotova Marina Viktorovna

One category of constructive models

Model theory is a part of mathematical logic that studies correlation between formal language and its interpretation or models. The term of constructive model was added in order to invoke advanced theory of algorithm for studying algorithm problems of algebra in past 60s. Today the theory of constructive models - the most exploding part of mathematical logic. It's used in theoretical programming and database theory. We can find main problems and result of the study in S.S.Gontcharov and Y.L.Ershov "Constructive models" monograph [1]. The most important problem is the problem of the model constructivation.

The theme of constructive models is studied by Y.L.Ershov, S.S.Gontcharov, V.P.Dobritza, B.N. Drobotun, A.T.Nurtazin, N.G. Khisamiev.

The main problems of constructive models theory are the problem of the model constructivation, self-stability, constructivation transfer, computable numeration of the constructive model class etc.

Thesis work devoted to study of constructivation for models with equivalence finite number problem. We found necessary and sufficient condition of constructivation presence for models with equivalence finite number.