УДК 51 На правах рукописи

ИБРАЕВА АЙНА БАУРЖАНОВНА

ВЫЧИСЛИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ Rp – ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Специальность 6N0601-Математика

Автореферат
магистерской диссертации на соискание академической
степени магистра естественных наук

Республика Казахстан
г. Усть-Каменогорск,
2011 г.

Работа выполнена в Восточно-Казахстанском государственном техническом университете им. Д. Серикбаева

Научный руководитель	д.ф.-м.н., профессор Хисамиев Назиф Гарифуллинович
Официальные оппоненты	д.ф.-м.н., профессор Бадаев Серикжан Атыбаевич
Ученый секретарь диссертационного совета	Рахметуллина Ж.Т.

Защита состоится «22» июля 2011 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета по специальности 6N0601 «Математика» при Восточно-Казахстанском государственном техническом университете имени Д. Серикбаева по адресу: 070010, Республика Казахстан, Восточно-Казахстанская область, г. Усть-Каменогорск, ул. Серикбаева, 19, главный корпус, Г-3-304.

Автореферат разослан «13» мая 2011 года.

Диссертант Ибраева А.Б.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

В настоящее время понятие вычислимости становится, безусловно, одним из важнейших понятий современной математики. Бурное развитие математической логики привело к развитию математической теории вычислимости. А это создало необходимую предпосылку к созданию электронных вычислительных машин. Развитие новых вычислительных средств для выполнения заданных программами алгоритмов оказало революционное влияние и на саму математику. Существенную часть исследований в математике стала занимать вычислительная математика, тесно связанная с использованием нового инструмента алгоритмического решения многочисленных математических проблем. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные новые задачи. Само исследование феномена вычислимости как объекта изучения математической теории привело к созданию целого ряда интересных и актуальных направлений современной математики. Одна их этих направлений - теорию конструктивных моделей, которая возникла в 50-е годы. Это направление связано с исследованием зависимости алгебраических свойств абстрактных моделей на основе построения для них представления на натуральных числах и изучения взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей. Таким образом, лежащее в фундаменте современной математики понятие группы является весьма равносторонним орудием самой математики – оно является как важнейшая составная часть ряда сложных алгебраических систем, как чуткий отражатель свойств различных топологий, как испытательный полигон теории алгоритмов и многими иными путями. Важным классом групп является нильпотентные группы. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами.

Диссертация посвящена исследованию проблемы существования конструктивизации нильпотентных матричных групп.

Объект и предмет исследования является конструктивные нильпотентные группы.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование вопросов вычислимости нильпотентной Rp – группы без-кручения

Методология и методы исследования. Методологическую основу составили научные труды зарубежных и отечественных математиков, М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов посвященные теории групп и теории конструктивных моделей.

Информационной базой исследования послужили монографии [6],[8], [9].

Научная новизна и практическая значимость исследования

Исследованы вопросы вычислимости нильпотентной Rp – группы без-кручения.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в материалах II-й Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Единство образования, науки и инноваций» [11].

Статья «Вычислимые нильпотентные Rp – группы без кручения» принята в журнал «Вестник Казахстанско-Американского свободного университета» (выпуск 2011 года).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первом разделе - *«Конструктивные модели»* даны необходимые определения и результаты по теории конструктивных моделей, необходимые в следующем разделе.

Теория конструктивных моделей — один из разделов математики, возникший на границе моделей теории, алгебры и теории рекурсивных функций и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах. Ниже сформулированы основные понятия и результаты теории конструктивных моделей.

Все рассмотрения обычно ведутся в некоторой фиксированной *сигнатуре*

$$\sigma_0 = \left\langle P_0^{n_0},\dots,P_k^{n_k},\dots\right\rangle_{k<\omega}$$

такой, что функция f: $f(k)=n_k$ общерекурсивна. Если рассматриваются алгебраические системы, то в сигнатуре могут быть и функциональные символы. Используется также сигнатура

$$\sigma_1 = \sigma_0 \cup \left\langle a_0, a_1,\dots,a_k,\dots\right\rangle_{k<\omega},$$

которая получается присоединением к σ_0 счетного числа символов для констант. Всегда предполагается, что $n_0= 2$ и предикат P_0^2 на любой модели определен как равенство.

Пусть L_i, i=0,1, - совокупность всех формул узкого исчисления предикатов с равенством (P_0^2) сигнатуры σ_i, i=0,1, и g - некоторая фиксированная гёделевская нумерация множества $L_1(g\colon N\to L_1)$. Подмножество $S\subseteq L_1$ называется *разрешимым*, если множество $g^{-1}(S)$ рекурсивно.

Нумерованной моделью (сигнатуры σ_0) называется пара ($\mathfrak{M}$, ν), где $\mathfrak{M}=\left\langle M, P_0^{n_0},\dots,P_k^{n_k},\dots\right\rangle_{k<\omega}$ - модель сигнатуры σ_0, а ν - нумерация основного множества M модели $\mathfrak{M}$.

Нумерованная модель ($\mathfrak{M}$, ν) называется *конструктивной моделью*, если множество

$$\overline{D}(\mathfrak{M},\nu) = \left\{\left\langle k, x_1,\dots,x_{n_k}\right\rangle \mid \mathfrak{M} = P_k^{n_k}(\nu(x_1),\dots,\nu(x_{nk}))\right\}$$

рекурсивно.

По каждой нумерованной модели ($\mathfrak{M}$, ν) можно каноническим образом построить некоторое σ_1-*обогащение* $\mathfrak{M}_\nu$ *модели* $\mathfrak{M}$, т.е. модель сигнатуры σ_1, основное множество которой есть основное множество модели $\mathfrak{M}$, предикаты из σ_0, в $\mathfrak{M}_\nu$ совпадают с соответствующими предикатами $\mathfrak{M}$, а константы определены следующим образом: в качестве значения a_k, $k<\omega$, полагают элемент $\nu(k)\in M$.

Пусть $Th(\mathfrak{M})$ - *элементарная теория модели* $\mathfrak{M}$, т.е. множество всех замкнутых формул сигнатуры σ_0, истинных на модели $\mathfrak{M}$, а $Th(\mathfrak{M}, \nu)$ элементарная теория нумерованной модели $\mathfrak{M}_\nu$.

Нумерованная модель ($\mathfrak{M}$, ν) называется *сильно конструктивной*, если теория $Th(\mathfrak{M})$ разрешима. Непосредственно из определения видно, что сильно конструктивная модель конструктивна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ($\mathfrak{M}$, ν) - конструктивная модель, $\mathfrak{M}_0$ – подмодель модели $\mathfrak{M}$ с основным множеством $M_0 \subseteq M$. Если $\nu^{-1}(M_0)$ – *рекурсивно перечислимое множество, то существует нумерация* $\nu_0 : \omega \to M_0$ *такая, что* ($\mathfrak{M}_0$, ν_0) конструктивная модель и вложение $i : M_0 \to M$ является гомоморфизмом ($\mathfrak{M}_0$, ν_0) в ($\mathfrak{M}$, ν). Если ($\mathfrak{M}$, ν) – сильно конструктивная модель и $\mathfrak{M}_0$ элементарная подмодель $\mathfrak{M}$, то ($\mathfrak{M}_0$, ν_0) – сильно конструктивная модель.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Прямое произведение (сильно) конструктивных моделей является (сильно) конструктивной моделью.

ТЕОРЕМА 1. Пусть теория T_1 (сигнатуры σ) модельно полна относительно теории T (сигнатуры σ). Предположим, что T_1 рекурсивно аксиоматизируема. Тогда любая конструктивная модель ($\mathfrak{M}_0$, ν_0) теории T изоморфна рекурсивно перечислимой подмодели некоторой сильно конструктивной модели ($\mathfrak{M}_1$, ν_1) теории T_1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое конструктивное поле имеет конструктивное вожение в сильно конструктивное алгебраически замкнутое поле.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любое конструктивное упорядоченное поле имеет конструктивное вложение в сильно конструктивное вещественно замкнутое поле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Две конструктивизации алгебраической системы $\mathfrak{A}$ рекурсивно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $P \subseteq A^2$ множество

$$\nu^{-1}(P) = \{< n, m > | < \nu n, \nu m > \in P\}$$

Рекурсивно тогда и только тогда, когда рекурсивно множество

$$\mu^{-1}(P) = \{< n, m > | < \mu n, \mu m > \in P\}.$$

Во втором разделе — «Нильпотентные группы» приведены понятия и некоторые результаты теории нильпотентных групп, используемые в дальнейшем. Нильпотентные группы встречаются в теории Галуа, а также в работах по классификации групп. Они, кроме того, играют заметную роль в классификации групп Ли. Аналогичные понятия определяются для алгебр Ли. *Нильпотентная группа* — группа G, обладающая центральным рядом от $G_0 = \{e\}$ до $G_n = G$ конечной длины.

Определение. Пусть M – подмножество группы G. Множество $C(M) = \{x \in G \mid mx = xm, m \in M\}$ *называется централизатором* M в группе G.

Определение. Пусть G – группа. Нормальная матрешка

$$1=G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_s=G \quad (1)$$

Называется *центральной*, если все ее секции центральны, т.е.

$$G_{i+1} / G_i \le Z(G / G_i) \quad (2)$$

Или, что равносильно,

$$[G_{i+1}, G \le G_i) \text{ для всех i} \quad (3)$$

Группа, обладающая центральными матрешками, называется *нильпотентной*, а минимальное число секций таких матрешек – ее *ступенью нильпотентности*. Непосредственно из определения видно, что нильпотентные группы составляют класс, промежуточной между классами абелевых и разрешимых групп, причем абелевы группы – это в точности нильпотентные группы ступени 1.

Само определение нильпотентных групп подсказывает ясный и обычно безотказный путь их изучения – индукцию по ступени нильпотентности. Проводя индукцию, чаще всего работают с централами и гиперцентрами, но иногда используют и другие подгруппы.

ЛЕММА. Пусть G – нильпотентная группа ступени $s \geq 2$. Любая её подгруппа, порожденная коммутантом и одним элементом, имеет ступень нильпотентности меньше s.

ТЕОРЕМА 1. Любая подгруппа нильпотентной группы субнормальна. Более точно, если G – нильпотентная группа ступени s, то для любой её подгруппы H ряд последовательных нормализаторов достигает G не позже чем через s шагов.

ТЕОРЕМА 2. В нильпотентной группе любая нетривиальная нормальная подгруппа имеет нетривиальное пересечение с центром.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – нильпотентная группа. Если A – ее подгруппа с условием $A[G,G]=G$, то $A=G$. В частности, $A[G,G]\leq\Phi(G)$.

ТЕОРЕМА 4. В любой нильпотентной группе G любая максимальная абелева нормальная подгруппа A совпадает со своим централизатором. В частности, A – максимальная абелева подгруппа и G/A изоморфно вкладывается в Aut A.

ТЕОРЕМА 5. В любой нильпотентной группе G совокупность τG периодических элементов есть подгруппа (периодическая часть группы G).

Свойства нильпотентных групп

- В любой нильпотентной группе нижний (а также верхний) центральный ряд обрывается на единичной подгруппе и имеет длину, равную классу нильпотентности группы.
- Конечные нильпотентные группы исчерпываются прямыми произведениями *p*-групп.
- В любой нильпотентной группе элементы конечных порядков образуют подгруппу, факторгруппа по которой не имеет кручения.
- Конечно порожденные нильпотентные группы без кручения исчерпываются группами целочисленных треугольных матриц с единицами на главной диагонали и их подгруппами.
- Конечно порожденные нильпотентные группы являются полициклическими группами, более того, они имеют центральный ряд с циклическими факторами.
- Любая конечно порождённая нильпотентная группа без кручения является решёткой в односвязной нильпотентной группе Ли.

В третьем разделе – «Вычислимые нильпотентные Rp – группы без кручения» получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – счетная нильпотентная R_p – группа без кручения ступени α, p – размерность факторгруппы которой по коммутанту равен 1, а - размерность G´ конечна. Тогда G конструктивизируема, если и только если, они изоморфна центральному расширению некоторой полной конструктивной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством некоторой конструктивной абелевой R_p – группы без кручения (B, μ) с вычислимо перечислимым базисом $\left\{ в, c_{io} \middle| i < \omega \right\}$, где $\{в\}$ – p–базис B, и некоторой вычислимой системой коммутаторов g, h.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G - счетная нильпотентная Rp-группа без кручения ступени 2, ранг и p-ранг факторгруппы которой по коммутанту соответственно равны n < ω и 1. Тогда группа G конструктивизируема, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой полной конструктивной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством некоторой конструктивной абелевой Rp-группы без кручения (B, μ), ранг и p-ранг которой соответственно равны n и 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G _ счетная нильпотентная Rp-группа без кручения ступени 2, p-ранг фактор-группы которой по коммутанту равен 1, а ранг факторгруппы Z(G)/G′ бесконечен. Тогда группа G позитивно определена, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой позитивно нумерованной полной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством некоторой позитивно нумерованной абелевой Rp-группы без кручения (B, μ) с вычислимо перечислимым базисом {b, c_{i0} | i < ω}, где {b} - p-базис B, и вычислимой системы коммутаторов g, h.

Следствие 1. Пусть G - позитивно определенная нильпотентная Rp-группа без кручения ступени 2, p-ранг фактор-группы которой по коммутанту равен 1, а ранги фактор-группы Z(G)/G′ и коммутанта G′ соответственно бесконечен и конечен. Тогда группа G конструктивизируема.

ТЕОРЕМА 4. В любой нильпотентной группе G без кручения извлечение корней – однозначная операция (хотя и не обязательно всюду определена), т.е. из $a^n=b^n$, $n\neq 0$, следует a=b.

Произвольная группа G называется *полной*, если для любого ее элемента g и любого натурального m в G существует решение уравнения $x^m=g$. Примером полной группы является группа $\bigcup T_n(K)$ над полем K нулевой характеристики.

Полная нильпотентная группа $\overline{G}$ без кручения называется *(нильпотентным) пополнением* группы G, если она содержит G и не содержит собственных полных подгрупп, содержащих G.

ТЕОРЕМА 5. Пусть H – подгруппа полной нильпотентной группы G без кручения. Множество $\sqrt{H}$ всех элементов из, попадающих в некоторой степени в H (корень из подгруппы H в подгруппе G), является подгруппой и, значит, пополнением H в G. Гиперцентры подгрупп H и $\sqrt{H}$ связаны следующим образом

$$\xi_i \sqrt{H} = \sqrt{\xi_i H}, \quad \xi_i H = H \bigcap \sqrt{\xi_i H}.$$

ТЕОРЕМА 6. Любая нильпотентная группа G без кручения обладает нильпотентным пополнением той же ступени нильпотентности. Любые два нильпотентных пополнения группы G изоморфны; более того, для любого автоморфизма φ группы G существует изоморфизм между ними, продолжающий φ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимых нильпотентных Rp – групп без-кручения. В ней получены необходимые и достаточные условия конструктивизируемости нильпотентной Rp-группы без кручения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] А. И. Мальцев, О рекурсивных абелевых группах. Доклады АН СССР, 46, №4, 1962, 1009-1012.

[2] Ю. Л. Ершов, Существование конструктивизиций. Доклады АН СССР, 204, № 5, 1972, 1041-1044.

[3] С. С. Гончаров, А. В. Молоков, Н. С. Романовский. Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности, Сиб. мат. журнал, 30, №1, 1989, 82-88.

[4] В. А. Романьков, Н, Г. Хисамиев, О конструктивных матричных и упорядоченных группах, Алгебра и логика, 43, №3, 2004, 353-363.

[5] В. Латкин, Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения, Алгебра и логика, 35, №3, 1996, 308-313.

[6] Н. Г. Хисамиев, О конструктивных нильпотентных группах. Сиб. мат. журнал, 48, №1, 2007, 214-223.

[7] Н. Г. Хисамиев, Позитивно определенные нильпотентные группы, Математический журнал, 24, №2, 2007, 95-102.

[8] Н. Г. Хисамиев, О конструктивных нильпотентных R_p-группах без кручения. Сиб. мат. журнал, 50, №4, 2009, 222-230.

[9] С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, Конструктивные модели, Новосибирск, научная книга, 1996. (Сибирская школа алгебры и логики).

[10] М. И. Каргаполов, Ю. Л. Мерзляков. Основы теории групп, М., Наука, 1996.

[11] Ибраева А.Б., Хисамиев Н.Г. Вычислимые нильпотентные Rp – группы без кручения. Материалы II-й Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Единство образования, науки и инноваций» // Усть-Каменогорск: ВКГУ, 2011.

АННОТАЦИЯ

Ибраева Айна Бауржановна

ВЫЧИСЛИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ Rp – ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В настоящее время понятие вычислимости становится, безусловно, одним из важнейших понятий современной математики. Бурное развитие математической логики привело к развитию математической теории вычислимости. А это создало необходимую предпосылку к созданию электронных вычислительных машин. Развитие новых вычислительных средств, для выполнения заданных программами алгоритмов оказало революционное влияние и на саму математику. Существенную часть исследований в математике стала занимать вычислительная математика, тесно связанная с использованием нового инструмента алгоритмического решения многочисленных математических проблем. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные новые задачи, появляются новые направления. Одна из таких направлений - теория конструктивных моделей, которая возникла в 50-е годы. Это направление связано с исследованием зависимости алгебраических свойств абстрактных моделей на основе построения для них представления на натуральных числах и изучения взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей, в первую очередь это касается классических алгебраических структур, таких как группы, кольца, поля. Важным классом групп является нильпотентные группы. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами. Актуальность диссертации является исследование проблемы существования конструктивизации нильпотентных матричных групп.

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимых нильпотентных Rp – групп без кручения.

ТҮЙІНДЕМЕ

Ибраева Айна Бауржановна

ЕСЕПТЕЛІНЕТІН НИЛЬПОТЕНТТІ АЙНАЛЫМСЫЗ Rp – ТОПТАР

Қазіргі уақытта есептелу ұғымы қазіргі математикада үлкен орын атқарады. Математикалық логиканың қарқынды дамуы математикалық есептелу теориясының дамуына ықпал етті. Ал бұл есептелу машиналарының дамуына тікелей әсер етті. Бағдарламалармен берілген алгоритмдерді есептеу құрылғыларының дамуы математиканың өзінің дамуына әкеп соқты. Математиканың көптеген мәселелерін алгоритмдік түрде шешу құралы математиканың зерттеу бөлімінен үлкен орын алды. Есептеу құралының қарқынды дамуына байланысты математикада да үлкен мәелелер, жаңа бағыттар пайда болды. Сондай бағыттардың бірі – 50-ші жылдары пайда болған құрылымдық модельдер теориясы. Топтың негізгі класы нильпотентті топтар болып табылады. Нильпотенттік топ абелдік топ пен шешілмелі топтардың аралығындағы класты құрайды.

Диссертациялық жұмыс есептелінетін нильпотентті айналымсыз Rp-топтарын зерттеуге арналған.

ANNOTATION

Ibrayeva Aina Baurzhanovna

COMPUTABLE NILPOTENT Rp GROUPS - GROUPS WITHOUT TORSION

At the present time a notion of computability undoubtedly becomes one of the main notions of modern mathematics. The mathematical logic's rapid progress led to the progress of mathematical theory of computability. And this created the necessary prerequisites for the computers' creation. The development of the new calculating machines used for implementation of algorithms given by programs influenced on mathematics too. Important part of researches in mathematics occupied calculus mathematics closely connected with use of the new algorithmic solution's instrument of numerous mathematical problems. Progress and improvement of computing machinery sets the numerous new problems in front of mathematical theory and new trends appear. One of such trends is the theory of constructional models which arose in 1950th. This trend is connected with research of algebraic properties of abstract models' dependence based on a construction of natural numbers' representation and analysis of algorithmic and structural properties' interrelation. In the first place this concerns algebraic structures such as groups, loops, fields. Important class of the groups is nilpotent groups. They make the class which is intermediate between abelian and solvable groups.

The dissertation's topicality is a research of the problem of existence of nilpotent matrix groups' constructivisation.

The dissertation is dedicated to research of the questions of computable nilpotent Rp groups - groups without torsion.