УДК 51 На правах рукописи

ДЖЕЛИЛОВА ЕВГЕНИЯ ТАДЖИДИНОВНА

О ВЫЧИСЛИМОСТИ ФАКТОР ГРУППЫ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Специальность 6N0601-Математика

Автореферат
магистерской диссертации на соискание
академической степени магистра естественных наук

Республика Казахстан
г. Усть-Каменогорск,
2011 г.

Работа выполнена в ВКГТУ им. Д. Серикбаева

Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Хисамиев Назиф Гарифуллинович

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., профессор Бадаев Серикжан Атыбаевич

Защита состоится 22.06.2011 г., в 14^{00}

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета Рахметуллина Ж.Т.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория групп является одним из самых развивающихся разделов алгебры, получившая свое применение в различных областях математики и естествознания. В 1911 году М.Дэн сформулировал для класса конечно определенных групп основные алгоритмические проблемы: проблему равенства слов, проблему сопряженности слов и проблему изоморфизма. После этого комбинаторная теория групп оформилась как самостоятельная наука со своей проблематикой.

Актуальность темы исследования

Теория нильпотентных групп — одна из старейших областей теории групп. Но в настоящее время перед ней стоит еще множество нерешенных вопросов.

Теория групп далека еще от завершения. Многочисленность стоящих перед нею конкретных проблем, а так же наличие направлений, по которым работа началась лишь в самое последнее время, позволяют считать, что общая теория групп еще не прошла через вершину своего развития.

Теория конструктивных моделей - один из разделов математики, возникший на границе теории моделей, алгебры и теории рекурсивных функций и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах. Статья А. И. Мальцева "Конструктивные алгебры" явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в которой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дальнейшие пути развития этой теории. Большую роль в становлении и развитии этого раздела математики сыграли работы Ю. Л. Ершова, С.С. Гончарова и его учеников, в которых был решен ряд основных проблем, выработаны новые понятия и определены новые направления в исследовании конструктивных моделей.

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимости факторгруппы нильпотентной группы без кручения конечной размерности.

Объект и предмет исследования - конструктивные нильпотентные группы.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование вопросов вычислимости факторгруппы нильпотентной группы без кручения конечной размерности.

Методология и методы исследования. Методологическую основу составили научные труды зарубежных и отечественных математиков, А.И.Мальцев, С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов, М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, посвященные теории групп и теории конструктивных моделей.

Информационной базой исследования послужили монографии [2], [6], [9].

Научная новизна и практическая значимость исследования – исследованы вопросы вычислимости центра конструктивной нильпотентной группы.

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы и доложены в материалах II-ой Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Единство образования, науки и инноваций» и X Республиканской научно-технической конференции «Творчество молодых - инновационному развитию Казахстана» часть IV, г.Усть-Каменогорск, ВКГУ, 2011. «Вестник», КАСУ, 2011.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первом разделе - *« Нильпотентные группы»* введены основные определения нильпотентных групп и представлены некоторые результаты.

Максимально линейно независимая система элементов абелевой группы без кручения А называется базисом А.

Мощность базиса абелевой группы без кручения называется размерностью группы.

Ряд $e \leq G_0 \leq \ldots \leq G_n = G$,

называется субнормальным, если каждый его предыдущий член есть нормальная подгруппа следующего члена.

Если, кроме того, каждая подгруппа G_i, i=0, 1, . . ., *n,* нормальна в *G,* то ряд называется нормальным рядом в *G*.

Фактор группы G_{i+1}/G_i называются секциями матрешки, а число n - длиной субнормального ряда.

Нормальный ряд (матрешка) называется центральным, если все его факторы центральны, т. е. G_{i+1}/G_i- лежит в центре группы G/G_i для всех i или, что равносильно, взаимный коммутант G_{i+1} и G лежит в G_i для всех *i.*

Если G_{i+1}/G_i в точности совпадает с центром группы G/G_i для всех i, то ряд называется верхним центральным рядом группы G.

Произвольная группа не обязана быть абелевой и конечной, но всегда так или иначе связана с ними. Установить возможно больше таких связей и с их помощью изучить саму группу – вот привычный путь многих работ по теории групп. На этом пути придуманы многочисленные условия, близкие к условиям коммутативности или конечности группы, начиная от самых естественных и кончая весьма причудливыми и просто вздорными.

Важнейшие обобщения коммутативности – разрешимость и нильпотентность. Разрешимые группы – это группы, которые можно собрать из абелевых групп посредством нескольких последовательных расширений. Замечательны они, в частности, своей связью с задачей о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, которой обязаны и самим названием.

Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами. Они определяются более сложно и допускают более глубокое изучение.

Группа, обладающая центральными рядами (матрёшками), называется *нильпотентной*, а минимальное число секций таких матрёшек – ее *ступенью нильпотентности*. Непосредственно из определения видно, что нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между классами абелевых и разрешимых групп, причем абелевы группы – это в точности нильпотентные группы ступени 1.

Если все секции верхнего центрального ряда нильпотентной группы G без кручения имеют конечную размерность, то говорят, что G имеет конечную размерность

Всякая подгруппа и всякая фактор-группа нильпотентной группы сами нильпотентны.

Теорема 1 (критерий подгруппы). Пусть H – непустое подмножество группы G. H является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) для любых $h_1, h_2 \in H$ $h_1 \cdot h_2 \in H$;

2) для любого $h \in H$ $\exists$ $h^{-1} \in H$.

Теорема 2. Любая конечно порожденная нильпотентная группа G обладает центральной матрешкой с циклическими секциями и почти вся без кручения. Если G вся без кручения, то она обладает центральной матрешкой с бесконечными циклическими секциями.

Произвольная группа G называется полной, если для любого ее элемента g и любого натурального m в G существует решение уравнения $x^m = g$.

Полная нильпотентная группа G без кручения называется (нильпотентным) пополнением группы G, если она содержит G и не содержит собственных полных групп, содержащих G.

Группу G всегда можно вложить в полную нильпотентную группу (где извлечение корней всюду определено), причем любые два «минимальных» нильпотентных пополнения группы G изоморфны друг другу и исчерпываются корнями из элементов группы G.

Теорема (А.И.Мальцев). Любая нильпотентная группа G без кручения обладает нильпотентным пополнением той же ступени нильпотентности. Любые два нильпотентных пополнения группы G изоморфны; более того, для любого автоморфизма φ группы G существует изоморфизм между ними, продолжающий φ.

В втором разделе - «Конструктивные модели» даны необходимые определения, и представлены результаты и простейшие свойства по теории конструктивных моделей.

Введем обозначения, связанные с языком узкого исчисления предикатов данной сигнатуры σ. Сигнатурой σ языка узкого исчислении предикатов называется пара, состоящая из трех непересекающихся множеств σ^P, σ^F, σ^C и отображения $\mu: \sigma^P \cup \sigma^F \to w^+ \Leftrightarrow \{1,2...\}$. Если $P \in \sigma^P$ и $\mu(P)= n$ то P называется п-местным предикатным символом. Если $f \in \sigma^F$ и $\mu(f) = т$, то f называется m-местным функциональным символом. Элементы σ^C называются константными символами. Часто используется запись вида $\sigma = <P_1^{n_1},\ldots,P_k^{n_k}; f_1^{m_1},\ldots,f_s^{m_s};\ c_1,\ldots,c_t)$, где верхние индексы являются значениями отображения μ на соответствующих символах. Запись $P \in \sigma$ ($f \in \sigma$ или $c \in \sigma$) означает, что P (f или c) является предикатным (функциональным или константным) символом сигнатуры σ.

Алгебраической системой (или просто системой) S сигнатуры σ называется пара, состоящая из непустого множества $|S|$ называемая основным множеством системы S и набора предикатов $P^{S'} \subseteq |S|^{\mu(P)}$ $P \in \sigma^P$, функций f^S: $|S|^{\mu(f)} \to |S|$ $(f \in \sigma^F)$ и выделенных элементов $c^S \in |S|$ $(c \in \sigma^C)$, называемых соответственно основными предикатами, операциями и константами.

Простейшие свойства конструктивных моделей.

Исследуя простейшие свойства конструктивных моделей относительно теоретико-модельных конструкций, прежде всего, рассмотрен вопрос о конструктивности подмоделей.

Предложение 1.1 Пусть (M, ν) – конструктивная модель. $\mathbf{M_0}$ подмодель модели **M** с основным множеством $M_0 \subseteq M$. Если $\nu^{-1}(Mo)$ - рекурсивно перечислимое множество, то существует нумерация ν_0: $w \to M_0$ такая, что (M_0, ν_0) конструктивная модель и вложение i: $M_0 \to M$ является гомоморфизмом (M_0, ν_0) в (M, ν). Если (M, ν) – сильно конструктивная модель и M_0 элементарная подмодель M, то (M_0, ν_0) — сильно конструктивная модель.

Предложение 1.2. Прямое произведение (сильно) конструктивных моделей является (сильно) конструктивной моделью.

Предложение 2.1. Если (M, ν) - конструктивная модель, то $\exists$ −теория M рекурсивно перечислима.

Следствие 1. Если теория T имеет конструктивизируемую модель, то T имеет модель M, $\exists$-теория которой рекурсивно перечислима.

Теорема 1. Если рекурсивно перечислимая $\forall\exists$- теория T имеет модель с рекурсивно перечислимой $\exists$-теорией, то T имеет конструктивизируемую модель.

Предложение 2.2. Если теория T рекурсивно перечислимо аксиоматизируема и имеет первичную модель Mo, то $\exists$-теория модели Mo рекурсивно перечислима, точнее, $\exists$-теория модели Mo состоит в точности из всех $\exists$-предложений из T.

Определение 1. Пусть G – группа. Отображение $\nu\colon \omega \to G$ множества всех натуральных чисел на G называется нумерацией группы G

Определение 2. Если существует алгоритм, который по любым числам m, n и s определяет справедливость равенства $\nu n \, \nu m = \nu s$, то пара (G, ν) называется конструктивной группой.

Определение 3. Группа G называется <u>конструктивизируемой</u>, если существует такая ее нумерация ν, что (G, ν) – конструктивная группа.

В третьем разделе - *«О вычислимости фактор группы нильпотентной группы без кручения конечной размерности»* дан критерий конструктивизируемости нильпотентной группы без кручения конечной размерности.

Основной проблемой теории конструктивных моделей является проблема существования конструктивизаций тех или иных алгебраических систем. В данном разделе эта проблема рассмотрена для нильпотентных групп без кручения.

Получен следующий критерий конструктивизируемости групп этого класса:

ТЕОРЕМА. Нильпотентная группа без кручения G конечной размерности конструктивизируема тогда и только тогда, когда все секции верхнего центрального ряда конструктивизируемы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимости фактор группы нильпотентной группы без кручения конечной размерности**.**

Исследованы вопросы вычислимости фактор группы нильпотентной группы без кручения. Найден критерий конструктивизируемости нильпотентной группы без кручения конечной размерности.

Теоретическая ценность диссертации состоит в изучении и освоении результатов по теории конструктивных групп и получение нового результата, представляющий научный интерес.

Основные положения диссертации опубликованы в материалах II-й Республиканской научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Единство образования, науки и инноваций», г. Усть-Каменогорск, ВКГУ им. С. Аманжолова, 2011 г.

АННОТАЦИЯ

Джелилова Евгения Таджидиновна

О ВЫЧИСЛИМОСТИ ФАКТОРГРУППЫ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В настоящее время теория групп является одним из самых развивающихся разделов алгебры, получившая свое применение в различных областях математики и естествознания. В 1911 году М.Дэн сформулировал для класса конечно определенных групп основные алгоритмические проблемы: проблему равенства слов, проблему сопряженности слов и проблему изоморфизма. После этого комбинаторная теория групп оформилась как самостоятельная наука со своей проблематикой.

Теория нильпотентных групп — одна из старейших областей теории групп. Но в настоящее время перед ней стоит еще множество нерешенных вопросов.

Теория групп далека еще от завершения. Многочисленность стоящих перед нею конкретных проблем, а так же наличие направлений, по которым работа началась лишь в самое последнее время, позволяют считать, что общая теория групп еще не прошла через вершину своего развития. Вполне своевременно, тем не менее, систематизировать уже накопившийся богатый материал и этим дать широким кругам математиков представление об основных направлениях современной теории групп, о ее методах, о ее крупнейших достижениях и, наконец, о стоящих перед ней очередных проблемах и о путях, по которым ее необходимо в ближайшее время развивать.

Теория конструктивных моделей - один из разделов математики, возникший на границе теории моделей, алгебры и теории рекурсивных функций и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах. Статья А. И. Мальцева "Конструктивные алгебры" явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в которой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дальнейшие пути развития этой теории. Большую роль в становлении и развитии этого раздела математики сыграли работы Ю. Л. Ершова, С.С. Гончарова и его учеников, в которых был решен ряд основных проблем, выработаны новые понятия и определены новые направления в исследовании конструктивных моделей.

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимости факторгруппы нильпотентной группы без кручения конечной размерности.

ANNOTATION

Jelilova Yevgeniya Tagzhidinovna

FACTOR-GROUP COMPUTABILITY OF THE NILPOTENT GROUP WITHOUT TORSION OF THE FINAL DIMENSION

Nowadays the theory of the groups is one of the most developing branches in algebra which is used in different areas of mathematics and natural science. In 1911 M. Dan formulated main algorithmic problems for a class of detected groups: a problem of word equality, a problem of word associativity and isomorphism problem. After that, the combinatory theory of the groups was formed as an independent science with its problems.

The nilpotent group theory is one of the oldest areas of the group theory. But now it still faces many unsolved problems and questions.

The group theory is not completed yet. There are numbers of certain problems and the ways which work started to explore only during the latest time. These facts show that the general group theory has not reached the climax of its development. It is time to systematize already collected plenteous material. It is time to let mathematicians know about the main branches of the modern group theory, about its methods, about its greatest achievements and, at last, about facing problems and about the ways to lead for the group theory to be developed.

The constructive model theory is one of the branches of mathematics, which appeared on a border of model of the theory, algebra and the recursive functions theory; it is related to studying of questions of efficiency in the models and algebras. A.I.Maltsev's article "Constructive algebras" was the first survey work on constructive models, in which there were basic concepts developed and systematized and as well as the further ways of development of this theory were planned. Works of J. L. Ershov and his disciples played a significant role in development of this branch of mathematics. In the works numbers of basic problems were solved, new concepts were developed and new research ways of constructive models were defined.

The dissertation is devoted to research of factor-group computability questions of the nilpotent group without torsion of the final dimension.

АННОТАЦИЯ

Джелилова Евгения Таджидиновна

СОҢҒЫ МӨЛШЕРЛІКТІҢ БҰРАНДАУСЫЗ ФАКТОР ТОБЫНЫҢ НИЛЬПОТЕНТТІК ТОПТЫҢ ЕСЕПТЕУІ ТУРАЛЫ

Қазіргі кезде математика мен жаратылыстану облыстарында қолданысын тапқан топтар теориясы алгебраның ең бір дамып келе жатқан тарауы болып табылады. 1911 жылы М.Дэн соңғы анықталған топтар класына негізгі алгоритмиялық мәселелерді қарастырды: сөздің теңдік мәселесін, сөздердің қосылу мәселесін және изоморфизм мәселесі. Содан кейін комбинаториялық теория тобы өзіндік ғылым ретінде өз проблематикасымен әзірленді.

Нильпотенттік топтар теориясы ең дамыған топтар теориясының тарауы. Бірақ, қазіргі кезде оның алдында көптеген шешілмеген сұрақтар мен дәлелденбеген есептер бар.

Топтар теориясы аяқталудан әлі алшақта. Бұның алдында тұрған көптеген нақты мәселелер, соңғы кездегі басталған жұмыстарды осы бағыттар бойынша, жалпы теория тобы өзінің дамыған шыңына әлі жеткен жоқ. Жинақталған өте бай материал және оны математиктердің көбіне казіргі теория тобының негізгі бағыттары туралы, оның әдістері, үлкен жетістіктері алдында тұрған мәселелері туралы жақындаған уақытта дамыту жолдары.

Конструктивті модельдер теориясы – алгебрадағы және модельдегі тиімділік мәселелерін оқумен байланысты алгебраның және рекурсивті функциясы теория моделінің шегінде пайда болған математиканың бір тарауы. А.И. Мальцевтің «Конструктивті алгебра» мақаласы бірінші конструктивті моделінің шолу жұмысы болды, мұнда осы теорияның келешек даму жолдары белгіленіп, негізгі ұғымдары істеліп аяқталды да жүйеленді. Ю.Л. Ершовтың, С.С.Гончаровтың және оның оқушыларының еңбектері математиканың осы тарауының дамуы мен құрылуында үлкен роль атқарды. Негізгі мәселелердің шешілуі, жаңа бірқатар ұғымдар істеліп аяқталды да конструктивті модельдерді зерттеуге жаңа бағыттар анықталды.

Диссертацияда ақырлы өлженді бұрандаусыз нильпотент топтың мәселелерін зерттеуге арналған.

Литература

1. Мальцев А.И. О рекурсивных абелевых группах. // Докл. АН СССР 1962 Т. 146 №5, с 1009 – 1012.
2. Ершов Ю.Л. Существование конструктивизаций. // Докл. АН СССР 1972 Т.204 №5, с 1041 – 1044.
3. Гончаров С.С., Молоков А.В., Романовский А.С. Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности. Сиб мат журн 1989 Т. 3 №1, с 82 – 88.
4. Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивных матричных и упорядоченных группах. // Алгебра и логика. 2004 Т. 43 №3, с 353 – 363.
5. Латкин И.В. Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения.// Алгебра и логика. 1996 Т.35, с 308 – 313.
6. Хисамиев Н.Г. О конструктивных нильпотентных группах.// Сиб мат журн 2007 Т.48 №1, с 214 – 223.
7. Хисамиев Н.Г. Позитивно определенные нильпотентные группы.// Мат. журн. института математики Мо и РК. 2007 Т.24 №2, с 95 – 102.
8. Гончаров С.С., Ершов Ю.А. Конструктивные модели. Новосибирск, Научная книга, 1996.
9. Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, 4-е изд.-М: Наука, - 1996.