УДК 512.54, 510.5 На правах рукописи

**БАКИМБАЕВА АЙГУЛЬ ТАУРБЕКОВНА**

# О ВЫЧИСЛИМОСТИ ФАКТОРГРУППЫ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ ПО ЦЕНТРУ

Специальность 6N0601-Математика

Автореферат
магистерской диссертации на соискание
академической степени магистра естественных наук

Республика Казахстан
г. Усть-Каменогорск,2011 г.

Работа выполнена в Восточно-Казахстанском государственном техническом университете им. Д. Серикбаева

**Научный руководитель** д.ф.-м.н., профессор
Хисамиев Назиф Гарифуллинович

**Официальные оппоненты** д.ф.-м.н., профессор
Бадаев Серикжан Атыбаевич

**Ученый секретарь**
**диссертационного совета** Рахметуллина Ж.Т.

Защита состоится «22» июля 2011 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета по специальности 6N0601 «Математика» при Восточно-Казахстанском государственном техническом университете имени Д. Серикбаева по адресу: 070010, Республика Казахстан, Восточно-Казахстанская область, г. Усть-Каменогорск, ул. Серикбаева, 19, главный корпус, Г-3-304.

Автореферат разослан «13» мая 2011 года.

Диссертант Бакимбаева А.Т.

*Актуальность темы исследования*

В настоящее время теория групп является одной из самых развитых областей алгебры, имеющей многочисленные применения как в самой математике, так и за ее пределами — в топологии, теории функций, кристаллографии, квантовой механике и других областях математики и естествознания. Конечной целью собственно теории групп является описание всех групповых композиций.

Так же на сегоднящний день понятие вычислимости становится, безусловно, одним из важнейших понятий современной математики. Бурное развитие математической логики привело к развитию математической теории вычислимости. А это создало необходимую предпосылку к созданию электронных вычислительных машин. Развитие новых вычислительных средств для выполнения заданных программами алгоритмов оказало революционное влияние и на саму математику. Существенную часть исследований в математике стала занимать вычислительная математика, тесно связанная с использованием нового инструмента алгоритмического решения многочисленных математических проблем. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные новые задачи. Само исследование феномена вычислимости как объекта изучения математической теории привело к созданию целого ряда интересных и актуальных направлений современной математики. Одна их этих направлений - теорию конструктивных моделей, которая возникла в 50-е годы. Это направление связано с исследованием зависимости алгебраических свойств абстрактных моделей на основе построения для них представления на натуральных числах и изучения взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей. Таким образом, лежащее в фундаменте современной математики понятие группы является весьма равносторонним орудием самой математики – оно является как важнейшая составная часть ряда сложных алгебраических систем, как чуткий отражатель свойств различных топологии, как испытательный полигон теории алгоритмов и многими иными путями. Важным классом групп является нильпотентные группы. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами.

Становление теории конструктивных моделей как интересного самостоятельного направления современной математической логики обязано появлению статьи А.И.Мальцева «Конструктивные алгебры». А.И.Мальцеву принадлежит и ряд важнейших результатов, как по разрешимости элементарных теорий, так и по конструктивным моделям. Наиболее свежей проблематикой обладает теория конструктивных моделей – теория, которая возникла на стыке теории моделей и теории нумераций. За этот период теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Конструктивные абелевы группы изучались в работах А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, В.П.Добрица, А.Т.Нуртазина, Н.Г.Хисамиева, и других авторов. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало.

В Послании Президента Республики Казахстан Н.А.Назарбаева народу Казахстана «Построим будущее вместе» говорится: «...нам необходимо сформировать эффективную систему технического и профессионального образования, соответствующую требованиям современного рынка труда. Подготовка квалифицированных отечественных кадров будет увязана с планами индустриализации страны. Мы доведем уровень высшего образования до мировых стандартов. Наши выпускники будут востребованы как отечественными, так и зарубежными работодателями. Мы сформируем эффективную систему обучения в течении всей жизни».

Теория групп относится к одному из важнейших разделов современной алгебры. Она имеет богатую и содержательную историю. К настоящему времени эта часть математики превратилась в широкую и богатую содержанием науку, имеющую многочисленные применения, как в самой математике, так и за ее пределами – в топологии, теории функций, кристаллографии, квантовой механике, теории кодирования, криптографии и других областях математики и естествознания. Одним из важнейших классов групп являются нильпотентные группы, промежуточные между абелевыми и разрешимыми группами.

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимости факторгруппы нильпотентной группы без кручения по центру.

*Объект и предмет исследования* является конструктивные нильпотентные группы.

*Цель и задачи исследования.* Целью диссертационной работы является исследование вопросов вычислимости факторгруппы нильпотентной группы по центру.

*Методология и методы исследования.* Методологическую основу составили научные труды зарубежных и отечественных математиков, М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов, посвященные теории групп и теории конструктивных моделей.

*Информационной базой* исследования послужили монографии: Н.Г.Хисамиева «О конструктивных нильпотентных группах», И.В.Латкина «Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения», С.С.Гончарова, А.В.Молокова, А.С.Романовского «Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности».

*Научная новизна и практическая значимость исследования* – исследованы вопросы вычислимости факторгруппы нильпотентной группы без кручения по центру.

*Публикации.* Основные положения диссертации опубликованы в материалах студенческой научно-практической конференции ВКГУ им.С.Аманжолова и в сборнике докладов международной научно-практической конференции «Научное творчество и интеллектуальный потенциал: опыт и перспективы развития», КАСУ, 2011 г.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

*В первом разделе* — «Нильпотентные группы» даны необходимые определения и общие свойства, необходимые в дальнейшем.

Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами, причем абелевы группы – это в точности нильпотентные группы ступени 1. Они определяются более сложно и допускают более глубокое изучение.

Пусть G — группа. Нормальная матрёшка

$$1 = G_0 \le G_1 \le \dots \le G_s = G \qquad (1)$$

называется центральной, если все ее секции центральны, т. е.

$$G_{i+1}/G_t \le Z\,(G/G_i) \text{ для всех } i \qquad (2)$$

или, что равносильно,

$$[G_{i+1}, G] \le G_i \text{ для всех } i. \qquad (3)$$

эти ряды называются верхним центральным и нижним центральным.

Группа, обладающая центральными матрешками, называется нильпотентной, а минимальное число секций таких матрешек – ее ступенью нильпотентности. Хотя верхняя и нижняя центральные матрёшки нильпотентной группы имеют одинаковое число членов, сами матрёшки не обязаны совпадать.

Например: Пусть К — поле, $n \ge 3$. Пользуясь формулами:

$$[t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta) \qquad \text{при различных } i, j, k$$

и $$[UT_n^{\,r}(K),\ U_n^{\,s}(K)] = UT_n^{\,r+s}(K)$$

нетрудно проверить, что ряд

$$UT_n(K) = UT_n^{\,1}(K) \ge UT_n^{\,2}(K) \ge \dots \ge UT_n^{\,n}(K) = 1$$

является одновременно верхней и нижней центральной матрёшкой в группе $UT_n$ (К). В частности, эта группа нильпотентна ступени n - 1. В работе одного из авторов (Мерзляков Ю. И. «Алгебра и логика”) вычислены центральные ряды других матричных групп, в том числе нижние центральные ряды главных конгруэнц-подгрупп над локальными кольцами и силовских p-подгрупп из $GL_n$ ($Z_p$m). В последнем случае, например, получается такое описание. Пусть для краткости К = $Z_p$m. Возьмем пустую матрицу степени n, т. е. квадрат, разбитый на n горизонтальных и n вертикальных полос, и покроем ее ковром идеалов К, pК, $p^2$К, . . . следующим образом:

… $p^2$К  $p^2$К  $p^2$К  pК  pК | pК | К | К | К
... $p^2$К  $p^2$К  $p^2$К pК | pК | pК | К | К К
… $p^2$К  $p^2$К $p^2$К| pК | pК | pК| К К К

n n n

Пусть G — силовская p-подгруппа из $GL_n(K)$. Как мы знаем, она состоит из всех матриц степени n над K, сравнимых с единичной матрицей по модулю ковра идеалов в отмеченном положении (упражнение 11.3.3 из [9]).

Оказывается, что при $r \geq 2$ централ $\gamma_r G$ содержит те и только те матрицы из $SL_n$ (K), которые сравнимы с единицей по модулю ковра идеалов, сдвинутого на r - 1 шагов вправо.

Более формально, пусть K — ассоциативное кольцо с единицей. Система его идеалов $a = \{a_{ij} \mid i, j \in Z\}$ называется ковром идеалов, если

$$A_{ik}a_{kj} \subseteq a_{ij} \text{ для всех } i, j, k \in Z.$$

Легко проверить, что если K коммутативно, то

$$\Gamma_n (a) = \{x \in SL_n (K) \mid x_{ij} \equiv \delta_{ij} \bmod a_{ij}\}$$

- группа; она называется (специальной) конгруэнц-подгруппой по модулю ковра a или ковровой подгруппой (в частности, при K = Z, $a_{ij}$ = (m) получается $\Gamma_n$ (m) из 4.2.7 d [9]. В этих обозначениях упомянутый выше результат гласит (теперь уже на языке формул, а не рисунков):
если G – силовская p-подгруппа группы $GL_n$ (K), $K = Z_p m$, то

$$\gamma_r G = \Gamma_n(a^{(n,r)}),\ r = 2,3, ....$$

где

$$a_{ij}^{(n,r)} = p^{-[(j-i-r)/n}] K;$$

квадратные скобки означают взятие целой части и $p^l K = K$ при $l \leq 0$. Отсюда видно, в частности, что силовская p-подгруппа группы $GL_n$ ($Z_p m$) нильпотентна ступени mn-1.
Из замечания после формулы:

$$1=Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots,$$

$$1=G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_{s-1} \leq G_s=G$$

$$\ldots \leq \Gamma_2 \leq \Gamma_1=G$$

ясно, что группа G тогда и только тогда нильпотентна ступени $\leq$ s, когда $Y_{s+1}G = 1$. Поэтому класс $\xi_s$ всех нильпотентных групп ступени $\leq s$ есть многообразие, определяемое тождеством

$$Y_{s+1} (x_1, \ldots, x_{s+1}) \equiv [x_1, \ldots x_{s+1}] = 1$$

В частности, $\xi_s$ замкнуто относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и декартовых произведений. Согласно общей теории многообразие $\xi_s$ обладает свободными группами; все они имеют вид

$$F (X)/y_{s+1}F (X)$$

при подходящем алфавите X.

Свое нынешнее название нильпотентные группы получили не сразу – долго их называли ничего не говорящим словом «специальные». Между тем в теории колец уже давно работало понятие нильпотентного, т.е. «потенциально нулевого» кольца – это кольцо, в котором произведение данного числа любых элементов равно нулю:

$$x_1 \dots x_n = 0 \tag{4}$$

(таково, например кольцо треугольных матриц степени с нулевой диагональю). Классическая теория Ли установила соответствие между особым классом колец – кольцами Ли – и особым классом групп – группами Ли, - при котором умножению в кольцах соответствует коммутирование в группах и, в частности, тождеству (4) соответствует тождество

$$[x_1 \dots x_n] = 1 \tag{5}$$

По этой причине термин «нильпотентная» в конце концов закрепился и за группами с тождеством (5). Отметим , что теория групп не осталась в долгу перед теорией колец – разрешимые кольца Ли были названы так по аналогии с разрешимыми группами.

Иногда ступень нильпотентности называют классом нильпотентности. Это менее удобно, так как порождает стилистические шедевры вроде «класса нильпотентных групп данного класса».

Само определение нильпотентных групп подсказывает ясный и обычно безотказный путь их изучения – индукцию по ступени нильпотентности. Проводя индукцию, чаще всего работают с централами и гиперцентрами, но иногда используют и другие подгруппы. В этой связи полезна

Лемма 1. Пусть *G* – нильпотентная группа ступени *s* ≥ *2*. Любая ее подгруппа, порожденная коммутантом и одним элементом, имеет ступень нильпотентности меньше *s*.

Теорема 2. Любая подгруппа нильпотентной группы субнормальна. Более точно, если *G* – нильпотентная группа ступени *s*, то для любой ее подгруппы *H* ряд последовательных нормализаторов достигает *G* не позже чем через *s* шагов.

Теорема 3. В нильпотентной группе любая нетривиальная нормальная подгруппа имеет нетривиальное пересечение с центром.

Теорема 4. Пусть *G* – нильпотентная группа. Если *A* – ее подгруппа с условием $A[G,G] = G$, то $A = G$. В частности,

$[G,G] \leq \Phi(G)$.

Теорема 5. В любой нильпотентной группе *G* любая максимальная абелева нормальная подгруппа *A* совпадает со своим централизатором. В частности, *A* – максимальная абелева подгруппа и *G/A* изоморфно вкладывается в *Aut A*.

Теорема 6. В любой нильпотентной группе *G* совокупность $\tau G$ периодических элементов есть подгруппа (периодическая часть группы *G*).

Теорема 7. В любой нильпотентной группе *G* без кручения извлечение корней – однозначная операция (хотя и не обязательна всюду определенная), т.е. из $a^n = b^n, n \neq 0$, следует $a = b$.

Теорема 8 (Фиттинг). Во всякой группе произведение двух нормальных нильпотентных подгрупп ступеней $s, t$ , есть нормальная нильпотентная подгруппа ступени $\leq s + t$.

Теорема 9. Если группа $G$ содержит нильпотентную нормальную подгруппу $N$ ступени r, фактор - группа по коммутанту которой $G/N'$ нильпотентна ступени $s$, то сама $G$ нильпотентна ступени $< \binom{r+1}{2}s - \binom{r}{2}$.

*Во втором разделе* - «Конструктивные модели» рассмотрены необходимые сведения, используемые в следующих разделах.

Теория конструктивных моделей - один из разделов математики, возникший на границе моделей теории, алгебры и теории рекурсивных функций и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах.

Статья А.И. Мальцева «Конструктивные алгебры» явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в которой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дальнейшие пути развития этой теории. Большую роль в становлении и развитии этого раздела математики сыграли работы Ю.Л. Ершова и его учеников, в которых был решен ряд основных проблем, выработаны новые понятия и определены новые направления в исследовании конструктивных моделей.

Все общие рассмотрения будут вестись обычно в некоторой фиксированной сигнатуре $\sigma_0 = \langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots \rangle$, содержащей только предикатные символы и такой, что функция $f: k \mapsto n_k$ общерекурсивна. Рассмотрим следующие сигнатуры:

$$\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_0 \bigcup \langle a_0, a_1, \dots \rangle;$$

$$\sigma_2 \rightleftharpoons \sigma_0 \bigcup \langle c \rangle;$$

$$\sigma_3 \rightleftharpoons \sigma_1 \bigcup \langle c \rangle,$$

которые получаются присоединением к сигнатуре $\sigma_0$ символов для констант. Будем предполагать, что $n_0 = 2$ и предикат $P_0$ на любой модели определен как равенство (вместо $P_0(x, y)$ будем писать $x = y$).

Пусть $L_i$ – совокупность всех формул языка узкого исчисления предикатов с равенством $(P_0)$ сигнатуры $\sigma_i, i = 0, 1, 2, 3$ . Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{ccccc} & & L_1 & & \\ & \subseteq & & \subseteq & \\ L_0 & & & & L_3, \\ & \subseteq & & \subseteq & \\ & & L_2 & & \end{array} \quad L_1 \cap L_2 = L_0.$$

Предположим еще, что задана какая-нибудь фиксированная геделева нумерация g множества $L_3 (g: \omega \to L_3)$. Под геделевой нумерацией множества $L_3$ понимаем любую нумерацию g этого множества такую, что по g–номеру можно эффективно построить саму формулу, а по формуле из $L_3$ можно эффективно найти ее g–номер.

С каждым подмножеством $S \subseteq L_3$ связывается множество $g^{-1}(S)$ всех номеров формул S. Назовем S разрешимым множеством, если $g^{-1}(S)$ рекурсивно. Так, множества $L_0, L_1$ и $L_2$ разрешимы.

Введем несколько определений, относящихся к нумерованным множествам и моделям.

Пусть S – произвольное множество. Нумерацией $\nu$ множества S назовем отображение $\nu: \omega \to S$ множества всех натуральных чисел $\omega$ на множество S. Пара $(S, \nu)$, где S – множество, а $\nu$ – его нумерация, называется нумерованным множеством; морфизмом одного нумерованного множества $(S_0, \nu_0)$ в другое $(S_1, \nu_1)$ назовем всякое отображение $\mu: S_0 \to S_1$, для которого существует общерекурсивная функция h такая, что $\mu\nu_0 = \nu_1 h$.

Нумерованной моделью (сигнатуры $\sigma_0$) назовем пару $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M} = \langle M, P_0, P_1, \dots \rangle$ – модель (сигнатуры $\sigma_0$), а $\nu$ – нумерация основного множества M модели $\mathfrak{M}$. Гомоморфизмом нумерованной модели $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ в нумерованную модель $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ назовем всякое отображение $\mu: M_0 \to M_1$ основного множества $M_0$ модели $\mathfrak{M}_0$ в основное множество $M_1$ модели $\mathfrak{M}_1$, которое является как гомоморфизмом модели $\mathfrak{M}_0$ в модель $\mathfrak{M}_1$, так и морфизмом из $(M_0, \nu_0)$ в $(M_1, \nu_1)$.

Гомоморфизм $\mu$ нумерованной модели $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ в нумерованную модель $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$ назовем эквивалентностью, если $\mu$ – изоморфизм $\mathfrak{M}_0$ на $\mathfrak{M}_1$, а обратное отображение $\mu^{-1}$ есть морфизм из $(M_1, \nu_1)$ в $(M_0, \nu_0)$. Если существует эквивалентность из $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ в $(\mathfrak{M}_1, \nu_1)$, то эти нумерованные модели назовем эквивалентными и будем обозначать это так: $(\mathfrak{M}_0, \nu_0) \approx (\mathfrak{M}_1, \nu_1)$.

По каждой нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ можно каноническим образом построить некоторое $\sigma_1$ – обогащение $\mathfrak{M}_\nu$ модели $\mathfrak{M}$ (т.е. модель сигнатуры $\sigma_1$, основное множество которой есть основное множество модели $\mathfrak{M}$, а предикаты из $\sigma_0$ в $\mathfrak{M}_\nu$ совпадают с соответствующими предикатами $\mathfrak{M}$) следующим образом: в качестве значения константы $a_k, k \in \omega$, берем элемент $\nu k \in M$.

$Th_0(\mathfrak{M}, \nu)$ - элементарная теория модели $\mathfrak{M}$, т.е. множество всех замкнутых формул сигнатуры $\sigma_0$, истинных на модели $\mathfrak{M}$; $Th_1(\mathfrak{M}, \nu)$ - элементарная теория модели $\mathfrak{M}_\nu$, т.е. множество всех замкнутых формул сигнатуры $\sigma_1$, истинных на модели $\mathfrak{M}_\nu$; $Th_3(\mathfrak{M}, \nu)$ - теория сигнатуры $\sigma_3$, системой аксиом которой является множество формул

$$Th_1(\mathfrak{M}, \nu) \bigcup \{c \neq a_0, \dots, c \neq a_k, \dots\};$$

$$Th_2(\mathfrak{M}, \nu) \rightleftharpoons Th_3(\mathfrak{M}, \nu) \cap L_2.$$

Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ называется конструктивной моделью, если множество $\overline{D}(\mathfrak{M}, \nu) \rightleftharpoons \{\langle k, m_1, \dots, m_{n_k} \rangle | \mathfrak{M} \models P_k(\nu m_1, \dots, \nu m_{n_k})\}$ рекурсивно.

Одной из основных проблем является нахождение условий, при которых теория T имеет конструктивную модель, т.е. такую конструктивную модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ что $Th_0(\mathfrak{M}, \nu) \subseteq T$.

Следующее определение выделяет важный частный случай понятия конструктивной модели, который существен при изучении разрешимых теорий.

Нумерованная модель $(\mathfrak{M},\nu)$ называется сильно конструктивной, если $Th_1(\mathfrak{M},\nu)$ – разрешимая теория.

Не менее важным вопросом, чем вопрос о существовании (сильно) конструктивных моделей у теории, является вопрос о том, можно ли занумеровать конкретную модель так, чтобы она стала (сильно) конструктивной.

Если $\nu: \omega \to |\mathfrak{M}|$ – нумерация основного множества модели $\mathfrak{M}$ такая, что $(\mathfrak{M},\nu)$ – (сильно) конструктивная модель, то $\nu$ называется (сильной) конструктивизацией модели $\mathfrak{M}$ . Модель называется (сильно) конструктивизируемой, если она имеет по крайней мере одну (сильную) конструктивизацию.

Сформулируем две проблемы в этой терминологии:

1. Проблема существования (сильно) констуктивизируемой модели у заданной теории T.
2. Проблема существования (сильной) конструктивизации у заданной модели $\mathfrak{M}$.

Если проблема (сильной) конструктивизируемости для модели $\mathfrak{M}$ имеет решение, то естественно встает вопрос о единственности (сильной) конструктивизации этой модели.

Если $\nu_0$ и $\nu_1$ – две конструктивизации модели $\mathfrak{M}$, то назовем их эквивалентными, если тождественное отображение $|\mathfrak{M}|$ на себя есть эквивалентность нумерованных моделей $(\mathfrak{M},\nu_0)$ и $(\mathfrak{M},\nu_1)$. Пусть $\nu_0$ и $\nu_1$ – две нумерации множества M; сводится к $\nu_1$ (символически: $\nu_0 \leq \nu_1$ ), если существует одноместная общерекурсивная функция f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Нумерации $\nu_0$ и $\nu_1$ эквивалентны $(\nu_0 \equiv \nu_1)$, если $\nu_0 \leq \nu_1$ и $\nu_1 \leq \nu_0$.

(Сильно) конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}$ называется (сильно) конструктивно устойчивой, если любые две (сильные) конструктивизации $\mathfrak{M}$ эквивалентны.

Таким образом, конструктивно устойчивые модели – это модели, для которых проблема конструктивизации имеет единственное решение.

Существует и другое понятие, которое характеризует единственность конструктивизации модели в более слабом смысле.

Конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}$ называется автоустойчивой, если для любых двух конструктивизаций $\nu_0$ и $\nu_1$ модели $\mathfrak{M}$ существует эквивалентность $\mu: (\mathfrak{M},\nu_0) \to (\mathfrak{M},\nu_1)$.

Одной из основных проблем конструктивных моделей является проблема существования конструктивных моделей с различными элементарными свойствами, т.е. свойствами, записываемыми на языке узкого исчисления предикатов. В этом направлении получен (к 1978 г.) ряд интересных и важных теорем. Существование широкого класса сильно конструктивных моделей дает следующая теорема: если $T \subseteq L_0$ - разрешимая теория, то существует такая последовательность сильно конструктивных моделей

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots, (\mathfrak{M}_k, \nu_k), \ldots, k < \omega,$$

что:

1) $T = Th(\{\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots\})$

2) множество $\{\langle x, y\rangle | g(y) \in Th_1(\mathfrak{M}_x, \nu_x)\}$ является рекурсивным.

Было замечено, что существуют формулы, не имеющие конструктивных моделей. Следующие две теоремы дают некоторые достаточные условия существования конструктивных моделей у теории с рекурсивно перечислимым множеством аксиом.

Если T – рекурсивно перечислимая $\forall\exists$–теория, имеющая модель $\mathfrak{M}$ с рекурсивно перечислимой $\exists$–теорией, то теория T имеет конструктивную модель.

Теория T конечной сигнатуры $s = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, c_0, \ldots, c_l\rangle$ называется $\forall$–конечной, если универсальная теория любого расширения $T' \subseteq T$ (той же сигнатуры) конечно аксиоматизируема (универсальными предложениями) Теория T называется сильно $\forall$–конечной, если для любого конечного множества $\langle c_{l+1}, \ldots, c_N\rangle$ константных символов теория $T^*$, определенная теорией T в языке сигнатуры $\sigma^* = \sigma \cup \langle c_{l+1}, \ldots, c_N\rangle$, является $\forall$–конечной.

Если теория T сильно $\forall$–конечна, а $T'$ – рекурсивно перечислимое расширение T, то $T'$ имеет конструктивную модель.

Другой круг исследуемых вопросов связан с проблемой существования для заданной модели $\mathfrak{M}$ нумерации $\nu$ такой, чтобы пара $(\mathfrak{M}, \nu)$ стала (сильно) конструктивной моделью. Модель, для которой существует такая нумерация, называется (сильно) конструктивизируемой, а соответствующая нумерация (сильной) конструктивизацией. Для решения ряда вопросов, связанных с конструктивизируемостью моделей, оказывается полезной теорема Ершова о ядре, применение которой к конкретным алгебраическим системам позволяет решить ряд естественных вопросов. В частности, установлено: 1) для любой конструктивной локально нильпотентной группы без кручения существует конструктивное пополнение; 2) если $(F, \nu)$ – конструктивное поле, $F_0$ - алгебраическое расширение поля F, то $\nu$ продолжается до конструктивизации поля $F_0$ тогда и только тогда, когда семейство конечных множеств многочленов над F от счетного числа переменных, имеющих корень в F, рекурсивно перечислимо.

*В третьем разделе* - «О вычислимости факторгруппы нильпотентной группы по центру» получены следующие результаты:

Пусть G – группа. Отображение $\upsilon : \omega \to G$ множества всех натуральных чисел на G называется нумерацией группы G. Если существует алгоритм, которой по любым числам n, m и s определяет справедливость равенства $\upsilon n \cdot \upsilon m = \upsilon s$, то пара (G, $\upsilon$) называется конструктивной группой. Группа G называется конструктивизируемой, если существует такая ее нумерация $\upsilon$, что (G, $\upsilon$) – конструктивная группа. Подгруппа $H \subseteq G$ называется вычислимо перечислимой (вычислимой) в (G, $\upsilon$ ), если множество $\upsilon^{-1}H$ вычислимо перечислимо (вычислимо). Максимальная система линейно независимых элементов абелевой группы без кручения A называется базисом группы A, а число элементов базиса – размерностью группы A.

Пусть M – подмножество группы G. Множество $C(M)=\{x \in G \mid mx = xm, m \in M\}$ называется централизатором M в группе G. Централизатор всей группы называется ее центром и обозначается через C.

Определим в G возрастающий и убывающий ряды $\xi_0 G \le \xi_1 G \le \dots$ ; $\gamma_1 G \ge \gamma_2 G \ge \dots$;
следующим образом: $\xi_0 G = 1$ , $\gamma_1 G = G$ и если подгруппы $\xi_n G$ и $\gamma_n G$ уже определены, то $\xi_{n+1} G / \xi_n G = C(G / \xi_n G)$ и $\gamma_{n+1} G = [\gamma_n G, G]$, здесь [A,B] – взаимный коммутант подгрупп A и B. Полученные ряды подгрупп называются соответственно верхним и нижним центральным рядом, а $\xi_n G$ и $\gamma_n G$ - *n*-м централом и *n*-м гиперцентралом группы G.

Группа G называется нильпотентной ступени *n*, если справедливо равенство $\xi_n G$= G (или, что равносильно, $\gamma_n G$=1).

Секцией группы G называется всякая факторгруппа B/A, где B, A – подгруппы из G, причем A – нормальная подгруппа в B.

ТЕОРЕМА. Пусть (G, $\upsilon$ ) – вычислимая нильпотентная группа без кручения и в ней существует вычислимо перечислимая подгруппа H, содержащая центр C группы G, и такая, что размерность r (H/C) конечна. Тогда факторгруппа G/C вычислима.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время теория групп является одной из самых развитых областей алгебры, имеющей многочисленные применения как в самой математике, так и за ее пределами — в топологии, теории функций, кристаллографии, квантовой механике и других областях математики и естествознания. Конечной целью собственно теории групп является описание всех групповых композиций.

Так же на сегоднящний день понятие вычислимости становится, безусловно, одним из важнейших понятий современной математики. Бурное развитие математической логики привело к развитию математической теории вычислимости. А это создало необходимую предпосылку к созданию электронных вычислительных машин. Развитие новых вычислительных средств для выполнения заданных программами алгоритмов оказало революционное влияние и на саму математику. Существенную часть исследований в математике стала занимать вычислительная математика, тесно связанная с использованием нового инструмента алгоритмического решения многочисленных математических проблем. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные новые задачи. Само исследование феномена вычислимости как объекта изучения математической теории привело к созданию целого ряда интересных и актуальных направлений современной математики. Одна их этих направлений - теорию конструктивных моделей, которая возникла в 50-е годы. Это направление связано с исследованием зависимости алгебраических свойств абстрактных моделей на основе построения для них представления на натуральных числах и изучения взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей. Таким образом, лежащее в фундаменте современной математики понятие группы является весьма равносторонним орудием самой математики – оно является как важнейшая составная часть ряда сложных алгебраических систем, как чуткий отражатель свойств различных топологии, как испытательный полигон теории алгоритмов и многими иными путями.

Становление теории конструктивных моделей как интересного самостоятельного направления современной математической логики обязано появлению статьи А.И.Мальцева «Конструктивные алгебры». Наиболее свежей проблематикой обладает теория конструктивных моделей – теория, которая возникла на стыке теории моделей и теории нумераций. За этот период теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало.

Таким образом диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимости факторгруппы нильпотентной группы без кручения по центру. В ней получены достаточные условия для вычислимости центра в конструктивной нильпотентной группе без кручения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Мальцев А.И. О рекурсивных абелевых группах // Доклады Ан СССР, - 1962. №5(46),-С.1009-1012.
2. Ершов Ю.Л. Существование конструктивизаций // Доклады Ан СССР, - 1972.№5(204),-С.1041-1044.
3. Гончаров С.С., Молоков А.В., Романовский А.С. Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности. Сиб.мат. журнал // 1989.-№1(30),-С.82-88.
4. Романьков В.А., Хисамиев Н.Г. О конструктивных матричных и упорядоченных группах // Алгебра и логика, -2004.-№3(43),-С.353-363.
5. Хисамиев Н.Г. О конструктивных нильпотентных группах. Сиб.мат. журнал // 2007.-№1(48),-С.214-223.
6. Латкин И.В. Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения // Алгебра и логика.-1996.-№3(35),-С.308-313.
7. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. (Сибирская школа алгебры и логики).-Новосибирск, научная книга (НИИ МИОО НГУ).-1996.
8. Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, 4-е изд.-М.:Наука,-1996.

## АННОТАЦИЯ

**Бакимбаева Айгуль Таурбековна**

# О ВЫЧИСЛИМОСТИ ФАКТОРГРУППЫ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ ПО ЦЕНТРУ

В настоящее время теория групп является одной из самых развитых областей алгебры, имеющей многочисленные применения как в самой математике, так и за ее пределами — в топологии, теории функций, кристаллографии, квантовой механике и других областях математики и естествознания. Конечной целью собственно теории групп является описание всех групповых композиций.

Так же на сегоднящний день понятие вычислимости становится, безусловно, одним из важнейших понятий современной математики. Бурное развитие математической логики привело к развитию математической теории вычислимости. А это создало необходимую предпосылку к созданию электронных вычислительных машин. Развитие новых вычислительных средств для выполнения заданных программами алгоритмов оказало революционное влияние и на саму математику. Существенную часть исследований в математике стала занимать вычислительная математика, тесно связанная с использованием нового инструмента алгоритмического решения многочисленных математических проблем. Развитие и совершенствование вычислительной техники ставит перед математической теорией многочисленные новые задачи. Само исследование феномена вычислимости как объекта изучения математической теории привело к созданию целого ряда интересных и актуальных направлений современной математики. Одна их этих направлений - теорию конструктивных моделей, которая возникла в 50-е годы. Это направление связано с исследованием зависимости алгебраических свойств абстрактных моделей на основе построения для них представления на натуральных числах и изучения взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей. Таким образом, лежащее в фундаменте современной математики понятие группы является весьма равносторонним орудием самой математики – оно является как важнейшая составная часть ряда сложных алгебраических систем, как чуткий отражатель свойств различных топологии, как испытательный полигон теории алгоритмов и многими иными путями. Важным классом групп является нильпотентные группы. Нильпотентные группы составляют класс, промежуточный между абелевыми и разрешимыми группами.

Становление теории конструктивных моделей как интересного самостоятельного направления современной математической логики обязано появлению статьи А.И.Мальцева «Конструктивные алгебры». А.И.Мальцеву принадлежит и ряд важнейших результатов, как по разрешимости элементарных теорий, так и по конструктивным моделям. Наиболее свежей

проблематикой обладает теория конструктивных моделей – теория, которая возникла на стыке теории моделей и теории нумераций. За этот период теория обогатилась новыми идеями, методами и конструкциями. Конструктивные абелевы группы изучались в работах А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, В.П.Добрица, А.Т.Нуртазина, Н.Г.Хисамиева, и других авторов. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало.

Теория групп относится к одному из важнейших разделов современной алгебры. Она имеет богатую и содержательную историю. К настоящему времени эта часть математики превратилась в широкую и богатую содержанием науку, имеющую многочисленные применения, как в самой математике, так и за ее пределами – в топологии, теории функций, кристаллографии, квантовой механике, теории кодирования, криптографии и других областях математики и естествознания. Одним из важнейших классов групп являются нильпотентные группы, промежуточные между абелевыми и разрешимыми группами.

Диссертация посвящена исследованию вопросов вычислимости факторгруппы нильпотентной группы без кручения по центру.

## ТҮЙІНДЕМЕ

**Бакимбаева Айгуль Таурбековна**

## ОРТАДАҒЫ НИЛЬПОТЕНТТІК ТОБЫНЫҢ ЕСЕПТЕУ ФАКТОР ТОБЫ

Қазіргі уақытта топтар теориясы алгебраның ең жоғары дамыған облысы болып табылады. Математикада көп қолдануда болатын және оның шегінде – топологияда, функия теориясында, кристаллографияда, кванттық механикада және математиканың басқа облыстарында және жаратылыстануда. Теория тобының соңғы мақсаты – бұл барлық топтық композицияларының суреттемесі.

Бүгінгі күнде есептеу ұғымы қазіргі математикада ең маңызды ұғым болып саналатыны сөзсіз. Математикалық логиканың қарқынды дамуы, математикалық есептеу теориясының дамуына әсерін тигізді. Бұл электронды есептеу машинаның құрылуына қажетті алғы шартын құрады. Бағдарламалармен берілген алгоритмдерді орындау үшін жаңа есептеу құралдарының дамуы математикаға төңкерісті ықпал жасады. Математикадағы зерттеудің маңызды бөлігіне есептеу математикасы ие болғанымен, көптеген математикалық мәселелерді алгоритмиялық шешуде жаңа құралдарды қолданумен тығыз байланысқан. Есептеу техникасының дамуы мен жетілуі математикалық теорияның алдында көптеген жаңа мақсаттар қояды. Математикалық теорияны объект ретінде зерттеу, есептеу феноменін зерттеуінің өзі қазіргі математикада бірқатар қызықты және өзекті бағыттарға әкеліп соғады. 50-жылдарда пайда болған бағыттардың бірі – конструктивті модельдердің теориясы. Бұл бағыт абстракті модельдердің алгебралық қасиеттері тәуелділігінің зерттеуімен, натуралды сандар мен алгоритмиялық және модельдердің құрылым қасиеттерінің қатынастарын зерттеу негізінде байланысты. Сонымен қатар, қазіргі математика іргетасындағы топ ұғымы, математиканың тең жақты құралы болады да күрделі алгебралықты жүйе қатарының маңызды ажырамас бөлігі ретінде әр түрлі топология қасиетінің сезгіш шағылдырғышы, көптеген жолмен және алгоритм теориясының сынау полигоны сияқты болып табылады. Маңызды класс тобы – бұл нильпотенттік топтар. Нильпотенттік топтар абелев және шешілетін топтар аралығындағы класын құрайды.

Конструктивті модель теориясының қалыптасуы қазіргі математикалық логиканың қызықты өздік бағыты сияқты А.И.Мальцевтің «Конструктивті алгебра» мақаласының пайда болуына міндетті. А.И.Мальцевқа элементарлық теорияның шешілетіні жөнінде және конструктивті модель жөнінде бірқатар маңызды нәтижелер жатады. Конструктивті модель теориясы ең жаңа проблематикаға ие болады, модель теориясы мен сан теориясы жапсарында пайда болған теория. Сол өткен кезеңде теория жаңа идеямен, әдіспен және конструкциялармен артты. Конструктивті абелев топтары А.И.Мальцевтің, Ю.Л.Ершованың, С.С.Гончарованың, В.П.Добрицаның, А.Т.Нуртазинаның, Н.Г.Хисамиеваның және т.б. авторлардың еңбектерінде зерттелген. Конструктивті нильпотенттік топтар әлі де жеткілікті зерттелген жоқ.

Қазіргі алгебрадағы теория тобы маңызды тараудың біріне жатады. Оның өте бай және мазмұнды тарихы бар. Бүгінде математиканың сол бөлігі кең және мазмұны бай ғылымға айналды, көптеген қолданысы бар, математикадағы және оның шегінде – топологияда, функция теориясында , кристаллографияда, кванттық механикада, кодтау теориясында, криптография мен математика облысында және жаратылыстануда. Ең бір маңызды класс тобының абелев және шешілетін топтар арасындағы нильпотенттік топтар болып табылады.

Диссертация орталықпен бұрандаусыз нильпотенттік тобының есептеу фактор тобының мәселелерін зертеуге арналған.

## ABSTRACT


## FACTOR-GROUP COMPUTABILITY OF THE NILPOTENT GROUP ON THE CENTER

Nowadays the theory of the groups is one of the most developing branches in algebra which is used in different areas of mathematics and behind its limits - in topology, the function theory, crystallography, the quantum mechanics and other areas of mathematics and natural sciences. Actually, the final aim of the group theory is description of all group compositions.

Nowadays the term computability becomes one of the major terms of modern mathematics. Aggressive development of mathematical logic has led to development of the mathematical computability theory. And it created necessary precondition to creation of electronic computers. Development of new computing means for carrying out algorithm programs made revolutionary influence on the mathematics as well. Calculus mathematics has taken a leading place in significant part of mathematical researches. It is closely connected with use of a new way of the algorithmic extraction of numerous mathematical problems. Development and computer facilities modernization makes new problems for the mathematical theory. Research of the computability phenomenon as object of studying of the mathematical theory has led to creation of variety of interesting and actual areas of the modern mathematics. One of these areas is the constructive model theory which appeared in 50th years. This area is connected with research of dependence of algebraic properties of abstract models on the basis of representation construction on natural numbers and studying of co-relations of algorithmic and structural properties of these models. Thus, the term group being on the base of the modern mathematics is rather equipotential tool of the mathematics itself. It is like a major component of difficult algebraic systems, like a sensitive reflector of properties of various topologies, like a proving ground for the algorithms theory. An important class of the groups is nilpotent groups. The nilpotent groups compose the class, which is intermediate between computable and solvable groups.

Formation of the constructive models theory as an interesting, independent area of the modern mathematical logic appeared owing to publishing of the article «Constructive algebras» by A. I. Maltsev. The constructive models theory has the most urgent problematic; it is the theory which appeared on a joint of the theory of models and numberings.

During this period the theory was enriched with new ideas, methods and constructions. Constructive computable groups were studied in works by A. I. Maltsev, U. L. Ershov, S. S. Goncharov, V. P. Dobrits, A. T. Nurtazin, N. G. Hisamiev, and other authors. Constructive nilpotent groups are investigated not that much.

The group theory concerns as one of the major branches of modern algebra. It has rich and substantial history. By this time this branch of mathematics turned into a science wide and rich with the maintenance. It has numerous applications, both in the

mathematics, and behind its limits - in topology, theories of functions, a crystallography, the quantum mechanics, the code theory, cryptography and other areas of mathematics and natural sciences. One of the major classes of the groups is nilpotent groups, intermediate between computable and solvable groups.

The dissertation is devoted to research of factor-group computability questions of the nilpotent group without torsion on the center.