

Содержание

Вычислительные технологии	7
Джайчибеков Н.Ж. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ	7
Калимолдаев М.Н., Дженалиев М.Т. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	11
Касенова А., Рахметуллиная С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АДАПТИВНЫХ СЕТОК	15
Касымханов С.Ж., Бакиров Ж.Б., Касымханова Д.Ж. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ВСТРЯХИВАЮЩИХ ФОРМОВОЧНЫХ МАШИН В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ	20
Корнев В.А., Григорьева С.В. ОЦЕНКА И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РИСКОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА С УЧЕТОМ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НОРМАТИВОВ	26
Коробицын В.А., Коробицын Д.В. ВИХРЕСОГЛАСОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА КОСОУГОЛЬНЫХ 2D СЕТКАХ	33
Красавин А.Л., Алонцева Д.Л. ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СПЕКТРОГРАММ РЕНТГЕНОВСКИХ ФЛЮОРЕСЦЕНТНЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ	36
Кульджабеков А.Б., Алибаева К.А., Инкарбеков М.К., Калтаев А. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ ПОСАДКИ МНОГОЯРУСНЫХ ФИЛЬТРОВ	45
Лисицкий Д.В., Дышлюк С.С., Асылханова Ж.А. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЪЕКТНО-КАРТОГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ В РЕГИОНАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ	52
Лутай С.С., Воробьев А.Л., Горячева А. А., Асылхан М.А. ПРИМЕНЕНИЕ ФИТОРЕГУЛЯТОРА ПРИРОДНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ ДЛЯ ВЫРАЩИВАНИЯ САДОВО-ПАРКОВЫХ КУЛЬТУР	58
Макарова Н.А. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ПОТОКА ПРОДУКТОВ РЕАКЦИИ В ДВУХСТУПЕНЧАТОМ УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ДЕТОНАЦИОННОГО НАПЫЛЕНИЯ	64
Матайбаева И.Е., Дьячков Б.А., Майорова Н.П., Черненко З.И. К ОЦЕНКЕ ПЕРСПЕКТИВ ДЕЛЬБЕГЕТЕЙСКОГО ОЛОВОРУДНОГО УЗЛА	68
Мизерный А., Селтманн Р., Рафаилович М., Наумов Е. ОСНОВНЫЕ МИНЕРАЛЬНЫЕ АССОЦИИ МЕСТОРОЖДЕНИЯ СЕКИСОВСКОЕ (ВОСТОЧНЫЙ КАЗАХСТАН)	71
Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ	79
Моисеева Е.С., Найманова А.Ж. СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОЗДУХА С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ВДУВОМ ВОДОРОДА	86

Мукашева Р.У., Рахметуллина Ж.Т. АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА РА- ДИАЦИОННОГО ПОТОКА В ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЕ	92
Мукимбеков М.Ж., Накибаева М.Т. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕФТЕДОБЫЧЕ	97
Мукимбеков М.Ж., Накибаева М.Т. ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГО- КОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В РАЗРАБОТКЕ ПЛАСТА	103
Мурзабеков З.Н., Айпанов Ш.А. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БОКОВЫМ ДВИ- ЖЕНИЕМ САМОЛЕТА ЗА КОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ	110
Мурзабеков З.Н., Мурзабеков А.З. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРО- ГРАММИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЙ . . .	116
Мусипова Г.Б. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА . . .	127
Нетесова В.Ю. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЕСУРСОВ ХОЗЯЙ- СТВУЮЩИХ СУБЪЕКТОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ ИХ ФИНАНСОВУЮ УС- ТОЙЧИВОСТЬ	132
Нурбаева Н.А., Ван Е.Ю., Касперская А.А., Карибаева М.К. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ	140
Нурмагамбетов А.А., Джомартова Ш.А., Мазаков Т.Ж. РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ	143
Нурсадыкова Р.К., Тезекпаева Ш.Т., Хасенова З.Т. НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ МАТЛАВ	147
Пененко А.В., Рахметуллина С.Ж. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА ПО ДАННЫМ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА	152
Ракишева З.Б., Сухенко А.С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАТЧИКОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ - ОРИЕНТАЦИИ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ	164
Сагиндыков К.М. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗИ ПОНЯТИЙ ДИСЦИПЛИН	168
Саденова М.А., Абдулина С.А., Утегенова М.Е., Акижанов Е.О., Кенетбаев Б.С. МАТЕ- МАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ НОСИ- ТЕЛЕЙ ДЛЯ КАТАЛИЗАТОРОВ	171
Сайфутдинов И.Н. ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОГРАММНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА «COMSOL MULTIPHYSICS»	174
Середович В.А., Тогузова М.М. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ЗОНИРОВАНИЯ ТЕРРИ- ТОРИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ГОРОДОВ	178
Симонов К.В., Кадена Л. ОЦЕНКА ДАННЫХ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ ШИАРЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	181
Сороковая К.Е. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И ТРАНСФОРМАЦИИ МНОГО- КОМПОНЕНТНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ	186
Старостенков М.Д., Дёмина И.А., Попова Г.В., Денисова Н.Ф. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕ- ТОДОМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ СМЕ- ЩЕНИЙ КОМПЛЕКСОВ АТОМОВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА БИМЕТАЛЛОВ NI-AL, NI-FE И PT-AL	192

Сырнев Б.В., Агапов В.А., Данилов С.Н., Абдулина С.А., Саденова М.А. РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРОГРАММ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА В МЕТАЛЛУРГИИ	203
Темирбеков А.Н. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ	206
Темирбеков Н.М. ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ «ЛОГАРИФИМИЧЕСКОЙ» РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ	211
Темирбеков Н.М., Малгаждаров Е.А., Токанова С.О. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ	215
Темирбекова Л.Н. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА	220
Тлебалдинова А.С., Денисова Н.Ф., Касымханова Д.Ж., Рақышева М.А., Байгелов К.Ж. ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ СМАЗАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ	227
Толеуханов А.Е., Панфилов М.Б., Калтаев А. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ БАКТЕРИЙ НА ОБРАЗОВАНИЕ МЕТАНА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ХРАНЕНИИ ВОДОРОДА	233
Урмашев Б.А., Данаев Н.Т., Алимжанов Е.С. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ «СКОРОСТЬ-ДАВЛЕНИЕ»	240
Урмашев Б.А., Турсынбай А.Т., Макашев Е.П. О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ (ТРЕХКАМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ФАРМАКОКИНЕТИКИ)	242
Усенова С.Б. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ПРИМЕРЕ ТОО «БИПЭК АВТО»	244
Федотов А.М., Федотова О.А. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ	249
Черный С.Г., Авдюшенко А.Ю., Чирков Д.В. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ В ГИДРОТУРБИНЕ С ЗАТВОРОМ	266
Шайдулов В.В., Щепановская Г.И., Якубович М.В. О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	275
Шеръязданов Г.Б. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКИХ СРЕД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ	284
Шокин Ю.И. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ РЕГИОНАЛЬНОГО СПУТНИКОВОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ КОРПОРАТИВНОЙ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ СО РАН	286
Юлдашев З.Х., Адылов А.А., Холмирзаев Х. СТРУКТУРА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НАПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЛЕДЖАМИ	292

УДК 533.6.011

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ

Н.Ж. Джайчибеков

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, г. Астана

Abstract. In work the approximate solution of a task on structure of shock waves is provided in gases. Changes of average sizes of density, speed and internal energy of gas along width of jump of consolidation are given. On the basis of the described model the structure of jump of consolidation in gas for a case of final number of the Move is considered.

Keywords: jump of consolidation, number of the Move

Аннотация. В работе приводится приближенное решение задачи о структуре ударных волн в газах. Приведены изменения средних величин плотности, скорости и внутренней энергии газа вдоль ширины скачка уплотнения. На основе описанной модели рассмотрена структура скачка уплотнения в газе для случая конечного числа Маха.

Ключевые слова: скачка уплотнения, числа Маха

Андатпа. Ғылыми жұмыста газдардағы соққы толқындар туралы есептің жуықталған шешімі келтіріліледі. Газ тығыздығының, жылдамдығының және ішкі энергиясының орташа шамаларының нығыздау секірісінің көлденең бойымен өзгерулері келтірілген. Құрылған модельдің негізінде нығыздау секірісінің Мах санының ақырлы шамасына арналған құрылымы қарастырылды.

Ключевые слова: нығыздау секірісі, Мах саны

В [1 - 3] рассмотрено применение в динамике разреженного газа эвристической модели течения, ранее разработанной для описания течения газа с твердыми частицами [4]. В этой модели молекулы подразделяются на 2 множества, каждое из которых описывается континуально, причем столкновения молекул из одного множества порождают напряжения и тепловые потоки в этом множестве, а столкновения молекул разных множеств приводят к переходу частиц из одного множества в другое. В указанных работах частицы одного из множеств (назовем их s-частицами) двигались упорядоченно без хаотической составляющей скорости и естественно, что все столкновения таких частиц с частицами другого множества (t-частицами) приводили к переходу s-частиц в множество хаотически движущихся t-частиц.

Достоинством этой модели является ее простота, поскольку легко подсчитать массу, импульс и энергию, переносимые частицами при таком переходе, и не требуется никаких характеристик взаимодействия частиц, кроме частоты столкновений. Применение этой модели к расчету структуры скачка уплотнения [1] и обтекания сферы разреженным газом [2, 3] показало удовлетворительную точность.

Предположение, что s-частицы движутся упорядоченно (с пренебрежимо малой хаотической составляющей скорости), ограничивает применение модели случаем гиперзвукового течения газа.

В настоящей работе дается обобщение описанной модели на случай, когда частицы обоих множеств имеют хаотическую составляющую скорости, это дает возможность использовать модель при любых числах Маха.

Как и раньше будем считать молекулы твердыми абсолютно упругими сферами и по-прежнему будем считать, что при любом столкновении частиц из разных множеств происходит переход частицы из одного множества в другое. В каждом из множеств будем считать распределение частиц по скоростям близким к максвелловскому и в соответствии с этим определять напряжения и тепловые потоки. Однако, если раньше было естественно считать, что упорядоченно движущиеся s-частицы после столкновений переходят в множество хаотически движущихся t-частиц, то теперь в случае, когда в обоих множествах есть хаотическое движение, будем считать вероятным и переход t-частиц в множество s-частиц. Обозначим β вероятность при столкновении s-частицы перейти в множество t-частиц, а вероятность t-частицы перейти в множество s-частиц, соответственно, $1-\beta$.

Вероятность перехода частиц из одного множества в другое естественно связать с интенсивностью хаотического движения частиц в соответствующем множестве, причем больше вероятность перехода в то множество, в котором больше интенсивность хаотического движения. Эту интенсивность можно характеризовать средним модулем скорости хаотического движения $c_i = \sqrt{\frac{16\rho_i}{3\pi(k-1)\rho_i}}$, где ρ - плотность i-го газа (i=s,t), k - показатель адиабаты, причем $k = 5/3$, если вращение частиц не учитывается, и $k = 4/3$, если энергия хаотического движения равномерно распределена по вращательным и поступательным степеням свободы.

Наиболее естественным является предположение, что β пропорционально c_s^t , поскольку c_s^t есть некоторый объем в пространстве скоростей, характеризующий интенсивность хаотического движения частиц, а β есть вероятность столкнувшейся частицы оказаться после столкновения в множестве t. Аналогично $1-\beta$ пропорционально c_t^s , откуда следует $\beta = \frac{c_t^3}{c_t^3 + c_s^3}$.

Рассмотрим теперь на основе описанной модели структуру скачка уплотнения в газе, следуя [1], где это сделано для случая гиперзвукового потока перед скачком. Уравнения баланса массы, импульса и энергии для s- и t-компонентов потока при континуальном описании имеют вид:

$$\frac{d}{dx}(\rho_s v_s) = -I\beta + I(1-\beta), \quad \frac{d}{dx}(\rho_t v_t) = -I\beta - I(1-\beta), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\rho_s v_s^2 + p_s - \frac{4}{3} \mu_s \frac{dv_s}{dx} \right) = -I\beta \left(v_s + \frac{\rho_s}{\rho_s v_s} \right) + I(1-\beta) \left(v_t + \frac{\rho_t}{\rho_t v_t} \right), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\rho_t v_t^2 + p_t - \frac{4}{3} \mu_t \frac{dv_t}{dx} \right) = -I\beta \left(v_s + \frac{\rho_s}{\rho_s v_s} \right) + I(1-\beta) \left(v_t + \frac{\rho_t}{\rho_t v_t} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\rho_s v_s \left(U_s + \frac{v_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s} \right) - \frac{4}{3} \mu_s v_s \frac{dv_s}{dx} - \frac{\lambda_s}{c_v} \frac{dU_s}{dx} \right] \left(\rho_s v_s^2 + p_s - \frac{4}{3} \mu_s v_s \frac{dv_s}{dx} \right) = \\ = -I\beta \left(v_s + \frac{p_s}{\rho_s v_s} \right) + I(1-\beta) \left(v_t + \frac{p_t}{\rho_t v_t} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\rho_t v_t \left(U_t + \frac{v_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t} \right) - \frac{4}{3} \mu_t v_t \frac{dv_t}{dx} - \frac{\lambda_t}{c_v} \frac{dU_t}{dx} \right] \left(\rho_t v_t^2 + p_t - \frac{4}{3} \mu_t v_t \frac{dv_t}{dx} \right) = \\ = I\beta \left(v_s + \frac{p_s}{\rho_s v_s} \right) - I(1-\beta) \left(v_t + \frac{p_t}{\rho_t v_t} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ, v - плотность и скорость компонентов (индекс указывает соответствующий компонент), U - кинетическая энергия хаотического движения молекул, c_ν - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, I - масса молекул одного множества, столкнувшихся с молекулами другого множества в единичном объеме в единицу времени. Приближенно будем полагать

$$I = \frac{\pi d^2}{m} \rho_s \rho_t \sqrt{(v_s - v_t)^2 + c_s^2 + c_t^2} \quad (6)$$

Здесь m – масса молекул, d – их диаметр; μ, λ - вязкость и теплопроводность компонентов, которые могут быть определены как для газа из твердых сфер. Для каждого из компонентов считается справедливым уравнение состояния

$$p_i = (k - 1) \rho_i U_i, \quad (7)$$

Для расчета структуры скачка с помощью приведенных уравнений сформулируем граничные условия:

$$\text{при } x \rightarrow -\infty, \quad v_s \rightarrow v_{s-}, \quad \rho_s \rightarrow \rho_{s-}, \quad \rho_t \rightarrow \rho_{t-}, \quad U_s \rightarrow U_{s-}, \quad \rho_t \rightarrow 0;$$

$$\text{при } x \rightarrow +\infty, \quad v_t \rightarrow v_{t+}, \quad \rho_t \rightarrow \rho_{t+}, \quad \rho_s \rightarrow \rho_{s+}, \quad U_t \rightarrow U_{t+}, \quad \rho_s \rightarrow 0;$$

Вследствие сохранения массы, импульса и энергии потока должны выполняться условия динамической совместности:

$$\frac{v_{t+}}{v_{s-}} = \frac{\rho_{s-}}{\rho_{t+}} = \frac{2}{(k+1)M^2} + \frac{k-1}{k+1}, \quad \frac{p_{t+}}{p_{s-}} = \frac{2kM^2}{k+1} - \frac{k-1}{k+1},$$

где $M = \frac{v_{s-}}{\sqrt{\frac{k p_{s-}}{\rho_{s-}}}}$ - число Маха потока перед скачком.

В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным, взяв за масштабы скорости, плотности и длины соответственно $v_{s-}, \rho_{s-}, \frac{m}{\pi d^2 \rho_{s-}}$ и сохранив прежние обозначения.

Сначала будем считать оба компонента невязкими и нетеплопроводными, положив $\mu_s = \mu_t = 0$ $\lambda_s = \lambda_t = 0$ Тогда уравнения (1) – (5) можно записать в виде

$$\frac{dA_s}{dx} = I(1 - 2\beta), \quad \frac{dA_t}{dx} = I(2\beta - 1); \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx}(A_s B_s) = I[(1 - \beta)B_t - \beta B_t], \quad \frac{d}{dx}(A_t B_t) = I[\beta B_t - (1 - \beta)B_t]; \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx}(A_s C_s) = I[(1 - \beta)C_t - \beta C_t], \quad \frac{d}{dx}(A_t C_t) = I[\beta C_t - (1 - \beta)C_t]; \quad (10)$$

где

$$A_s = \rho_s v_s, \quad A_t = \rho_t v_t, \quad B_s = v_s + \frac{p_s}{\rho_s v_s}, \quad B_t = v_t + \frac{p_t}{\rho_t v_t}, \quad C_s = U_s + \frac{v_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho_s}, \quad C_t = U_t + \frac{v_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho_t}$$

Складывая попарно уравнения (8), (9) и (10), легко получить после интегрирования и определения констант из граничных условий

$$A_s + A_t = \text{const} = 1, \quad A_s B_s + A_t B_t = \text{const} = 1 + \frac{1}{kM^2}, \quad A_s C_s + A_t C_t = \text{const} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(k-1)M^2}$$

Из решения уравнений (8 – 10) можно получить, что B_s, B_t, C_s, C_t не зависят от x , постоян-

ными также являются v_s, v_t, U_s, U_t и зависящие от них c_s, c_t, β , а изменяются только плотности компонент ρ_s, ρ_t и зависящие от них p_s, p_t, I . Из первого уравнения (8) имеем $\frac{d\rho_s}{dx} = -D\rho_s(1 - \rho_s)$ откуда, выбрав за начало отсчета x точку, где $\rho_s = 0.5$, имеем $\rho_s = \frac{1}{1+e^{Dx}}$, а из второго уравнения (8) получим $\rho_t = \frac{e^{Dx}\rho_{t+}}{1+e^{Dx}}$. Здесь обозначено

$$D = (2\beta - 1) \sqrt{(M^2 - 1)^2 + \frac{4}{\pi k} \left((kM^2 + 1)^2 = k(M^2 - 1)^2 \right) / \left(\frac{k-1}{2} M^2 + 1 \right)} \quad (11)$$

То обстоятельство, что скорости и внутренние энергии компонент в соответствии с полученным решением не зависят от x , приводит к тому, что их вязкость и теплопроводность не существенны и полученное решение справедливо и для вязкого теплопроводного газа. Тогда средние значения плотности, скорости и энергии по смеси будут

$$\bar{\rho} = \rho_s + \rho_t = \frac{1}{1 + e^{Dx}} \left(1 + e^{Dx} \frac{M^2(k+1)}{2 + M^2(k-1)} \right)$$

$$\bar{v} = \frac{\rho_s v_s + \rho_t v_t}{\bar{\rho}} = \frac{1 + e^{Dx}}{1 + e^{Dx} \frac{M^2(k+1)}{2 + M^2(k-1)}}$$

$$\bar{U} = \frac{\rho_s U_s + \rho_t U_t}{\bar{\rho}} = \frac{\left[\frac{1}{k(k-1)M^2} + \frac{e^{Dx}}{2k} \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{1}{H} \right) \right]}{1 + e^{Dx} H}$$

Таким образом, можно считать приведенную двухкомпонентную модель потока из твердых частиц, а также исходную четырехкомпонентную модель газозвеси [4] применимой даже в тех случаях, когда путь свободного пробега частиц сравним с газодинамическим масштабом. Более того, не исключено, что представления, положенные в основу построения этих моделей, будут полезны в аэродинамике разреженных газов при рассмотрении переходных режимов от сплошной среды к свободномолекулярному обтеканию.

Список литературы

- [1] 1. Матвеев С.К., Кочерыженков Г.В. Структура ударных волн в газах и газозвесях. // Сб. Динамические процессы в газах и твердых телах. Л., 1990. С. 28 – 36.
- [2] Джайчибеков Н.Ж., Матвеев С.К. Применение трехкомпонентной модели к расчету обтекания тел газозвесью и разреженным газом. Журнал ПМТФ. СО АН СССР, Новосибирск, 1991, №1, – С. 39-42.
- [3] Матвеев С.К., Джайчибеков Н.Ж. Расчет обтекания сферы разреженным газом при произвольном числе Кнудсена. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Санкт-Петербург. 1992. сер.1, вып.2. (№8) – С. 77-81.
- [4] Матвеев С.К. Математическое описание обтекания тел потоком газозвеси с учетом влияния отраженных частиц. // Сб. Движение сжимаемых жидкостей и неоднородных сред. Л., 1982. Вып.7. С. 189 – 201.

УДК 517.977.1/5; 517.958:52/59

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.Н. Калимолдаев, М.Т. Дженалиев

Институт проблем информатики и управления, г. Алматы

Аннотация. В данной работе решена задача синтеза управления для электроэнергетической системы. При этом использованы конструкции метода функций Беллмана-Кротова в форме необходимых и достаточных условий оптимальности [1, 2].

Ключевые слова: оптимальность, электроэнергетическая система

Постановка задачи. Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = 0.5 \sum_{i=1}^l \int_0^T (k_i y_i^2 + r_i u_i^2) dt + \Lambda(x(T), y(T)), \quad (1)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= y_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\lambda_i y_i - f_i(x) + b_i u_i, \\ x_i(t_0) &= x_{i0}, \quad y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = \overline{1, l}, \quad t \in (t_0, T), \\ x(t), y(t) &: (t_0, T) \rightarrow R^l, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_i \in R^1$ — скалярное управление; $f_i(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор функция, удовлетворяющая условию интегрируемости:

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i}, \quad \forall i \neq k; \quad (3)$$

моменты времени t_0, T будем считать заданными; r_i, λ_i, k_i — положительные постоянные; терминальные значения $x(T), y(T)$ заранее неизвестны.

Проблема синтеза для задачи Коши (1)–(3) крайне важна в задачах оптимизации работы электроэнергетических систем.

Основная лемма. Следуя формализму Беллмана-Кротова [1, 2], покажем справедливость следующей леммы.

Лемма. Для того чтобы управление $u_i^0(y_i) = -\frac{b_i}{r_i} y_i, i = \overline{1, l}$ и соответствующее решение системы (2)–(3) $\{x(t), y(t)\}$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы

$$K(x(T), y(T)) = \Lambda(x(T), y(T)), \quad k_i = 2\lambda_i + \frac{b_i^2}{r_i}, \quad i \in \overline{1, l},$$

$$K(x, y) = 0.5 \sum_{i=1}^l y_i^2 - \sum_{\substack{i=1, \\ x_j=0, j>i}}^l \int_0^{x_i} f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_l) d\xi_i \quad (4)$$

функция Беллмана-Кротова, причем,

$$J(u^0) = \min_u J(u) = K(x(t_0), y(t_0)).$$

Задача оптимального управления мощностью паровых турбин. Одной из моделей, описывающей переходные процессы в электрической системе, является следующая система дифференциальных уравнений [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_i}{dt} &= S_i, \quad H_i \frac{dS_i}{dt} = -D_i S_i - E_i^2 Y_{ii} \sin \alpha_{ii} - P_i \sin(\delta_i - \alpha_i) - \\ &- \sum_{j=1, j \neq i}^l P_{ij} \sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) + u_i, \quad i \in \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \\ \delta_{ij} &= \delta_i - \delta_j, \quad P_i = E_i U Y_{i, n+1}, \quad P_{ij} = E_i E_j Y_{ij}, \end{aligned} \quad (5)$$

где δ_i — угол поворота ротора i -го генератора относительно некоторой синхронной оси вращения (ось вращения шин постоянного напряжения, которая совершает вращение со скоростью 50 об./сек.; S_i — скольжение i -го генератора; H_i — постоянная инерции i -й машины; $u_i = P_i$ — механические мощности, которые подводятся к генератору; E_i — ЭДС i -й машины; Y_{ij} — взаимная проводимость i -й и j -й ветвей системы; $U = \text{const}$ — напряжение на шинах постоянного напряжения; $Y_{i, n+1}$ — характеризует связь (проводимость) i -го генератора с шинами постоянного напряжения; $D_i = \text{const} \geq 0$ — механическое демпфирование; α_{ij} , α_i — постоянные величины, учитывающие влияние активных сопротивлений в статорных цепях генераторов.

Сложность анализа модели (5) заключается в учете α_{ij} , $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Так как при этом $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$, то модель (5) не является консервативной; не удастся построить для нее функции Ляпунова в форме первого интеграла. Систему принято называть позиционной моделью.

Пусть переменные состояния и управления в установившемся после аварийном режиме равны:

$$S_i = 0, \quad \delta_i = \delta_i^F, \quad u_i = u_i^F, \quad i = \overline{1, l}. \quad (6)$$

Для получения системы возмущенного движения перейдем к уравнениям в отклонениях, полагая:

$$S_i = \Delta S_i, \quad \delta_i = \delta_i^F + \Delta \delta_i, \quad u_i = u_i^F + \Delta u_i, \quad i = \overline{1, l}. \quad (7)$$

Далее, для удобства переменные Δu_i , $\Delta \delta_i$, ΔS_i заново обозначая через u_i , δ_i , S_i , из (6) получим:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = S_i, \quad \frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{H_i} [-D_i S_i - f_i(\delta_i) - N_i(\delta) + M_i(\delta) + u_i], \quad i = \overline{1, l}, \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_i(\delta_i) &= P_i [\sin(\delta_i + \delta_i^F - \alpha_i) - \sin(\delta_i^F - \alpha_i)], \\ N_i(\delta) &= \sum_{j=1, j \neq i}^l \overline{N}_{ij}(\delta_1, \dots, \delta_l) = \sum_{j=1, j \neq i}^l \Gamma_{ij}^1 [\sin(\delta_{ij} + \delta_{ij}^F) - \sin \delta_{ij}^F], \\ M_i(\delta) &= \sum_{j=1, j \neq i}^l \overline{M}_{ij}(\delta_1, \dots, \delta_l) = \Gamma_{ij}^2 [\cos(\delta_{ij} + \delta_{ij}^F) - \cos \delta_{ij}^F], \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij}^1 = P_{ij} \cos \alpha_i, \Gamma_{ij}^2 = P_{ij} \sin \alpha_i, P_{ij} = P_{ji}, \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, k = 1, 2.$$

Управление будем искать в виде:

$$u_i = \nu_i - M_i(\delta), i = \overline{1, l}, \text{ где функция } \nu_i \text{ подлежит определению.} \quad (9)$$

Требуется минимизировать функционал

$$J(\nu) = J(\nu_1, \dots, \nu_l) = 0.5 \sum_{i=1}^l \int_0^T (w_{si} S_i^2 + w_{\nu i} \nu_i^2) dt + \Lambda(\delta(T), S(T)), \quad (10)$$

при условиях (8)–(9), где w_{si} , $w_{\nu i}$ – положительные постоянные весовые коэффициенты; $f_i(\delta_i)$ – 2π -периодическая непрерывно дифференцируемая функция; $N_i(\delta)$ – 2π -периодическая непрерывно дифференцируемая функция относительно δ_{ij} ; для $N_i(\delta)$ выполняется условие интегрируемости типа (3); T – длительность переходного процесса, считается заданной. Кроме того, заданы начальные условия:

$$\delta_i(0) = \delta_{i0}, S_i(0) = S_{i0}, i = \overline{1, l}, \quad (11)$$

а величины $\delta_i(T)$, $S_i(T)$ являются неизвестными.

На основе леммы получаем

Теорема. Для того чтобы управление $\nu_i^0 = -S_i/w_{\nu i}$, $i = \overline{1, l}$ и соответствующее решение $\{\delta^0, S^0\}$ системы (8) было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Lambda(\delta(T), S(T)) = K(\delta(T), S(T)), \quad w_{si} = 2D_i + 1/w_{\nu i} > 0, i = \overline{1, l},$$

$$K(\delta, S) = 0.5 \sum_{i=1}^l \left[H_i S_i^2 + \int_0^{\delta_i} f_i(\delta_i) d\delta_i \right] + \sum_{\substack{i=1, \\ \delta_j=0, j>i}}^l \int_0^{\delta_i} N_i(\delta_1, \dots, \delta_{i-l}, \xi_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_l) d\xi_i$$

– функция Беллмана-Кротова, причем,

$$J(\nu^0) = \min_{\nu} J(\nu) = K(\delta^0, S^0). \quad (12)$$

Заметим, что при доказательстве теоремы предположения (9) из леммы принимают вид:

$$K_{\delta_i} S_i = \frac{K_{S_i}}{H_i} [f_i(\delta_i) + N_i(\delta)], \text{ т.е. } K_{S_i} = H_i S_i, K_{\delta_i} = f_i(\delta_i) + N_i(\delta), i = \overline{1, l}. \quad (13)$$

Численный пример. Оптимальное управление движением двухмашинной электро-энергетической системы. В системе (5) принимаем $i = 1, 2$, и предполагаем, что механическое демпфирование отсутствует, т.е. коэффициенты D_1 , D_2 равны нулю. Согласно соотношений (5)–(11) задача оптимального управления принимает вид [5]:

$$J(u) = J(u_1, u_2) = 0.5 \sum_{i=1}^2 \int_0^T (S_i^2 + 0.1 \nu_i^2) dt + 0.5[\delta^2(T) + S^2(T)], \quad (14)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = S_i, \quad \frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{H_i} [-f_i(\delta_i) - N_1(\delta) + \nu_i], i = 1, 2, \quad (15)$$

где $f_i(\delta_i) = P_i[\sin(\delta_i + \delta_i^F - \alpha_i) - \sin(\delta_i^F - \alpha_i)]$, $i = 1, 2$, $N_1(\delta) = \Gamma_1[\sin(\delta_{12} + \delta_{12}^F) - \sin \delta_{12}^F]$, $M_1(\delta) = \Gamma_2[\cos(\delta_{12} + \delta_{12}^F) - \cos \delta_{12}^F]$, $\delta_{12}^F = \delta_1^F - \delta_2^F$, $\Gamma_1 = P_{12} \cos \alpha_{12}$, $\Gamma_2 = P_{12} \sin \alpha_{12}$, $\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2$, $\delta_{21} = -\delta_{12}$.

Числовые данные системы (15):

$$\alpha_1 = -0.052; \alpha_2 = -0.104; H_1 = 2135; H_2 = 1256; P_1 = 0.85;$$

$$P_2 = 0.69; P_{12} = 0.9; \delta_1^F = 0.827; \delta_2^F = 0.828; \alpha_{12} = -0.078;$$

и начальные данные:

$$\delta_1(0) = 0.18; \delta_2(0) = 0.1; S_1(0) = 0.001; S_2(0) = 0.002. \quad (16)$$

Согласно формулы (12) функция Беллмана-Кротова и ее частные производные будут иметь вид:

$$K(\delta, S) \approx 1067.5S_1^2 + 628S_2^2 + 2.004 - \cos(\delta_1 + 0.879) - 0.77\delta_1 - \cos(\delta_2 + 0.932) - 0.83\delta_2,$$

$$K_{\delta_1}(\delta, S) = 0.425[\sin(\delta_1 + 0.879) - \sin 0.879] + 0.9 \sin(\delta_1 - \delta_2),$$

$$K_{\delta_2}(\delta, S) = 0.345[\sin(\delta_2 + 0.932) - \sin 0.932] + 0.9 \sin(\delta_1 - \delta_2),$$

$$K_{S_1}(\delta, S) = 2135S_1, \quad K_{S_2}(\delta, S) = 1256S_2.$$

Управления по принципу обратной связи (синтез) определяются по формулам:

$$\nu_1^0(\delta, S) = -S_1, \quad \nu_2^0(\delta, S) = -S_2, \quad (17)$$

при этом использовано предположение (13).

Результаты численного расчета оптимальной пары вектор-функций состояние-управление

$$\{\delta^0(t), S^0(t); \nu^0(t) = \nu^0(\delta^0(t), S^0(t))\}$$

получены из соотношений (15)–(17), которые отражены на рисунках 1 и 2.

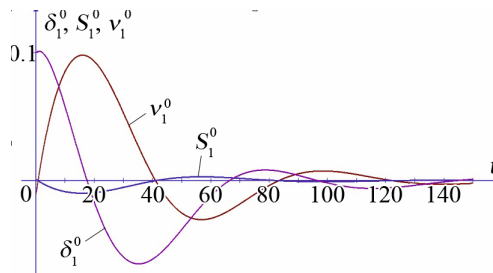


Рисунок 1 Результаты численного расчета

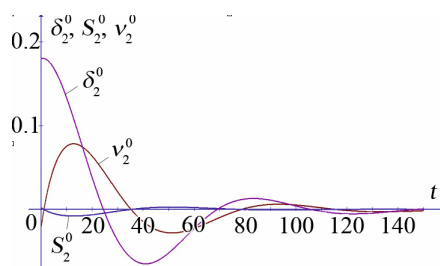


Рисунок 2 Результаты численного расчета

Список литературы

- [1] *Krotov V.F.* Global methods in optimal control theory. M.Dekker. – 1996. 399p.
- [2] *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления.- М.Физматлит. 1997. 288с.
- [3] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 896с.
- [4] *Blekhman I.I., Fradkov A.L.* On general definitions of synchronization// In: Selected topics in vibrational mechanics. Ed. I.I. Blekhman, Singapore, World Scientific. 2004. P.179-188.
- [5] *Горев А.А.* Переходные процессы синхронной машины. М.:Наука, Ленинградск. отд-ние, 1985. 502с.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АДАПТИВНЫХ СЕТОК

А. Касенова, С. Рахметуллина

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

Summary. In this article approach of the solution of a problem of heat conductivity with use of a method of adaptive grids is offered. As in the course of a heat transfer in two-layer materials from an influence source the function characterizing temperature, undergoes strong changes near influence area, use of adaptive grids is one of optimum approaches at the solution of such tasks. For calculations the method of final differences, the scheme a predictor - the proofreader on a uniform motionless grid and on an adaptive grid, and also a pro-race method is used.

Keywords: Adaptive grids, pro-race method, differential scheme

Аңдатпа. Мақалада адаптивті торлар әдісін пайдаланып жылуөткізгіштік есебін шешу жолдары ұсынылған. Екіқабатты материалдардағы жылу тасымалдау үдерісінде әсер ету ошағынан температураны сипаттайтын функция, әсер ету аймағы маңында қатты өзгерістерге ұшырайтындықтан, адаптивті торларды пайдалану мұндай есептерді шешуде ең тиімді әдістердің бірі болып табылады. Есептеулер үшін ақырғы айырымдар әдісі, бірқалыпты жылжымайтын тордағы және адаптивті тордағы предиктор-корректор сызбасы, сонымен қатар қуалау әдісі қолданылады.

Кілттік сөздер: Адаптивті торлар, қуалау әдісі, айырымдық сызба

Аннотация. В данной статье предложен подход решения задачи теплопроводности с использованием метода адаптивных сеток. Поскольку в процессе теплопередачи в двухслойных материалах от источника воздействия функция, характеризующая температуру, претерпевает сильные изменения вблизи области воздействия, то использование адаптивных сеток является одним из оптимальных подходов при решении такого рода задач. Для расчетов используется метод конечных разностей, схема предиктор - корректор на равномерной неподвижной сетке и на адаптивной сетке, а также метод прогонки.

Ключевые слова : Адаптивные сетки, метод прогонки, разностная схема

Введение. Задача математического и компьютерного моделирования процессов теплопроводности в двухслойных материалах в зависимости от параметров воздействия дает возможность прогнозировать, какие именно структуры и фазы формируются в материалах в зависимости от достигаемых в процессе воздействия температур. На основе результатов моделирования можно выбирать параметры воздействия так, чтобы формировать достаточно высокие температуры на границе покрытия с подложкой для ускорения диффузионных процессов с целью улучшения адгезии покрытия к подложке.

При математическом моделировании процессов теплопроводности используются численные методы, и одним из методов является метод конечных разностей. При использовании этого метода в рассматриваемой области строят сетку по времени и пространству и находят решение поставленной задачи на дискретной области. [6]

В данной статье рассматривается подход решения задачи теплопроводности с использованием метода адаптивных сеток. Преимущество данного подхода заключается в том, что на адаптивных сетках с небольшим количеством узлов можно добиться такой же точности решения, как на регулярных сетках с очень большим числом узлов. В двухслойных материалах в точках воздействия источника градиент температуры значительно выше, чем вдали от источника и использование метода адаптивных сеток позволяет адаптироваться расчетной сетке под поведение искомой функции, чем больше градиент функции, тем гуще сетка. В результате получаются не просто криволинейные сетки, а сетки, которые приспособляются к процессу изменения температуры на рассматриваемой области.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую постановку задачи теплопроводности. Удельный тепловой поток на расстоянии r от точки пересечения оси симметрии пучка с поверхностью образца задается выражением (1)

$$q(r) = q_{max} \cdot \exp(-k \cdot r^2), \quad (1)$$

где $q_{max} = \frac{k \cdot N}{\pi}$; N - мощность пучка; $N = U_k \cdot I$; U_k - катодное напряжение; I - сила тока пучка; k - коэффициент сосредоточенности теплового потока; $k = \frac{1.125}{R_\pi^2}$

Характер теплообмена с окружающей средой на ненагреваемой плоскости подложки и торцах образца мало сказывается на распределении температур в зоне контакта подложки и покрытия, и мы моделируем образец бесконечной пластиной толщины h , лежащей на поверхности полупространства, заполненного веществом с заданными теплофизическими характеристиками.

Считаем, что в момент времени $t_0 = \frac{x_0}{v}$ на поверхности начинает действовать нормально-круговой источник, центр которого движется равномерно со скоростью v по оси X , и выключается в момент времени $t_1 = -t_0$, причем моменту времени $t = 0$ соответствует прохождение центром пучка точки с координатами $(0,0)$

Поскольку нагрев происходит в вакууме, мы полагаем, что единственным механизмом тепловых потерь с нагреваемой поверхности покрытия является тепловое излучение, описываемое уравнением Стефана-Больцмана

$$p = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4, \quad (2)$$

где p - поверхностная плотность мощности излучения ($\frac{Bm}{m^2}$); σ - постоянная Стефана-Больцмана; ε - коэффициент черноты для материала покрытия.

Таким образом, необходимо найти функции $T_1(x, y, z, t)$ (температура покрытия) и $T_2(x, y, z, t)$ (температура подложки), определенные в областях S_1 и S_2 соответственно. Область S_1 определяется неравенствами $0 \leq z < h, t_0 \leq t \leq t_1$, а область S_2 неравенствами $h \leq z < \infty$ и $t_0 \leq t \leq t_1$ для обеих областей $x \in (-\infty, \infty)$ и $y \in (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим точку P , принадлежащую поверхности двухслойного материала, тогда уравнение теплопроводности описывается выражениями (3) и (4):

$$\rho_1 \cdot C_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial r}), \quad (3)$$

$$\rho_2 \cdot C_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\lambda_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r}). \quad (4)$$

Где $r = \sqrt{(X_c(t) - x)^2 + y^2}$ - расстояние от точки P до центра нормально-кругового источника $X_c(t) = X_0 + v \cdot t$, $\lambda_1 = \lambda_1(T)$, $\lambda_2 = \lambda_2(T)$ коэффициенты теплопроводности материала покрытия и подложки, соответственно, рассматриваемые как функции от температуры, $C_1 = C_1(T)$ и $C_2 = C_2(T)$ - удельные теплоемкости материала покрытия и подложки соответственно, также рассматриваемые как функции температуры, ρ_1 и ρ_2 плотности материалов покрытия и подложки (константы).

Задача (3)-(4) решается при следующих начальных и краевых условиях,

начальные условия:

$T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = T^0$, где T^0 начальная температура образца;

краевые условия:

при

$$z = 0, \lambda_1((T_1)_p) \cdot \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right)_p = q_{max} \cdot \exp(-k \cdot r^2) - \sigma \cdot \varepsilon \cdot ((T_1)_p)^4, \quad (5)$$

где $(T_1)_p = T_1(x, y, 0)$ и $\left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right)_p$ соответственно значения температуры и нормальной производной температуры в точке, k - коэффициент сосредоточенности, связанный с радиусом пучка, σ - постоянная Стефана-Больцмана, ε - коэффициент черноты для материала покрытия. [4]

Численное решение. Схема предиктор-корректор на равномерной сетке.

Рассмотрим одномерную по пространству задачу, при вычислении значений функций $\lambda_1(T)$ и $\lambda_2(T)$ используем полиномиальную интерполяцию по табличным значениям коэффициентов теплопроводности никеля и железа, то есть, считаем, что на каждом шаге по времени коэффициент теплопроводности является константой.

Для численного решения поставленной задачи рассмотрим схему предиктор-корректор на равномерной неподвижной сетке с узлами $x_j = jp$ и шагом $p > 0$.

Уравнения (3), (4), (5) запишем в виде

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{r} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2},$$

$$T_i(x, 0) = T^0, \quad , i = 1, 2 \quad (6)$$

$$\lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} = q_{max} \exp(-kr^2) - \sigma \varepsilon T_1^4 \quad x = 0$$

Введем обозначение $\mu_i = \frac{\lambda_i}{r \rho_i c_i}$, тогда первое уравнение системы (6) примет вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} - \mu_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = 0, i = 1, 2. \quad (7)$$

Аппроксимируем уравнение (7) явной схемой предиктор-корректор, которая на неподвижной равномерной сетке имеет вид:

$$\frac{T_{ij+1/2}^* - \frac{1}{2}(T_{ij+1}^n + T_{ij}^n)}{\tau/2} - \mu_i \frac{T_{ij-1}^n - 2T_{ij}^n + T_{ij+1}^n}{h^2} = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (8)$$

$$\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\tau} - \mu_i \frac{T_{ij-1/2}^* - 2T_{ij}^* + T_{ij+1/2}^*}{h^2} = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (9)$$

На шаге предиктор вычисляются вспомогательные величины $T_{ij+1/2}^*$, определенные в узлах с полуцелыми индексами. На шаге корректор вычисляются искомые величины T_{ij}^{n+1} . [2]

Схема предиктор-корректор на подвижной сетке. Для того чтобы построить схему на подвижной сетке надо переписать задачу в новых координатах, связанных с исходными координатами гладким преобразованием

$$x = x(q, t), 0 \leq q \leq 1, 0 \leq t \leq T \quad (10)$$

с положительным якобианом $J(q) = x_q$, взаимнооднозначно отображающим единичный отрезок $[0, 1]$ на область решения. В новых переменных уравнение (7) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} - \frac{\mu_i}{J} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial T_i}{\partial q} \right) = 0 \quad (11)$$

Аппроксимируем уравнение (11) явной схемой предиктор-корректор, которая на подвижной равномерной сетке имеет вид:

$$\frac{T_{ij+1/2}^* - \frac{1}{2}(T_{ij+1}^n + T_{ij}^n)}{\tau/2} - \frac{\mu_i}{J_{j+1/2}^n h} \left(\frac{T_{iqj+1/2}^n}{J_{j+1/2}^n} - \frac{T_{iqj-1/2}^n}{J_{j-1/2}^n} \right) = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (12)$$

$$\frac{T_{ij+1}^n + T_{ij}^n}{\tau} - \frac{\mu_i}{J_{j+1/2}^n h} \left(\frac{T_{iqj+1/2}^*}{J_{j+1/2}^n} - \frac{T_{iqj-1/2}^*}{J_{j-1/2}^n} \right) = 0, i = 1, 2; j = 0, \dots, N-1 \quad (13)$$

$$J_{j+1/2}^n = x_{q,j+1/2}^n = \frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{h},$$

$$T_{iq,j+1/2}^n = \frac{T_{ij+1}^n - T_{ij}^n}{h},$$

$$T_{iq,j+1/2}^* = \frac{T_{ij+1}^* - T_{ij}^*}{h},$$

Применим к решению поставленной задачи (6) метод адаптивных сеток.

Алгоритм метода адаптивных сеток. Алгоритм метода адаптивных сеток заключается в следующем:

1) на первом шаге по времени берется равномерная сетка на отрезке с шагом $h = 1/N, x_j^0$ - узлы этой сетки. Выполняется решение задачи методом предиктор-корректор на равномерной сетке.[1]

2) строится управляющая функция

$$w_{j+1/2} = 1 + \alpha_1 \left| \frac{T_{ij+1}^n T_{ij}^n}{h_{j+1/2}^n} \right|.$$

3) Для определения координат узлов новой сетки x_j^{n+1} методом прогонки решается задача:

$$\frac{1}{h} \left(w(x_{j+1/2}) \frac{x_{j+1} - x_j}{h} - w(x_{j-1/2}) \frac{x_j - x_{j-1}}{h} \right) = 0, j = 1, \dots, N-1,$$

$$x_0 = 0, x_N = l$$

4) на построенной сетке x_j^{n+1} находится решение разностной задачи, на адаптивной сетке выполняется решение задачи методом предиктор-корректор на подвижной сетке [1].

Компьютерная реализация. Численный алгоритм методом предиктор-корректор реализован программно в среде объектно-ориентированного программирования Visual Studio 2010 на языке C#. Данные, полученные в результате работы системы, отображающие распределение температурного поля, в виде графика представлены на рисунке 1.

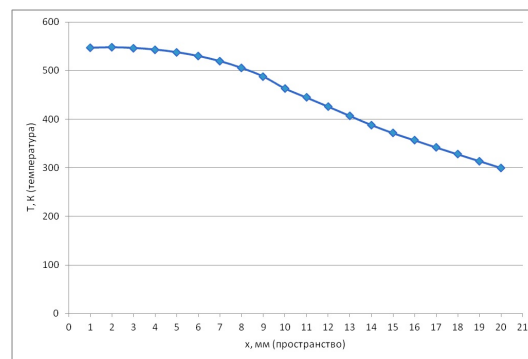


Рисунок 1 Распределение температурного поля в образце

Для расчета процесса формирования температурного поля была введена сетка 20 шагов по пространству и 20 шагов по времени, начальная температура была равна 300К при мощности 1500 Вт и времени воздействия на материал 60 секунд была смоделирована температура в 540 К,

Произведены расчеты на адаптивной сетке, которые согласуются с экспериментальными данными [4].

Вывод. В данной статье предложено решение задачи теплопроводности с использованием метода адаптивных сеток. Решение применено для расчетов температурных полей, образующихся при нагреве двухслойных металлических поглотителей (защитных никелевых покрытий на стальных подложках). Расчетные температурные профили позволяют прогнозировать достижение заданных температур на поверхности покрытия и на границе покрытия с подложкой при использовании определенных параметров источника (мощности, времени воздействия).

Список литературы

- [1] Разностные схемы на адаптивных сетках: Часть 1. Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И. // Задачи для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Новосибирск. 2005.
- [2] МО монотонизации явной схемы предиктор-корректор. Шокин Ю.И., Сергеева Ю.В., Хакимзянов Г.С. // Вестник КазНУ. Серия: Математика, механика, информатика. - Алматы, 2005. - N 2. - С.103-114.
- [3] Метод адаптивных сеток в одномерных нестационарных задачах конвекции-диффузии. Дегтярев Л.М., Иванов Т.С. // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, №7.
- [4] Modification of Ni -Based Plasma Detonation Coatings by a Low-Energy DC E-beam. Darya Alontseva, Alexander Krasavin, Alexander Pogrebnyak, Alyona Russakova. // Acta Physica Polonica A, 2013, Vol. 123, No 5, P.867-870.
- [5] Моделирование термодинамических процессов / Б.М. Каганович, С.ТТ. Филиппов, Е.Г. Анциферов. — Новосибирск: ВО "Наука". Сибирская издательская фирма, 1993. — 101 с. ISBN 5—05—030314
- [6] Расчет температурного поля при лазерном облучении слоистого композита. Евтушенко А.А., Иваник Е.Г., Матысяк Я. // Инженерно-физический журнал. - 1999. - Т. 72, №1. - 132-137.

УДК 621.744

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ВСТРЯХИВАЮЩИХ ФОРМОВОЧНЫХ МАШИН В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

С.Ж. Касымханов, Ж.Б. Бакиров, Д.Ж. Касымханова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева
Карагандинский государственный технический университет им. Е.А. Букетова

Аннотация. В статье предложена обобщенная динамическая модель встряхивающих формовочных машин, в которой детали формовочной машины и уплотняемая смесь представлены

как элементы единой реомеханической модели. Приведен алгоритм моделирования работы встряхивающей формовочной машины с использованием компьютера.

Ключевые слова: встряхивающая формовочная машина

Обособленное изучение работы основных механизмов формовочной машины и процессов уплотнения форм позволяет создать работоспособные механизмы и машины, но не может решать задачи оптимизации этих объектов как технологических систем.

Для решения этой задачи надо разработать динамическую модель объекта, включающую в себя динамическую модель всех взаимодействующих частей, а также модель осуществляемых на машине технологических процессов. Наличие такой модели позволяет построить математическую модель исследуемых процессов и проводить компьютерные эксперименты с целью выбора оптимальных параметров механической системы и технологического процесса, то есть проводить имитационное моделирование.

Исходя из вышеизложенного предложена обобщенная динамическая модель встряхивающих формовочных машин (ВФМ), в которой детали и узлы формовочной машины, оснастка и уплотняемая смесь представлены как элементы единой реомеханической модели (рисунок 1).

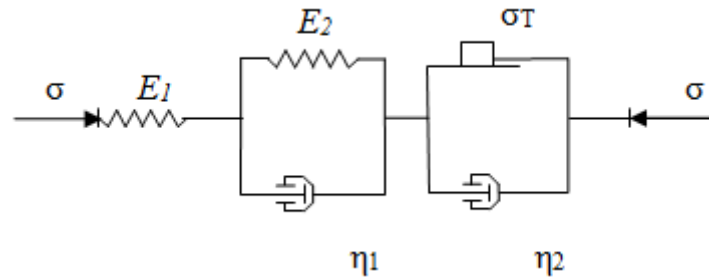


Рисунок 1 Динамическая модель встряхивающей формовочной машины

Эта модель включает четыре жестких инерционных элемента, последовательно соединенных упругодиссипативными элементами. Масса m_1 означает массу фундамента машины, а c_1 , b_1 моделируют упругодиссипативные свойства подушки фундамента и подстилающего грунта; m_2 – масса станины, а c_2 , b_2 объединяет упругодиссипативные свойства станины и амортизирующих элементов, посредством которых она установлена на фундамент (если таковые имеются). Масса m_3 соответствует массе стола с оснасткой, а c_3 , b_3 объединяет упругодиссипативные свойства амортизаторов, установленных на ударной поверхности станины и бойков. Четвертым элементом является формовочная смесь с массой m_4 и упруговязкими свойствами c_4 , b_4 .

Составим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение модели:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 - B_1 \dot{x}_1 + c_2 (x_2 - x_1) + B_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - R_{10}; \\
 m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2 (x_2 - x_1) - B_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 (x_3 - x_2) + B_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - R_{23}; \\
 m_3 \ddot{x}_3 &= -c_3 (x_3 - x_2) - B_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_4 (x_4 - x_3) + B_4 (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - R_{23} \text{Sign} x_3 - R_{43} + G_3; \\
 m_4 \ddot{x}_4 &= -c_4 (x_4 - x_3) - B_4 (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - R_{43}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_j – абсолютные перемещения масс;

R_{10} – сила трения между фундаментом и грунтом;

R_{23} – сила трения в поршневой паре;

R_{43} – сила трения между формовочной смесью и опокой, которая определяется следующим об-

разом:

$$R_{43} = f_4 F_\delta = f_4 \xi_4 F_6 = f_4 \xi_4 [c_4(x_4 - x_3) + \epsilon_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)],$$

где F_δ, F_6 – сила бокового давления и вертикальная сила в смеси;

$f_4 \xi_4$ – коэффициенты трения и бокового давления.

Аналогично силу трения R_{10} можно определить так:

$$R_{10} = \int_0^{h_0} f_0 \xi_0 \sigma \Pi dy = f_0 \xi_0 g \rho_0 \Pi h_0^2 / 2,$$

где $f_0 \xi_0$ – коэффициенты трения и бокового давления в грунте;

h_0, Π – высота и периметр фундамента;

$\sigma = \rho_0 g y$ – напряжение в грунте на глубине y от поверхности.

Экспериментально установлено, что силу R_{23} в встряхивающих механизмах можно принять равным $(10 \div 15)\%$ от веса подвижных частей машины [1].

Анализ многочисленных литературных источников позволяет дать следующие рекомендации по выбору упругодиссипативных характеристик модели. Для утрамбованного грунта в зависимости от его состава $c_1 = (400 \div 500)$ Мн/м. При гармонических колебаниях линеаризованный коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью определяется по формуле:

$$\epsilon = c\psi / 2\pi\omega, \quad (2)$$

где ω – круговая частота колебаний, которая здесь равна частоте собственных колебаний стола

$$\omega = \omega_3 = \sqrt{c_3/m_3}$$

ψ – коэффициент рассеяния энергии, который для грунта можно принять равным $0,25 \div 0,3$.

Если станина установлена непосредственно на фундамент то коэффициент жесткости c_2 определяется жесткостью ребер станины, а ϵ_2 можно определить по формуле (2), приняв $\psi = 0,17$ [2].

Часто для уменьшения нагрузки на основание машины между станиной и фундаментом устанавливаются амортизирующие элементы (резиновые и деревянные прокладки). В этом случае приведенные упругодиссипативные характеристики определяются по формулам для последовательного соединения:

$$c_2^{-1} = c_{np}^{-1} = \sum c_i^{-1}, \quad \psi_2 = \psi_{np} = c_{np} \sum \psi_i / c_i.$$

Жесткости отдельных элементов рассчитываются, а ψ_i выбираются по экспериментальным данным.

Упругодиссипативные параметры c_3, ϵ_3 определяются в основном видом амортизаторов, воспринимающих удар стола (резиновые или текстолитовые элементы). При определении ϵ_3 надо учесть силы сопротивления в направляющих стола, давление воздуха в подпоршневом пространстве. Это можно сделать через коэффициент восстановления скорости после удара k , который непосредственно связан с безразмерным коэффициентом демпфирования

$$n = \epsilon_3 / 2m_3\omega_3.$$

Для встряхивающей формовочной машины коэффициент k меняется от 0,3 до 0,5 [1], а связь между коэффициентами n и k можно найти в работе [3].

В настоящей работе впервые ставится вопрос об определении упругодиссипативных характеристик (УДХ) формовочной смеси. Нами ранее предложена пятиэлементная реологическая модель смеси при динамическом уплотнении и методика определения ее параметров (рисунок 2).

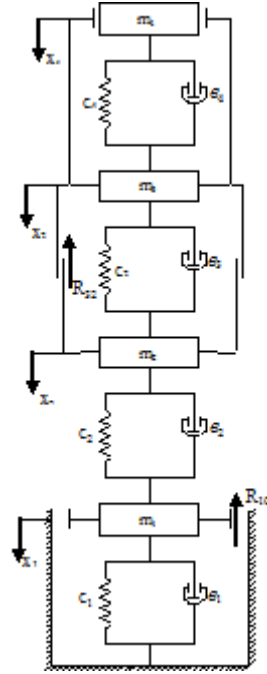


Рисунок 2 Реологическая модель формовочной смеси

Согласно этой модели связь между напряжением и деформацией описывается выражениями

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \sigma = E_2 \varepsilon_2 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_2 \quad \text{при } \sigma \leq \sigma_T; \quad (3)$$

$$\sigma = \sigma_T + \eta_2 \dot{\varepsilon} \quad \text{при } \sigma > \sigma_T. \quad (4)$$

где ε_i – деформация пружин;

σ, ε – суммарные напряжения.

В соотношениях (3), (4) модули упругости E_i , коэффициенты вязкости η_i и предел текучести σ_T зависят от плотности смеси.

Определим упругодиссипативные характеристики смеси при $\sigma \leq \sigma_T$. Так как $\varepsilon_1 = \sigma/E_1$, то из (3) имеем:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\sigma}/E_1 + (\sigma - E_2 \varepsilon_2)/\eta_1.$$

Учитывая, что $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$, это уравнение преобразуем к виду:

$$\dot{\sigma} = E_1 \dot{\varepsilon} + E_1 E_2 \varepsilon / \eta_1 - \sigma (E_1 - E_2) / \eta_1. \quad (5)$$

Для формовочной смеси можно записать:

$$A\sigma = cx + \varsigma x \quad (6)$$

где x – перемещение смеси относительно стола;

σ, c, ς – напряжение и упругодиссипативные характеристики смеси;

A – площадь опои.

Из последнего уравнения системы (1) следует:

$$m_4\ddot{x} = -(1 + f_4\xi_4)(cx + \varsigma\dot{x}).$$

Дифференцируя (6) и исключая оттуда $\ddot{x}$, получим:

$$A\dot{\sigma} = \varsigma c(1 + f_4\xi_4)x/m + [c - \varsigma^2(1 + f_4\xi_4)/m] \dot{x}.$$

В уравнений (5) можно положить:

$$\varepsilon = x/h, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{x}/h,$$

где h – высота опои.

Подставляя далее (5) в последнее уравнение и приравнявая члены при x и $\dot{x}$ в обеих частях полученного выражения приходим к системе:

$$AE_1E_2/\eta_1h - (E_1 + E_2)c/\eta_1 = -\varsigma c(1 + f_4\xi_4)/m_4;$$

$$AE_1/h - (E_1 + E_2)\varsigma/\eta_1 = c - \varsigma^2(1 + f_4\xi_4)/m_4.$$

Эта система сводится к следующему кубическому уравнению:

$$\varsigma^3 + a\varsigma^2 + d\varsigma + e = 0, \quad (7)$$

где

$$a = -2m_4(E_1 + E_2)/\eta_1(1 + f_4\xi_4), \quad d = a^2/4 + AE_1m_4/(1 + f_4\xi_4)h, \quad e = -A[E_1m_4/(1 + f_4\xi_4)]\eta_1h.$$

Это уравнение имеет один действительный и два комплексно – сопряженных корня. После определения действительного корня $\varsigma = \varsigma_4$ коэффициент жесткости смеси определяется выражением:

$$c = c_4 = \frac{m_4E_1E_2A/h}{m_4(E_1E_2) - \varsigma_4\eta_1(1 + f_4\xi_4)}. \quad (8)$$

При $\sigma > \sigma_T$ упругодиссипативные характеристики смеси можно найти приравнявая выражения (4) и (6):

$$c_4x = A\sigma_T, \quad \varsigma_4 = A\eta_2/h \quad (9)$$

С учетом всего вышеизложенного последние два уравнения движения можно переписать так:

$$m_3\ddot{x}_3 = -c_3(x_3 - x_2) - \epsilon_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + [c_x + \epsilon_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)](1 - f_4\xi_4) - R_{23}\text{Sign}x_3 + G_3;$$

$$m_4\ddot{x}_4 = -(1 + f_4\xi_4)[c_x + \epsilon_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)].$$

где

$$c_x = c_4(x_4 - x_3) \quad \text{при } \sigma \leq \sigma_T; \quad c_x = A\sigma_T \quad \text{при } \sigma > \sigma_T.$$

В процессе соударения стола со станиной с начальной скоростью V_0 напряжения в смеси меняются во времени и определяются по формуле:

$$\sigma = [c_x + \epsilon_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)]/A. \quad (10)$$

Это приводит к изменению плотности смеси. Из условия постоянства массы можно записать:

$$\rho_2 = \rho_1 h_1 / h_2, \quad (11)$$

где индексы «1» и «2» относятся к предыдущему и текущему моменту времени, а

$$h_2 = h - x = h - x_4 + x_3.$$

Уплотнение смеси может происходить от начальной плотности ρ_H до некоторой предельной величины ρ_m .

Изменение плотности приводит к изменению упругодиссипативных характеристик во времени. Поэтому систему уравнений движения надо решать численными методами, например методом Рунге – Кутты. При этом на каждом шаге расчета необходимо определить усилия в связях между инерционными элементами модели

$$N_j = c_j(x_j - x_{j-1}) + \epsilon_j(\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3 \quad (x_0 = \dot{x}_0 = 0) \quad (12)$$

Эти силы в дальнейшем используются для расчета элементов конструкций на прочность и долговечность.

Приведем алгоритм моделирования работы встряхивающей формовочной машины с использованием персональных компьютеров.

1. Ввод и распечатка исходных данных: $m_j, c_j, \epsilon_j, \rho_H, \rho_m, A, h, \xi_4, f_4, \rho_0, \Pi, h_0, f_0, \xi_0, V_0, \Delta t, K$.
2. Задание начальных условий: $\rho_1 = \rho_H, \sigma_1 = 0, x_{j,1} = 0, \dot{x}_{1,1} = \dot{x}_{2,1} = 0, \dot{x}_{3,1} = \dot{x}_{4,1} = V_0$.
3. Организация цикла по времени с шагом Δt и переменной i от 2 до K .
4. Вычисление реологических параметров смеси в зависимости от текущей плотности: $E_1, E_2, \eta_1, \eta_2, \sigma_T$.
5. Вычисление упругодиссипативных характеристик смеси c_4, ϵ_4, c_x – соотношения (7- 9).

6. Решение уравнений движения методом Рунге – Кутты: $x_{j,i}$, $\dot{x}_{j,i}$.
7. Вычисление плотности смеси ρ_i по (11).
8. Вычисления напряжения и усилий σ_i , $N_{1,i}$, $N_{2,i}$, $N_{3,i}$ по формулам (10) и (12).
9. Проверка окончания удара: если $N_3 \leq$, то $c_3 = v_3 = 0$.
10. Конец цикла по времени.
11. Распечатка результатов: ρ_i , σ_i , $x_{3,i}$, $\dot{x}_{3,i}$, $N_{j,i}$.

По этому алгоритму составлена программа расчетов на языке Паскаль. Расчеты проведены для встряхивающей формовочной машины 234М. По результатам расчетов построены графики изменения плотности смеси, перемещения стола и силы N_3 во времени.

Список литературы

- [1] Аксенов П.Н. Оборудование литейных цехов. М., Машиностроение, 1977. 510 с.
- [2] Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.
- [3] Бакиров Ж.Б., Касымханов С.Ж. Определение коэффициента восстановления скорости при продольном ударе. // Вестник Карагандинского университета. Серия математика, №2, 2006. с. 62-66.

УДК 681.136.8

ОЦЕНКА И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РИСКОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА С УЧЕТОМ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НОРМАТИВОВ

В.А. Корнев, С.В. Григорьева

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. Quantitative risk assessment technique of control and decision making in city ecological monitoring system is considered. Risk assessment decision making mathematical models in instrumental control system of city air pollution level monitoring including system agents statistical properties is offered. The following properties are considered as system agents: the laws of distribution of controlled parameters, the random error of measurement, the standard values and the law of distribution of decision-makers, depending on the personality type.

Keywords: Control, risk, decision making, ecology, established standard, validity, psychological type.

Аңдатпа. Бақылау мысалындағы қатер бағасының сандық әдісі мен қаланың экологиялық мониторинг жүйесінің шешімін қабылдау қарастырылған. Статистикалық құрылым агент жүйелеріне байланысты қаланың ортасындағы ауаны ластау деңгейін басқаруы құрал жүйесінде қатерді қабылдау бағасын математикалық модельде ұсынылған. Агент жүйесі ретінде қаралған: бақылау параметрлерінің таралу заңы, кезкелген қателікті өлшеу, мөлшер мағнасы және психологиялық түрігнің әсеріне байланысты шешім қабылдауш таралу түрінің заңы.

Кілттік сөздер: Бақылау, қатер, шешім қабылдау, экология, мөлшерлер, сенімділік, психотипті.

Аннотация. Рассматривается методика количественной оценки рисков на примере контроля и принятия решения в системе экологического мониторинга города. Предлагаются математические модели для оценки рисков принятия решений в системе инструментального контроля уровня загрязнения воздушной среды города с учетом статистических свойств агентов системы. В качестве агентов системы рассматриваются: законы распределения контролируемого параметра, случайной погрешности измерения, нормативных значений и закон распределения лица принимающего решения в зависимости от его психологического типа.

Ключевые слова: Контроль, риск, принятие решений, экология, нормативы, достоверность, психотип.

В связи высокой концентрацией предприятий цветной металлургии, предприятий энергетического комплекса, большого скопления на территории города Усть-Каменогорска автомобилей возникла критическая ситуация в части загрязнения окружающей среды города вредными выбросами. В среде обитания наблюдается повышенное содержание цинка, свинца и других вредных компонентов. Вредные выбросы промышленных предприятий: АО «Казцинк», АО «Титаномагнийевый комбинат», Усть-Каменогорская ТЭЦ во много раз превышают предельно допустимые нормы (ПДК). Из всего спектра наименований выбрасываемых загрязняющих компонентов, около 20% относятся к первому и второму классу опасности – это свинец, селен, кадмий, мышьяк, фтористый водород, хлор и другие. Среднегодовое превышение предельно-допустимых концентраций за последние годы по городу составили: по пыли – 2,0 ПДК, диоксида серы – 2,4 ПДК, диоксида азота – 3,3 ПДК, фенола – 2,7 ПДК, неорганических соединений мышьяка – 1,0 ПДК, оксида углерода и хлора – 0,7 ПДК.

Основной показатель уровня загрязнения атмосферы в городе Усть-Каменогорске определяется коэффициентом ИЗА5, который складывается из 5 наиболее присутствующих в атмосфере ингредиентов: диоксида азота, диоксида серы, фенола, формальдегида, взвешенных частиц или пыли, содержание которых превышает показание ПДК в городе. Рассчитывается индекс загрязнения атмосферы - ИЗА5 на основании государственного мониторинга. Выполняет мониторинг организация ВКО центр гидрометеорологии РГП "Казгидромет" с помощью своих постоянных наблюдений за состоянием атмосферы на стационарных постах. Данные посты оснащены современными контрольно-измерительными приборами.

Контроль и управление экологической обстановкой является сложным организационно-техническим процессом, который состоит из нескольких обязательных этапов - подпроцессов: диагностирование, принятие решения и корректирующего (регулирующего) воздействия на объект с целью восстановления его нормативных функций. Диагностирование в зависимости от природы исследуемого объекта содержит процедуры контроля, анализа и принятия решения о состоянии объекта и последующих действий. Обязательной процедурой контроля является измерение. Измерение рассматривается как самостоятельный акт, который обладает независимыми в процессе контроля характеристиками. Термин и процедура «измерение» в настоящее время могут исполь-

зоваться для любого объекта (параметра, процесса, события) независимо от его природы. Под средствами измерения можно понимать физические приборы, приборы и методику измерения, методику и ресурсы выявления данных по документам (пассивный эксперимент), субъекта и используемые им ресурсы, в том числе информационные. Результатом измерения всегда является число (или совокупность чисел), присваивающее количественную оценку измеряемой величине в некоторых заранее выбранных единицах. Множество результатов измерения - это множество чисел из некоторого интервала возможных значений.

Контроль - это последовательность процедур: измерения, сравнения измеренного значения с нормативами и принятие решения по принципу- «контролируемый параметр в норме», «контролируемый параметр за пределами нормы». Окончательное решение «годен- негоден», как правило принимается человеком. В системе с обратной связью предусматривается воздействие на объект с целью корректировка процесса и восстановление его нормативного значения [1].

В связи с тем, что процесс измерения сопровождается случайными погрешностями, то возникает вероятность ошибочного принятия решения, которые принято делить на ошибки, называемые ложным и необнаруженным браком [2]. В теории надежности эти же ошибки называются ложным и необнаруженным отказами. Количественно эти ошибки оцениваются соответствующими вероятностями, в данном случае, $R_{лб}$ – вероятность ложного брака и $R_{нб}$ - вероятность необнаруженного брака. Эти вероятности имеют также экономический смысл рисков производителя и риска потребителя.

Перечисленные процессы и процедуры в реальных условиях выполняются с определенным уровнем качества. Количественным интегральным показателем качества контроля в системе технической, финансовой, экологической и прочей диагностики довольно часто является достоверность, как степень уверенности в том, что результаты контроля истинно отражают состояние объекта. Аналитически достоверность определяется следующей формулой:

$$D = 1 - (\text{сумма вероятных ошибок})$$

Для количественного оценивания этих ошибок в форме вероятностей в литературе предлагаются аналитические выражения. Эти вероятности зависят от целого ряда статистических параметров и факторов: величины случайной погрешности измерения и закона ее распределения, статистических параметров контролируемого параметра и его закона распределения, величины нормативов и их положения на контролируемом поле параметра [1].

Нормативы бывают ограничениями «снизу», «сверху» или двухсторонними (допусковыми). В известных исследованиях, как правило, принимаются нормальные законы распределения контролируемого параметра и погрешности измерения и некоторые композиции законов распределения. Но следует учесть, что нормальный закон это предельный закон при наличии определенных условий, что редко имеет место на практике. Считается также, что нормативы являются детерминированными величинами. В реальной ситуации это, как правило, субъективно установленные нормы, чаще всего экспертными методами, действующими на протяжении некоторого времени. Однако в последнее время появились работы, в которых предлагается рассматривать нормативы величинами случайными с соответствующими законами распределения [5].

Следует обратить также внимание на очень важное обстоятельство, состоящее в том, что величины вероятных ошибок $R_{лб}$ и $R_{нб}$ на этапе контроля не оценивают качество управления по конечному результату в замкнутом контуре системы, так как контроль это информация, на основе которой, в случае необходимости, принимается регулирующее воздействие на объект управления

для восстановления его целевых функций. В реальности звено обратной связи также обладает ограниченной точностью восстановления функций действующей системы, и величина регулирующего воздействия является случайной функцией многих аргументов [2].

Если в контуре управления некоторой системы, диагностирования, информационно-измерительной системы и т.д., на этапах принятия решений присутствует человек, то исключительно важную роль приобретает психологический фактор - психологический тип человека. На этот крайне важный факт в настоящее время обращается внимание во многих исследованиях, но главная проблема состоит в сложности математического описания поведения человека в определенных условиях в зависимости от его психотипа [3].

Ставя конечной целью разработать формальную модель описания процесса управления системой по критерию качества работы по всему замкнутому контуру системы контроля с восстановлением рабочих функций объекта контроля в условиях статистической неопределенности, авторы в объеме данной статьи рассматривают один аспект контроля - влияния статистической природы нормативов на величину ошибок контроля. Для этой цели предлагаются модели количественного оценивания ошибок контроля.

Учитывая, что решаемая задача является многопараметрической, и моделируемый процесс состоит из разных по своей природе объектов, системно связанных между собой, представляется целесообразным использовать агентное моделирование. Агентное моделирование исследует влияние системных объектов - агентов на поведение всей системы в целом, что называется - моделированием «снизу вверх» [6].

Рассматривая контроль, как контент - процесс многоагентной системы, в нем можно выделить следующие агенты:

- внешние агенты (среда);
- агент объект исследования;
- агент прибор;
- агент норматив;
- агент алгоритм решения;
- агент - инструменты регулирования (корректирования).

Агент - регулирование в данной статье не рассматривается, так как это является отдельной задачей.

Для дальнейшей разработки математических моделей оценки и прогнозирования вероятных ошибок контроля, входной информацией будут являться статистические данные множества контролируемых параметров $\{S_i\}$. Из всей совокупности контролируемых параметров загрязнения атмосферы города выбраны: содержание диоксида серы, диоксида азота, фенола, неорганических соединений мышьяка и хлора.

Рассмотрим модель формирования ошибок контроля (риска принятия решения) на примере одного условного параметра S . В результате экспериментально-статистических исследований была найдена функция плотности распределения этого параметра - $f(S)$. В структурно-функциональной модели необходимо задать технологические нормативы, в том числе, допуски: S_n - нижний предел (норматив) и S_v - верхний норматив и их статистические характеристики в виде законов распределения $f(S_n)$ и $f(S_v)$. Процесс измерения параметра аппроксимируется плотностью распределения случайной погрешности прибора - $\phi(y)$

Из сформулированной задачи следует, что параметрами неопределенности исследуемой агентной системы являются: средние квадратические отклонения контролируемого параметра - σ_s ,

случайной погрешности измерения σ_ϕ и нормативов σ_θ .

Исследования показывают, что любая деятельность - это, если не психический процесс, то прямое следствие психических процессов [3] и качество процесса принятия решений (ППР) в значительной мере является функцией психических процессов. В основе практически каждого управленческого решения присутствует, так называемый «человеческий фактор». Герберт Саймон с соавторами по этому поводу считает: «выбор, который индивидуум совершит в той или иной ситуации, складывается из (1) его навыков, знаний, характера и особенностей личности в том виде, каком они были сформированы всем предшествующим жизненным опытом, и (2) из конкретных воздействий, которым он подвергается в момент принятия решения. В большинстве случаев первое гораздо более важно для определения его поведения, чем второе» [4].

В последнее время количество исследований в области влияния психических факторов на ППР стремительно нарастает. Однако, большинство исследователей сконцентрировались на проблеме качественного анализа ППР с учетом психических факторов и крайне редки работы по моделированию и количественной оценки степени их влияния на результаты субъективного управления. Формализовать данный процесс, по мнению многих авторов, крайне сложно или практически невозможно. Из анализа публикаций было установлено, что попытки решения подобной задачи уже предпринимались в других областях деятельности, например, в работах [1,2].

В принятии решений, как междисциплинарной проблеме, начало психологическому исследованию принятия решения было положено Уордом Эдвардсом в 1954 г., которого можно назвать основоположником исследований особенностей реального человеческого поведения в ситуации принятия решения, смысл которых и до настоящего времени сводится в основном к выяснению характера и сути отклонений реальных решений от идеальных, рациональных моделей [9].

Из приведенного выше, для дальнейшего моделирования все множество психологических типов ЛПР авторы предлагают свести упрощенно к следующим трем группам: компетентный (рационально мыслящий тип), рисковый (сверхоптимист) и свехосторожный (пессимист). Так как, в решениях в большей или меньшей мере присутствует элемент случайности, то каждый из трех перечисленных выше вариантов решений назовем функцией субъективного решения $Y_p(Sp)$.

Рассмотрим три варианта решений и соответствующих им функций $Y_p(Sp)$:

- случай рационального решения, при этом выдвинем гипотезу нормального распределения функции решения $Y_p(Sp)$ со средним квадратическим σ_y .
- для случая явно выраженного отсутствия компетентности ЛПР, выдвинем гипотезу распределения функции решения в форме непрерывной (равномерной) плотности распределения, что может быть также вызвано отсутствием информации о контролируемом параметре.
- в третьем варианте принятие решений тяготеет к полюсным решениям, а именно, либо к крайнему оптимизму, либо крайнему пессимизму. В последнем варианте в качестве функции распределения $Y_p(Sp)$ предлагается использовать закон Вейбулла.

Целесообразность выбора закона Вейбулла, по сравнению с нормальным, обоснована тем, что он имеет аналитическую форму интегрального закона распределения, что значительно упрощает процесс моделирования. Для моделирования «U»-образной формы распределения, особенно, когда речь идет о погрешности, можно воспользоваться возможностью композиции двух распределений Вейбулла при разных его параметрах β и γ .

Индикаторы (диагностические параметры) контролируемых процессов по своей природе являются, как уже указывалось выше, величинами случайными. Система измерения этих показателей, а сюда автор относит: методику измерения и инструменты контроля, водителя и его субъектив-

ные качества и т.д., которые задействованы в контуре принятия решений, имеет погрешность. Поэтому, результат контроля – величина случайная, и как было установлено в ряде исследований [35,36], зависит от целого ряда факторов, таких как, статистические законы распределения контролируемого параметра, статистические законы распределения погрешности измерителя (прибора или водителя), величины нормативных значений. Однако, во всех известных работах нормативы рассматривались как величины детерминированные. В реальных условиях точное значение нормативов определить невозможно, что дает основание считать нормативы величиной случайной и возникает задача оценки рисков с учетом и этой гипотезы. Таким образом, возникает задача оценки и прогнозирования качества контроля и принятия решения, как функции всех перечисленных выше факторов и параметров.

Показателем качества контроля, как было указано выше, может быть выбрана метрологическая характеристика- достоверность D и элементы достоверности - риски. Задачу оценки достоверности и рисков, предполагается решить путем разработки вероятностной модели и проведения компьютерного эксперимента с целью получения расчетных оценок и прогнозов.

Рассмотрим формальную сторону моделирования.

Первым шагом моделирования процесс контроля подвергается декомпозиции до уровня простых случайных событий-процедур. В результате декомпозиции реального процесса контроля выявлены следующие события:

- измерение текущего значения контролируемого параметра;
- сравнение измеренного значения с нормативом;
- принятие решения о состоянии контролируемого объекта;
- если значение контролируемого параметра превысило нормативы, то принимается решения коррекции процесса.

Первым этапом моделирования предполагается, что плотности распределения контролируемого параметра $f(S)$, случайной погрешности $\phi(S_{изм})$ и нормативов подчиняются нормальным законам.

Возникает задача, как оценить вероятности ошибок контроля, в данном случае Рлб – вероятности ложного брака и Рнб – вероятности необнаруженного брака, и как управлять уровнем указанных ошибок.

Для оценки качества принимаемых решений и определения видов брака была построена вероятностная модель. Суть вероятностной модели состоит в том, что в зависимости от выбранных законов распределения контролируемого параметра, погрешности измерения и нормативных значений рассчитываются вероятности ошибок контроля. Модель разработана, как для случая детерминированных значений нормативов, так и для статистической природы нормативов. Формулы нахождения вероятностей ложного и необнаруженного брака в условиях статистической неопределенности нормативов приведены ниже.

$$P_{ЛБ} = \sum_{m=0}^{k-1} \left(\int_{S_m}^{S_{m+1}} \gamma_{\text{нн}} \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \left(\int_{S_l}^{S_{l+1}} \gamma_{\text{ен}} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} f(s) ds \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{S_j}^{S_{j+1}} \varphi(s) ds + \sum_{j=0}^{k-2} \int_{S_j}^{S_{j+1}} \varphi(s) ds \right) \right) \right) \right)$$

$$P_{НБ} = \sum_{m=0}^{k-1} \left(\int_{S_m}^{S_{m+1}} \gamma_{\text{нн}} \cdot \sum_{l=0}^{k-1} \left(\int_{S_l}^{S_{l+1}} \gamma_{\text{ен}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} f(s) ds + \sum_{i=0}^{k-2} \int_{S_i}^{S_{i+1}} f(s) ds \right) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \int_{S_j}^{S_{j+1}} \varphi(s) ds \right) \right)$$

Для исследования системы с учетом психологического типа лица принимающего решения была разработана имитационная модель. В имитационной модели предусматривалось исследование

трех психотипов лица, принимающего решения: человека сверхосторожного поведения; человека с нормальной реакцией и рационального поведения; человека склонного к рисковому решению. Каждый психотип математически моделировался соответствующими законами распределений.

Нормативные значения в модели рассматривались как величины случайные.

Результатами моделирования являлись вероятности $P_{нб}$ и $P_{лб}$.

Моделирование было реализовано на примере процесса вождения автомобиля, а лицом принимающим решение - водителем автомобиля. Результаты моделирования приведены на рисунке.



Рисунок 1 Качество вождения автомобиля с учетом психологии водителя: σ_1 - ср.кв. отклонение распределения параметра принятия решения; σ_2 - ср.кв. отклонение распределения норматива движения.

На рисунке показаны:

- верхняя кривая качества вождения Q (пример рационального вождения - $Q=1-P_{лб}-P_{нб}$);
- средняя кривая – вождение с риском;
- нижняя кривая – сверхосторожное вождение.

Анализ результатов моделирования с целью количественной оценки рисков в процессе принятия решений водителем (качества вождения) с учетом его психологического типа показал, что величина риска существенно зависит от психотипа водителя, причем большему риску подвергается водитель с высокой осторожностью вождения.

Этот факт приводит к необходимости индивидуализации программы обучения водителей, учитывающей психологию обучаемого.

Выявление психологического типа обучаемого возможно несколькими способами, например, тестированием.

ВЫВОДЫ.

Полученные результаты моделирования планируется положить в основу процессов принятия решений в системе обучения водителей и внедрение системы мониторинга по отдельным контингентам обучаемых с высокими прогнозируемыми рисками, которые были оценены во время обучения.

Список литературы

- [1] Кулешов В.К., Корнев В.А. Моделирование процессов контроля и принятия решений. Томский политехнический университет, 2011. – 295 с.

- [2] Корнев В.А., Макенов А.А. Современные методы моделирования процессов принятия решений в системах управления.—Усть-Каменогорск: ВКГУ, 2008. —148 с.
- [3] Корнев В.А. Оценка и прогнозирование качества принятия решений с учетом психологических факторов/Материалы 9-й международной научно-практической конференции, « Качество-стратегия 21 века», Томск 2004 г.
- [4] Саймон Г.А., Смитбург Д.У., Томпсон В.А. Менеджмент в организациях./Перевод Емельянова А.М.- М.: Экономика, 1995.-230с.
- [5] Бендер О.А. Оценка и прогнозирование рисков в системе инструментального контроля транспортно-эксплуатационного состояния автомобильных дорог./Автореферат к.т.н. - Новосибирск, 2013.-23с.
- [6] Мазур И.И., Молдаванов О.И., Шишов В.Н. Инженерная экология.-М.: "Высшая школа 1996.-637с.

УДК 519.63

ВИХРЕСОГЛАСОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА КОСОУГОЛЬНЫХ 2D СЕТКАХ

В.А. Коробицын, Д.В. Коробицын

Институт вычислительных технологий СО РАН ¹

Abstract. The report presents the results of the construction of difference schemes on curl free oblique 2D grids, inheriting the basic properties of approximated differential equations.

Keywords: finite-difference, Discrete tensor analysis, Curl free.

Андатпа. Мақалада жақындатылған дифференциалды теңдеулердің негізгі қасиеттерін еңшіленген 2D торларында иірімделе келісілген айырымды тсызбаларды құру нәтижелері ұсынылған.

Кілттік сөздер: адаптивті торлар, дискретті тензорлы анализ, иірімделе келісілген

Аннотация. В докладе представлены результаты построения вихресогласованных разностных схем на 2D сетках, наследующий основные свойства приближенных дифференциальных уравнений

Ключевые слова : разностная схема, дискретный тензорный анализ, вихресогласованный

Численные расчеты задач идеальной газовой динамики на основе полностью консервативной разностной схемы в лагранжевых переменных на подвижной шахматной сетке устанавливают существенное влияние на решение задачи поведения дискретного ротора градиента давления. Являясь тождественным нулем в непрерывном пространстве, в дискретном сеточном пространстве

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы Интеграционных исследований СО РАН (проект 42) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6293.2012.9).

ротор градиента давления иногда принимает значения, далекие от аппроксимационных. Этот феномен рассматривается на примере задачи о двух поршнях, вдвигаемых с постоянной скоростью в идеальный газ. Нарушение аппроксимационных значений ротора градиента давления происходит в области контактных разрывов. Такое поведение дискретных значений ротора градиента давления делает актуальной задачу создания вихресо согласованной дискретной схемы для 2D косоугольной лагранжевой сетки, у которой соотношение дискретного векторного анализа $\mathbf{rot\ grad} = 0$ выполняется для дискретного оператора $\mathbf{grad}$ в дискретном уравнении импульса и согласованного дискретного оператора $\mathbf{rot}$. Тем самым будет устранено влияние аппроксимационного $\mathbf{rot\ grad}$.

Необходимость создания такой схемы следует из гипотезы, что аппроксимационный вихрь влияет на нефизические искажения лагранжевых расчетных ячеек сетки. Основной целью исследования является создание эффективных вихресо согласованных численных алгоритмов, наследующих основные свойства аппроксимируемых дифференциальных уравнений в частных производных, а также сохраняющих соотношение $\mathbf{rot\ grad} = 0$, для дискретного оператора $\mathbf{grad}$ в дискретном уравнении импульса. Проверка эффективности численного решения нелинейных задач математической физики. Модельные расчеты безвихревых течений.

1. В современной практике математического моделирования физических процессов сплошных сред, дискретные операторы, образующие разностные схемы на косоугольных подвижных сетках, не удовлетворяют тождеству

$$\mathbf{ROTGRAD} = 0, \quad (1)$$

с дискретным оператором $\mathbf{GRAD}$ входящим в уравнение импульса. Следствием является не выполнение, для численных решений, теорем о сохранении циркуляции, потенциальности и безвихревости течений. Дискретные модели, соблюдающие тождество (1) на дискретном уровне, будем называть потенциальными, или вихресо согласованными. Отметим, что для регулярных прямоугольных, равномерных сеток эта проблема не возникает. Фундаментальная задача определяется как построение вихресо согласованных разностных схем на косоугольных 2D сетках. Соотношения дискретного векторного анализа выполняются для дискретного оператора $\mathbf{GRAD}$ в дискретном уравнении импульса и соответствующего, по области значения, области определения дискретного оператора $\mathbf{ROT}$.

Необходимость создания таких схем следует из гипотезы, что аппроксимационный вихрь оказывает существенное влияние на нефизичное искажение (выворачивание) ячеек лагранжевой расчетной сетки. Решения полученные на основе таких потенциальных разностных схем на косоугольных 2D сетках будут служить подтверждением или опровержением этой гипотезы.

Основной целью исследования является создание эффективных вихресо согласованных численных алгоритмов, наследующих основные свойства аппроксимируемых дифференциальных уравнений в частных производных, и выполняющих дискретное соотношение (1), как аналога континуального соотношения $\mathbf{rotgrad} = 0$, для оператора $\mathbf{GRAD}$ в дискретном уравнении импульса.

2. В области Q на плоскости декартовых прямоугольных координат $(x_1, x_2) = (x, y)$ вводится невырожденная косоугольная подвижная сетка узлов $\omega_h \subset \mathbf{R}^2(x, y)$, топологически эквивалентная целочисленной прямоугольной сетке $Q^0 \in Z(i, j)$, Γ_h — граничные узлы сетки ω_h . Для аппроксимации разностных производных в окрестности граничных узлов считаем, что сетки соответствующим образом продолжены за пределы, а значения функций экстраполированы на это продолжение с учетом граничных условий и порядка аппроксимации.

Зафиксируем шаблон узлов $\omega(\Omega) \subset \omega_h$, как однородное подмножество узлов связанных с узлом, участвующих в задании дискретного (разностного) оператора производной первого порядка в этой ячейке. Аппроксимация площади каждого узла определяется выбранной формулой $S = S(x, y), (x, y) \in \omega(\Omega)$ на этом шаблоне узла. Стандартным образом вводится скалярное произведение двух дискретных векторов. Основываясь на геометрическом законе сохранения дискретного элементарного объема (площади) введем в рассмотрение натуральный (интегрируемый) дискретный оператор первой производной $D_i, i = 1, 2; S_{\Omega}^{-1} \frac{dS}{dt} = D_{\alpha} \frac{dx_{\alpha}}{dt} \equiv \overline{DIV} \mathbf{W}$, который определяет интегрируемую дискретную операцию дискретного векторного анализа. $\mathbf{W} = \{W_1, W_2\}$ - вектор. Суммирование по повторяющимся греческим индексам. Основываясь на формуле суммирования по частям

$$\sum_{\Omega'_h} V_{\Omega} \varphi D_j \psi + \sum_{\omega'_h} V_{\omega} \psi G_j \varphi = \sum_{\Gamma} \langle \psi \varphi \nu_j l \rangle_1, j = 1, 2;$$

где $\omega'_h \subseteq \omega_h$, произвольная связная сеточная подобласть, ν_j, l - аппроксимация орта нормали и длины граничного элемента, определим двойственный дискретный оператор первой производной $G_i, i = 1, 2$.

Определим площадь узла с индексами i, j формулой

$$S = 0.25(\mathbf{r}_{i+1,j} - \mathbf{r}_{i-1,j}) \times (\mathbf{r}_{i,j+1} - \mathbf{r}_{i,j-1}),$$

где $\mathbf{r}_{ij}$ вектор $\{x_{ij}, y_{ij}\}$. Дискретный оператор $\overline{DIV}$ примет вид

$$S \overline{DIV} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.25 \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{i+1,j} - \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{i-1,j} \right) \times (\mathbf{r}_{i,j+1} - \mathbf{r}_{i,j-1}) + (\mathbf{r}_{i+1,j} - \mathbf{r}_{i-1,j}) \times \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{i,j+1} - \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{i,j-1} \right).$$

Шаблон дискретного оператора D_i совпадает с шаблоном S . Операторы $D_1 \psi, D_2 \psi$ принимают вид

$$SD_1 \psi = 0.25[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})],$$

$$SD_2 \psi = 0.25[(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})],$$

Операторы $G_1 \varphi, G_2 \varphi$ в соответствии с формулой суммирования по частям запишутся в виде

$$\begin{aligned} 4G_1 \varphi &= [\varphi_{i+1,j}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) - \varphi_{i-1,j}(y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1}) - \\ &\quad \varphi_{i,j+1}(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}) + \varphi_{i,j-1}(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1})], \\ 4SG_2 \varphi &= -[\varphi_{i+1,j}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1}) - \varphi_{i-1,j}(x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1}) - \\ &\quad \varphi_{i,j+1}(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}) + \varphi_{i,j-1}(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1})]. \end{aligned}$$

3. Имеет место следующая

Теорема 1 Дискретные операторы D_i, G_i удовлетворяют аналогу леммы Шварца о перестановочности операторов: $G_1 D_2 = G_2 D_1$.

Утверждение проверяется простой проверкой.

Определим дискретные операторы тензорного анализа на ∇ как формальные векторы, натуральный $\overline{\nabla} = \{D_1, D_2\}$, и согласованный с ним $\nabla = \{G_1, G_2\}$. Действие этих операторов на скалярные, векторные и тензорные сеточные функции формально соответствует некоммутатив-

ной операции умножения векторов $\nabla, \overline{\nabla}$ на соответствующие функции

$$\begin{aligned}\nabla\varphi \equiv \mathbf{GRAD}\varphi &= \{G_1\varphi, G_2\varphi\}, \overline{\nabla}\varphi \equiv \overline{\mathbf{GRAD}}\varphi = \{D_1\varphi, D_2\varphi\}, \nabla \cdot \mathbf{W} = \mathbf{DIV}\mathbf{W}, \overline{\nabla} \cdot \mathbf{W} = \\ &= \overline{\mathbf{DIV}}\mathbf{W}, \mathbf{ROT}\mathbf{W} = \nabla \times \mathbf{W}\end{aligned}$$

Введем псевдоскаляр $ROT\mathbf{W} = G_1W_2 - G_2W_1$, аппроксимирующий дифференциальный оператор $rotW = \frac{dW_2}{dx_1} - \frac{dW_1}{dx_2}$.

Имеет место следующая

Теорема 2 Справедливо сеточное тождество

$$ROT\overline{\mathbf{GRAD}}\varphi \equiv 0.$$

4. Итак, построены две набора дискретных операторов векторного анализа: натуральные $\mathbf{GRAD}$, $\overline{\mathbf{DIV}}$, и им двойственные. Натуральные операторы естественно применять в задачах, где важно соблюдение геометрического закона сохранения дискретного объема (площади). В задачах дискретной лагранжевой газовой динамики это позволит выполнять уравнение сохранения энтропии как следствие уравнений идеальной газовой динамики. Точно сохранять объем среды в задачах несжимаемой жидкости.

Двойственные вихресогласованные операторы $\overline{\mathbf{GRAD}}$, $\mathbf{DIV}$, $\mathbf{ROT}$ позволяют для безвихревых течений вводить дискретный потенциал скорости, а также избегать влияния аппроксимационной завихренности на численные расчеты.

УДК 621. 326

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СПЕКТРОГРАММ РЕНТГЕНОВСКИХ ФЛЮОРЕСЦЕНТНЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

А.Л. Красавин, Д.Л. Алонцева

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. The paper describes the use of digital filters with finite impulse response (FIR filters) for the detection of X-ray peaks in the spectra are characterized by advanced X-ray background and the relatively high "noise" component. Developed and tested an original algorithm for the detection and determination of parameters of the peaks in the spectra of X-ray fluorescence spectrometers. Application of digital filter allows the detection of small amplitude peaks and to improve the accuracy of the peak amplitudes. In addition, the peak detection algorithm described in this paper may be of interest to designers of systems of automated spectrogram processing. In work requirements to the optimum for problem detection peaks of the FIR filter and the proposed method of calculating the optimal filter for the spectrogram to set functions.

Keywords: digital filters with finite impulse response (FIR filters), the detection algorithm, X-ray peaks.

Аңдатпа. Жұмыста спектрда ең жоғарғы рентгендік сәуле шығаруды детекторлау үшін рентген сәулелену шеткі импульстық сипаты бар сандық филтрлерді қолдану жазылған. Рентгенді

флюоресцентті спектрометрдің спектрограммында ең жоғарғы параметрін іздеудің және детектрленудің бірегей алгоритмі құрастырылған және қабылданған. Сандық фильтрді қолдану ең жоғарғы шектерді аз амплитуда детектрлеуге және ең жоғарғы шектердің амплитудасын анықтау дәлділігін жоғарлатады. Сонымен қатар, бұл жұмыста сипатталған ең жоғарғы шектердің детектрлену алгоритмі спектрограмманы өңдеудің автоматтандыру жүйесін жобалаушыларға қызығушылық танытады. Жұмыста ең жоғарғы шектердің детектрлеу есептерінің талаптары тұжырымдалған және тиімді филтрді есептеу әдістемесі ұсынылған.

Кілттік сөздер: шеткі импульстық сипаты бар сандық филтрлер, детектрлеу алгоритмі, рентгендік сәуле шығарудың ең жоғарғы шектері.

Аннотация. В работе описывается применение цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой для детектирования пиков рентгеновского излучения в спектрах, характеризующихся развитым фоном рентгеновского излучения и относительно высокой “шумовой” составляющей. Разработан и апробирован оригинальный алгоритм детектирования и нахождения параметров пиков в спектрах рентгеновских флюоресцентных спектрометров. Применение цифровой фильтрации позволяет детектировать пики с малой амплитудой и позволяет повысить точность определения амплитуд пиков. Кроме того, описываемый в данной работе алгоритм детектирования пиков может представлять интерес для проектировщиков систем автоматической обработки спектрограмм. В работе сформулированы требования к оптимальному для задачи детектирования пиков КИХ фильтру и предложена методика расчета оптимального фильтра для спектрограммы с заданными параметрами съемки.

Ключевые слова: цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры), алгоритм детектирования, пики рентгеновского излучения.

Введение. В данной статье предлагается методика расчета цифрового фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр) применяемого для детектирования и нахождения параметров пиков характеристического излучения в спектрограммах рентгеновских флюоресцентных спектрометров. Специфика задачи побудила нас сформулировать критерий оптимальности фильтра, отличный от обычного критерия минимизации соотношения “сигнал - шум”. Разработана оригинальная методика проектирования КИХ-фильтра, удовлетворяющего этому критерию. Следует отметить, что, несмотря на то, что в целом идея применения цифровых фильтров для детектирования пиков рентгеновского излучения освещалась в литературе посвященной обработке рентгеновских спектров [1], непосредственно методика проектирования оптимального для задач детектирования фильтра практически не обсуждалась в специальной литературе. Мы предполагаем, что данная методика может представлять интерес для специалистов в области цифровой обработки сигналов, сталкивающихся с задачей детектирования сигнала в условиях, близких к наблюдаемым при обработке спектрограмм рентгеновских флюоресцентных спектрометров, а именно – с наложением на сигнал гауссовского белого шума и низкочастотного “фона”

Описание математической модели. После предварительной обработки спектрограмма рентгеновского флюоресцентного спектрометра представляет собой массив отсчетов дискретизированной непрерывной функции спектра $S(t)$, модель которой описывается выражением (1):

$$S(t) = \sum_{k=1}^{nPeak} Amp_i \cdot P(t - cntr_i) + Ph(t) + Noise(t) \quad (1)$$

где $P(t)$ - функция, описывающая форму пика характеристического излучения, $nPeak$ - число пиков в спектрограмме, Amp_i и $cntr_i$ так называемые “амплитуды” и “координаты” пиков, $Ph(t)$ -

функция, описывающая так называемый “фон” рентгеновского излучения, и $Noise(t)$ - функция, описывающая шумовую составляющую спектра [1]. Конечной целью обработки спектра является возможно более точное определение амплитуд и координат пиков, по значениям которых определяется качественный и количественный состав пробы, с которой была снята рентгенограмма. Сложности, в обработке спектрограмм связаны главным образом с двумя факторами: недостаточностью априорной информации о функции $Ph(t)$ (на практике оказывается, что априорная информация о $Ph(t)$ заключается в одном утверждении: функция $Ph(t)$ изменяется весьма медленно в сравнении с функцией $P(t)$), и наличием “шумовой составляющей” спектра, в некоторых случаях способной замаскировать пики малой амплитуды, и в любом случае ухудшающей точность определения амплитуд и координат пиков. Идея применения КИХ-фильтра в обработке спектрограмм состоит в предварительной обработке спектра КИХ-фильтра с формой функции отклика на сигнал $P(t)$, схематически изображенной на рис.1, подавляющего низкочастотную составляющую спектра (“вырезающего фон”).

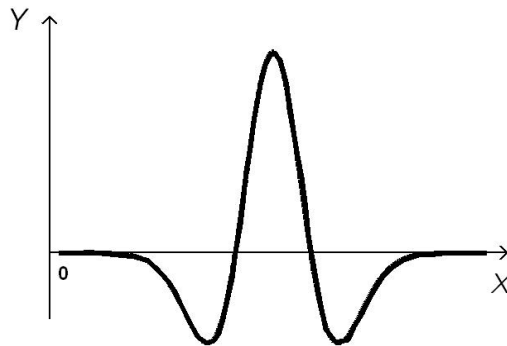


Рисунок 1 График функции отклика фильтра на сигнал $P(t)$

Специфическая форма функции отклика такого фильтра делает возможным применение следующего простого алгоритма детектирования пиков характеристического излучения:

1. Спектр рентгеновского излучения пропускается через КИХ-фильтр, подавляющий низкочастотную составляющую (рис.2).

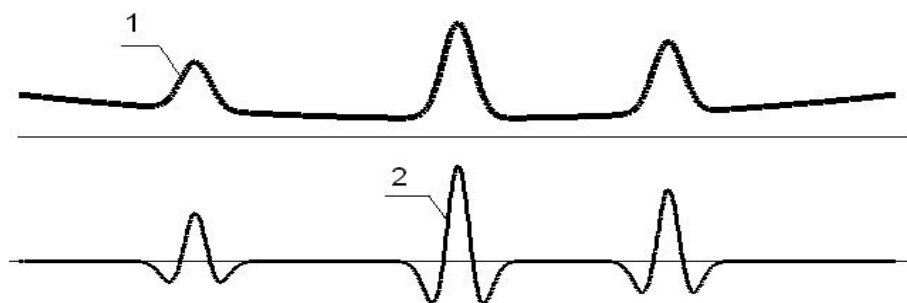


Рисунок 2 Схематическое изображение исходного сигнала (функции спектра) (кривая 1), и отклика фильтра (функции спектра, пропущенной через фильтр) (кривая 2)

2. Заданным значением “отсечки” выделяются области расположения пиков (рис. 3).

Если КИХ-фильтр имеет весовых коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_N$, то условие равенства нулю отклика фильтра на постоянный входной сигнал (“вырезание” низкочастотной составляющей),

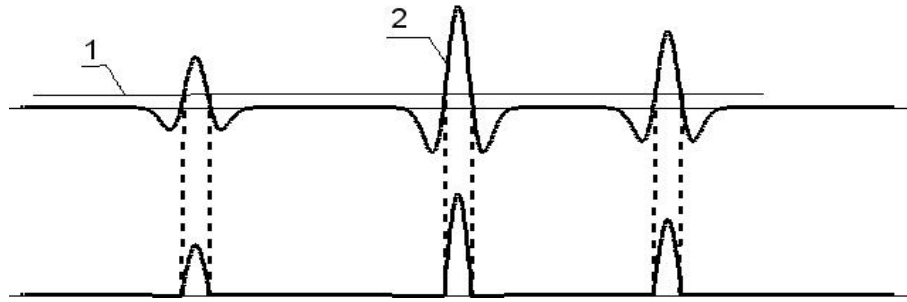


Рисунок 3 Графическое изображение метода определения областей расположения пиков.
Кривая 1 – линия отсечки. Кривая 2 – функция отклика фильтра

мы можем сформулировать как

$$\sum_{k=1}^n a_k = 0 \quad (2)$$

Если мы полагаем, что шумовая составляющая спектра описывается гауссовским белым шумом с дисперсией D , то отклик фильтра будет содержать шумовую составляющую с дисперсией $D_R = (\sum_{k=1}^N a_k^2) \cdot D$ [2]. Отсюда мы приходим к требованию минимизации суммы квадратов весовых коэффициентов фильтра. Разумеется, такая минимизация должна оставлять возможность детектирования пика. Обеспечение такой возможности гарантируется равенством

$$R(0) = 1 \quad (3)$$

где $R(t)$ непрерывная функция отклика фильтра (определение см. ниже). Требования (2) и (3) будут переформулированы как условия (19) и (20), налагаемые на непрерывную функцию фильтра, а критерий минимальности суммы квадратов весовых коэффициентов – как критерий минимальности функционала (21). Отметим, что постановка задачи проектирования КИХ-фильтра для обработки спектрограмм, существенно отличается от типичных задач проектирования фильтров (как аналоговых так и цифровых), характеризующихся представлением сигнала в частотной области (фильтры низких и высоких частот и т.п.), методы решения которых хорошо разработаны и освещены в литературе [3, 4].

Термины и обозначения

1. Преобразованием Фурье функции $f(t)$ мы называем функцию

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt$$

При этом функцию $f(t)$ мы называем оригиналом функции $\hat{f}(\omega)$. Связь между преобразованием Фурье и его оригиналом задается формулой обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

2. Сверткой функций $f(t)$ и $h(t)$ называется функция $g(t)$ определяемая равенством:

$$g(t) = f * h = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) h(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) f(u) du$$

3. Теорема о свертке: Если $g(t) = f * h$, то $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega)$

4. Теорема о произведении: Если $g(t) = f(t) \cdot h(t)$, то

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} \cdot \hat{h}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega-u) \hat{h}(u) du$$

Метод проектирования фильтра

Пусть шаг дискретизации сигнал $S(t)$ равен Δt . Обозначим $L = (N - 1)\Delta t$ и рассмотрим функцию

$$R(t) = cccS\left(t + (i - 1)\Delta t - \frac{L}{2}\right) \quad (4)$$

Тогда дискретную функцию отклика фильтра (5)

$$y_k = \sum_{i=1}^N a_i S((k - (N - i))\Delta t) \quad (5)$$

можно представить в виде дискретизации функции $R(t + \frac{L}{2})$

$$y_k = R\left(k\Delta t + \frac{L}{2}\right) \quad (6)$$

Будем считать, что весовые коэффициенты фильтра $a_1, a_2, \dots, a_N$ представляют собой дискретизацию некоторой функции $\phi(t - \frac{L}{2})$

$$a_k = \phi\left((k - 1)\Delta t - \frac{L}{2}\right) \quad (7)$$

Причем функция $\phi(t)$, которую мы будем называть функцией фильтра, является финитной функцией с интервалом носителем $(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$. В таком случае, мы можем представить $R(t)$ в виде свертки

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [c(t - \tau)\phi(t - \tau)]S(\tau)d\tau \quad (8)$$

где $c(t)$ - функция comb - $c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma(x - k\Delta t)$ Справедливость равенства (8) легко доказывается с помощью свойства дельта-функции Дирака:

$$\forall f(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)\delta(t) \equiv f(t) \quad (9)$$

Согласно теореме о свертке, преобразование Фурье функции $R(t)$ будет представлять собой произведение вида $\hat{R}(\omega) = \hat{G}(\omega) \cdot \hat{S}(\omega)$, где $\hat{G}(\omega)$ преобразование Фурье функции $G(t) = c(t) \cdot \phi(t)$, а $\hat{S}(\omega)$ преобразование Фурье функции $S(t)$. Применяя к $G(t)$ теорему о произведении, получим:

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega - \lambda) \cdot \hat{c}(\lambda) d\lambda \quad (10)$$

где $\hat{\phi}(\omega)$ и $\hat{c}(\omega)$ преобразования Фурье функций $\phi(t)$ и $c(t)$ соответственно. Как известно [5],

$$\hat{c}(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right) \quad (11)$$

Учитывая свойство дельта-функции (6) получим

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right) \quad (12)$$

Обозначим $\phi^*(t)$ оригинал функции $\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right)$. Тогда $R(t)$ будет представлять собой

свертку функции $\phi^*(t)$ и сигнала $S(t)$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(t - \tau) S(\tau) d\tau \quad (13)$$

Если функция $\hat{\phi}(\omega)$ финитна и имеет интервал-носитель I , целиком уместающийся в частотном диапазоне $[\frac{-\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$, т.е. $I \subset [\frac{-\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$, то

$$\forall \omega \in [\frac{-\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}] \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t} \hat{\phi}(\omega) \quad (14)$$

В силу неравенства Гейзенберга оригинал финитной функции не может быть финитен [5], а потому КИХ-фильтр, коэффициенты которого представляют собой дискретизацию функции $\phi(t)$, должен иметь бесконечное число ненулевых весовых коэффициентов. Однако существуют такие функции как $f(t) = \exp(-t^2)$, которые не являются финитными, как не является финитной функцией их преобразование Фурье ($\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} \exp(-\frac{\omega^2}{4})$), но при этом эти функции и их преобразования Фурье можно с высокой степенью точности аппроксимировать финитными функциями. Будем искать $\phi(t)$ в классе функций вида

$$\phi(t) = W(t) \left(c_0 + \sum_{k=1}^{nHarm} c_k \cos\left(\frac{\pi k t}{L}\right) \right) \quad (15)$$

где $W(t)$, которую мы будем называть “оконной функцией”, принадлежит описанному выше классу функций, и может быть с достаточной степенью точности аппроксимирована финитной функцией с интервалом-носителем $[-L, L]$, а $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$ постоянные коэффициенты.

Пусть $H(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{nHarm} c_k \cos\left(\frac{\pi k t}{L}\right)$. Преобразование Фурье функции $H(t)$

$$\hat{H}(\omega) = \pi \left(2c_0 \delta(\omega) + \sum_{k=1}^{nHarm} c_k \left(\delta\left(\omega + \frac{\pi k}{L}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi k}{L}\right) \right) \right) \quad (16)$$

Используя теорему о произведении и свойство (9) находим преобразование Фурье функции $\phi(t)$ в виде:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{2} \left(2c_0 \hat{W}(\omega) + \sum_{k=1}^{nHarm} c_k \left(\hat{W}\left(\omega + \frac{\pi k}{L}\right) + \hat{W}\left(\omega - \frac{\pi k}{L}\right) \right) \right) \quad (17)$$

Сформулируем требования, которым должна удовлетворять функция $\phi(t)$.

Требование 1. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 0$ (если функция фильтра $\varphi(t)$ удовлетворяет этому требованию, то отклик фильтра на входной сигнал, равный постоянной функции, будет нулевым).

Требование 2. Максимум функции отклика фильтра на сигнал, представляющий собой функцию $P(t)$ (функцию, описывающую форму пика рентгеновского излучения) должен быть равен 1. Если функция $P(t)$ четная, то это требование формулируется в следующем виде: $R_p(0) = 1$, где $R_p(t)$ функция отклика на пик единичной амплитуды

$$R_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) P(t - \tau) d\tau \quad (18)$$

Оптимальным фильтром будет фильтр, функция которого $\phi(t)$ обладает минимальной мощностью $Pwr = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(t) dt$, при выполнении требований 1 и 2. Объединим теперь требования

1 и 2 и критерий оптимальности (минимальная мощность функции фильтра) для спектра $\hat{\phi}(\omega)$ функции фильтра $\phi(t)$:

$$\hat{\phi}(0) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(\omega) \hat{\phi}(\omega) d\omega = 1 \quad (20)$$

В силу формулы Парсеваля критерий минимальной мощности функции фильтра допускает эквивалентное условие минимума функционала

$$Pwr^* = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}^2(\omega) d\omega \quad (21)$$

Критерий (21) вместе с условиями (19) и (20) позволяет сформулировать задачу нахождения коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$ для функции фильтра вида (15) в виде классической задачи о нахождении условного экстремума.

Если мы полагаем функцию окна $W(t)$ четной, то $\hat{W}(\omega)$ будет вещественной и симметричной, и условие (19) можно представить в виде условия, наложенного на коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$

$$\sum_{k=0}^{nHarm} A_k c_k = 0 \quad (22)$$

где коэффициенты определяются равенствами

$$A_k = \hat{W}\left(\frac{\pi k}{L}\right) \quad (23)$$

Для того, чтобы сформулировать условие (20) как условие, наложенное на коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$ введем в рассмотрение корреляционную функцию:

$$fCrl(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}(\omega - x) \hat{P}(\omega) d\omega \quad (24)$$

тогда условие (20) с учетом (17) дает второе условие, наложенное на коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$:

$$\sum_{k=0}^{nHarm} B_k c_k = 2\pi \quad (25)$$

где коэффициенты определяются равенствами

$$B_k = fCrl\left(\frac{\pi k}{L}\right) \quad (26)$$

Условие минимума функционала (21) эквивалентно условию минимума функции $nHarm + 1$ переменных $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$ $Q(c_0, c_1, \dots, c_{nHarm})$

$$Q(c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}) = \sum_{i=0}^{nHarm} \sum_{j=0}^{nHarm} q_{ij} c_i c_j \quad (27)$$

где коэффициенты квадратичной формы определяются равенствами

$$q_{ij} = fACrl\left(\frac{\pi(i-j)}{L}\right) \quad (28)$$

в которых $fACrl(x)$ автокорреляционная функция

$$fACr(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}(\omega - x) \hat{W}(\omega) d\omega \quad (29)$$

Таким образом, задача определения коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$, задающих функцию оптимального фильтра в виде (15), сводится к классической задаче нахождения условного экстремума: найти минимум функции (27) при условиях (23) и (25). Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа [6] получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_{nHarm}$ и двух неопределенных множителей λ_1 и λ_2 :

$$SMat \cdot \vec{X} = \vec{B} \quad (30)$$

где $\vec{X}$ - вектор- столбец неизвестных размерности $nHarm + 3$ с элементами определяемыми равенствами (31)

$$X_i = \begin{cases} \lambda_1, i = 1 \\ \lambda_2, i = 2 \\ c_{i-3}, i > 2 \end{cases} \quad (31)$$

$\vec{B}$ - вектор столбец свободных членов размерности $nHarm + 3$ с элементами определяемыми равенствами (32)

$$B_i = \begin{cases} 2 \cdot \pi, i = 2 \\ 0, i \neq 2 \end{cases} \quad (32)$$

а $SMat$ квадратная матрица размерности $(nHarm+3) \times (nHarm+3)$, допускающая представление в виде блочной матрицы

$$SMat = \begin{pmatrix} ZP \\ P^T G \end{pmatrix} \quad (33)$$

где Z - нулевая матрица размерности 2×2 , P - прямоугольная матрица размерности $2 \times (nHarm + 1)$, элементы которой определяются равенствами

$$P_{ij} = \begin{cases} A_j, i = 1 \\ B_j, i = 2 \end{cases} \quad (34)$$

а G - квадратная матрица размерности $(nHarm + 1) \times (nHarm + 1)$ элементы которой определяются равенствами $G_{ij} = 2 \cdot q_{ij}$.

Таким образом, при заданной “ширине окна” L и числе гармоник $nHarm$ алгоритм построения FIR filter сводится к решению системы линейных уравнений (30) и нахождению весовых коэффициентов фильтра по формулам (7), где функция $\phi(t)$ имеет вид (15). При практическом расчете необходимо задаться некоторой пороговой величиной $\delta > 0$ и отбросить те весовые коэффициенты, модуль которых меньше δ , а затем произвести нормировку весовых коэффициентов для выполнения равенства $\sum_{k=1}^N a_k \cdot P(k\Delta t - \frac{L}{2}) = 1$. Ширина окна L должна удовлетворять неравенству

$$L < \frac{\pi}{\Delta t} \quad (35)$$

С увеличением ширины окна (и соответственным увеличением числа весовых коэффициентов фильтра) качество фильтра улучшается. Ограничивающим фактором (в случае проектирования фильтра для обработки рентгеновских спектров), является возникновение накладывающихся друг на друга откликов фильтра на близкие друг к другу пики рентгеновского излучения, потому ширина окна должна подбираться опытным путем, как выбор компромисса между требованием подавления шумов и требованием минимизации числа ошибок, возникающих из-за наложения функций отклика фильтра.

Методика проектирования цифрового фильтра с конечной импульсной характеристикой, описанная в данной работе, тестировалась при создании программного обеспечения для обработки спектров рентгеновских флуоресцентных спектрометров. На рис. 4 приводится скриншот программы, производящей первичную обработку спектра. Материалом исследования служили спектрограммы, полученные при рентгенофлуоресцентном анализе различных веществ спектрометрами марок СРВ, которые производит ТОО «Техноаналит» (г. Усть-Каменогорск, Казахстан).

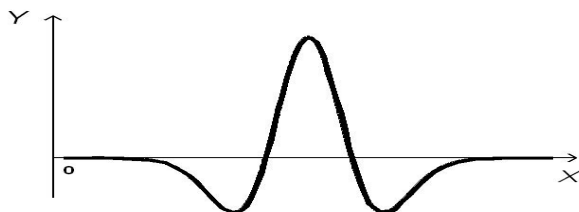


Рисунок 4 Обработка спектра (скриншот), функция отклика фильтра показана бирюзовым цветом

Применение цифровой фильтрации в задачах первичной обработки спектра (детектирование пиков характеристического излучения, обнаружение дуплетов и т.д.) резко повышает качество обработки спектров с развитым фоном и высокой зашумленностью, что подтверждено успешной апробацией нашей разработки на обработке рентгеновских флуоресцентных спектров. Особенно велико значение алгоритмов детектирования, основанных на применении цифровой фильтрации, при проектировании систем автоматической обработки спектров. Все же, несмотря на практическую значимость приложения данного метода к задачам спектрометрии, на наш взгляд, оригинальная методика проектирования фильтра, основанная на операциях с непрерывной функцией фильтра, имеющей вид (15), представляет самостоятельный интерес, и, возможно, найдет применение в других приложениях теории цифровой обработки сигналов.

Заключение

Разработана методика проектирования КИХ-фильтра для применения в задачах первичной обработки спектрограмм рентгеновских флуоресцентных спектрометров (детектирование пиков характеристического излучения). Методика апробирована при разработке программного обеспечения для флуоресцентных спектрометров марки СРВ, которые производит ТОО «Техноаналит» (г. Усть-Каменогорск, Казахстан). Рассматриваемая методика проектирования оптимального фильтра по своему содержанию примыкает к методам синтеза цифровых фильтров, используемых в задачах обнаружения сигналов малой мощности на фоне помех, и потому может представлять интерес для специалистов в области цифровой обработки сигналов.

Список литературы

- [1] Rene Van Grieken, A.Markowicz Handbook of X-Ray Spectrometry Second Edition Taylor Francis 2001, 1016 p.
- [2] Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров, М.: Высш.шк., 1989, 352 с.
- [3] Антонию А. Цифровые фильтры: Анализ и проектирование, М.: Радио и связь, 1983, 320с.
- [4] Капелини В., Константи́нидис А., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение, М.: Энергаториздат, 1983, 360с.
- [5] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов, М.:Мир 2005, 671с.
- [6] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 2, М. ФИЗМАТЛИТ, 2003, 424с.

УДК 532.533

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕХНОЛОГИИ ПОСАДКИ МНОГОЯРУСНЫХ ФИЛЬТРОВ

А.Б. Кульджабеков, К.А. Алибаева, М.К. Инкарбеков, А. Калтаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Abstract. In this work the numerical study of the usage efficiency of the multistage filters setting technology on the process of mineral extraction by the in-situ leaching method is carried out on the basis of mathematical simulation. Obtained decisions for a multistage filters setting qualitatively conform to the experimental findings.

Keywords: wellbore, porosity, multi-stage filter setting, filtration, reagent, mineral, in-situ leaching (ISL).

Аңдатпа. Қарастырылып отырған жұмыста математикалық модельдеуге негізделі отырып көп сатылы фильтрлерді орналастыру технологиясының гидродинамикалық тиімділігі зерттелді. Ерітінді фильтрациясы үшін алынған шешімдер тәжірибе жүзінде алынған шешімдермен сәйкес келеді.

Кілттік сөздер: тығын маңы, кеуектілік, көп сатылы фильтрдің орналасуы, фильтрация, реагент, минерал, жер асты шаймалау.

Аннотация. В данной работе на основе математического моделирования проведено численное исследование гидродинамической эффективности технологии посадки многоярусных фильтров. Полученные решения для фильтрации раствора качественно согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: призабойная зона, пористость, многоярусная посадка фильтра, фильтрация, реагент, минерал, подземное выщелачивание (ПВ).

Введение. При рассмотрении задачи в призабойной зоне пласта ствол скважины рассматривается как поверхность с постоянным значением приведенного давления. В работе [6] показано, что такое допущение не показывает качественную картину течения флюида в призабойной зоне.

Для построения точной математической модели необходимо использовать уравнение Навье-Стокса внутри ствола вертикальной скважины, и законы фильтрации для моделирования фильтрации в пласте. Строго говоря, пришлось бы сшивать два закона на поверхности контакта порода-фильтр. Такое рассмотрение требует громоздких компьютерных вычислений, поскольку расчетная сетка должна быть достаточно густой, чтобы охватить внутренности ствола скважины [1].

В связи с этим течение жидкости в стволе скважины приближенно рассматривается как фильтрационное в некоторой фиктивной пористой среде с кажущейся проницаемостью k_1 , что позволяет перейти от использования уравнения Навье-Стокса к законам фильтрации в призабойной зоне. На практике значение k_1 определяется многими факторами (типом конструкции фильтра, его скважностью, формой перфорационных отверстий и т. д. Рисунок 1.).

Математическая постановка задачи. Определим закон движения флюида в стволе скважины через следующее соотношение

$$\frac{dP}{dz} = -f(u). \quad (1)$$

Где $f(u)$ - заданная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Для функции $f(u)$ можно принимать линейный, двучленный либо степенные законы движения в зависимости от интенсивности работы скважины [1].

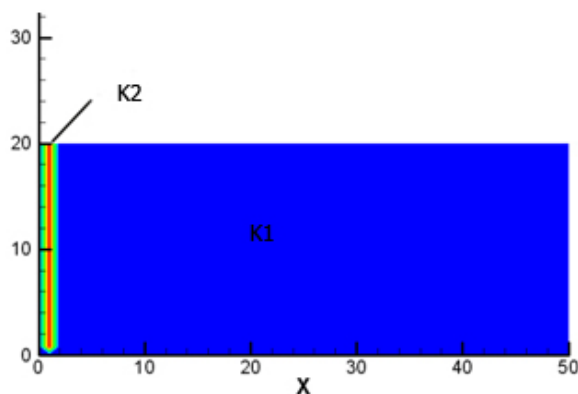


Рисунок 1 Призабойная зона скважины с проницаемостью k_1 . Добывающая скважина с проницаемостью k_2 отмечена красным цветом

Рассмотрим приток жидкости к скважине с многоярусной схемой посадки фильтров (Рисунок 1-2.). Закон движения в стволе скважины будем брать по закону (1) и считаем, что движение в стволе скважины подчиняется линейному закону и примем

$$f(u) = \frac{\mu u}{k_2}. \quad (2)$$

где μ - вязкость жидкости, k_2 - фиктивная проницаемость в стволе скважины, u - вертикальная скорость в стволе скважины.

Радиальный приток жидкости к фильтрам скважины определяется через известную формулу Дюпюи.

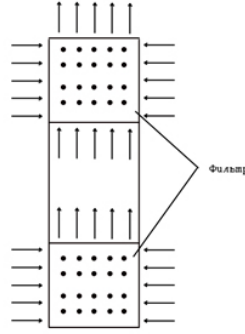


Рисунок 2 Многоярусная схема посадки фильтров

$$Q = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \left(\frac{P_0 - P_w}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \right). \quad (3)$$

где k_1 - проницаемость породы, P_0 - давление на контуре питания (пластовое давление), P_w - давление на скважине, R - радиус контура питания, r_c - радиус скважины, h - мощность пласта. Рассмотрим течение в канале ствола между плоскостями z и $z + dz$. Из формулы (3) получим приток жидкости к боковой поверхности скважины.

$$dq(z) = \frac{2\pi k_1 dz}{\mu} \left(\frac{P_0 - P(z)}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \right). \quad (4)$$

Здесь $P(z)$ - приведенное давление по высоте скважины. Из закона сохранения массы ясно, что сумма потоков проходящих через боковую поверхность нашего объема и через сечение z должна быть равна расходу через сечение $z + dz$. В случае участков скважины, где нет фильтров, мы не будем рассматривать радиальный приток к скважине, а только течение по каналу, т.е. положим $dq = 0$. Из закона сохранения массы получим

$$\begin{cases} \pi r_c^2 u(z + dz) = dq(z) + \pi r_c^2 u(z), & \text{для зоны с фильтром} \\ \pi r_c^2 u(z + dz) = \pi r_c^2 u(z), & \text{для зоны без фильтра} \end{cases} \quad (5)$$

После преобразований уравнений (1) и (5) получим уравнение (6)

$$\begin{cases} \frac{d^2 P(z)}{dz^2} = -\frac{2k_1 dz}{r_c^2 k_2} \left(\frac{P_0 - P(z)}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \right), & \text{для зоны с фильтром} \\ \frac{d^2 P(z)}{dz^2} = 0, & \text{для зоны без фильтра} \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) учитывает движение жидкости внутри ствола скважины, радиальный приток к ней распределение давления в ней по высоте и неоднородность по посадке фильтров. Кроме того, решение данной задачи можно будет применить, как граничное условие для трехмерного случая, поскольку приток к скважине учитывался радиально через формулу Дюпюи. Параметр k_2 - можно варьировать в участках скважины, где находятся фильтры. В данном случае примем $k_2 = \text{const}$ по всей высоте скважины.

Граничными условиями для задачи (6) будут служить условия на кровле пласта $z = b$ и на подошве $z = 0$, запишем

$$P = P_c \quad \text{при } z = b, \quad \frac{dP}{dz} = 0, \quad \text{при } z = 0. \quad (7)$$

Решение задачи (6), (7) можно получить, используя пакеты программ для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений или напрямую решая численно.

Рассмотрим приток к скважине с ярусной посадкой фильтров в пласте с мощностью $b = 28\text{м}$. Фильтры определим на высотах $z \in [5\text{м}; 11\text{м}]$ и $z \in [17\text{м}; 21\text{м}]$, причем координата z направлена вертикально вверх.

После решения задачи (6) получим распределение давления по высоте скважины, после этого используя формулу (4) мы можем найти дебит на каждом уровне z . Результаты решения задачи (6) приведены в виде графики для расхода $q(z)$ для случая, когда фильтры посажены по всей мощности и для ярусной посадки.

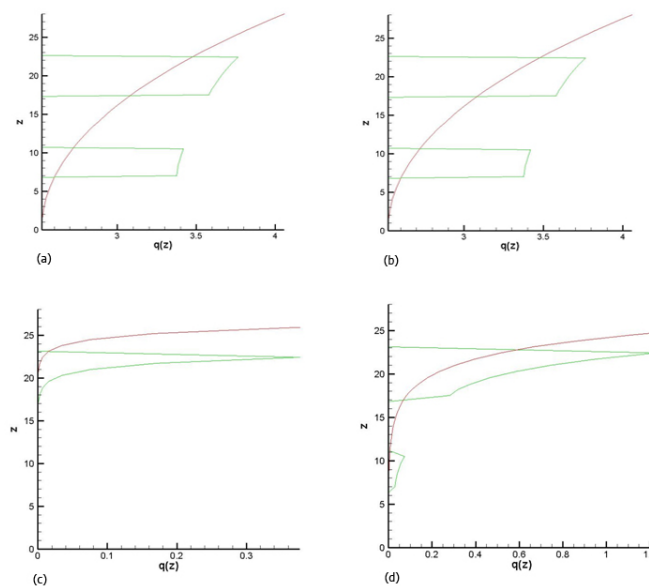


Рисунок 3 Расход жидкости по высоте скважины. Зеленая кривая показывает расход $q(z)$ при ярусной посадке фильтров, красная для полного фильтра по высоте z (при разных соотношениях коэффициентов k_1 и k_2)

3D модель процесса ПВ с учетом посадки многоярусных фильтров. Урансодержащая руда в основном разделены непроницаемыми слоями (Рис.5). В таких случаях фильтры располагаются только на урановой зоне. В связи с этим, в данном разделе рассматривается процесс извлечения минерала методом подземного выщелачивания с использованием многоярусной посадки фильтров.

Рассматривается фильтрация раствора в пористой среде с определенной проницаемостью. Процесс фильтрации несжимаемого раствора в пласте, содержащем растворяемый минерал, описывается законом сохранения массы и фильтрации (закон Дарси)

$$\operatorname{div} \left(\frac{K}{\mu} \operatorname{grad} p \right) = 0, \quad (8)$$

$$\vec{V} = -\frac{K}{\mu} \operatorname{grad} p. \quad (9)$$

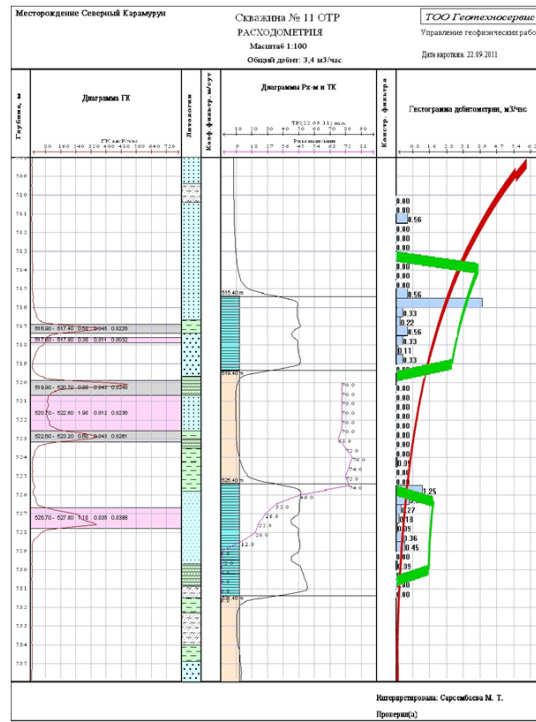


Рисунок 4 Качественное сравнение результатов расчета с данными из производственного эксперимента. Зеленая кривая показывает расход $q(z)$ при ярусной посадке фильтров, красная для полного фильтра по высоте z

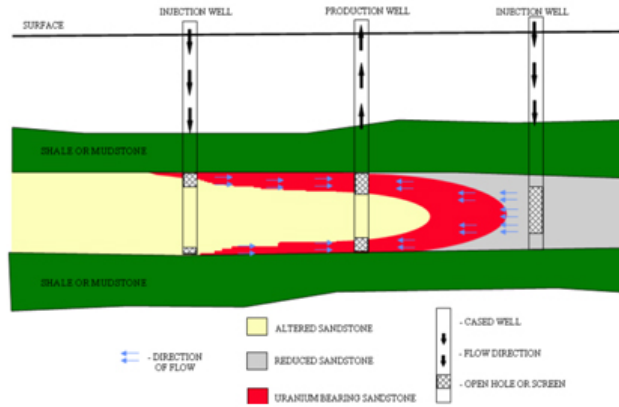


Рисунок 5 Схема посадки многоярусных фильтров [7]

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_s = 0, \left. p \right|_s = p_0 + \rho g z \quad (10)$$

где p – гидравлическое давление в резервуаре;

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = -\beta \theta C_r C_m \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta C_r}{\partial t} = \text{div}(\theta D \text{grad} C_r) - \vec{V} \text{grad} \theta C_r - \nu_1 \beta \theta C_m C_r + \sum_{i=1}^n q_i C_r^0 \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta C_p}{\partial t} = \text{div}(\theta D \text{grad} C_p) - \vec{V} \text{grad} \theta C_p + \nu_2 \beta \theta C_m C_r - \sum_{i=1}^n q_i C_p \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (13)$$

где $\nu_1 = \frac{\nu_r R}{\nu_m M}$, $\nu_2 = \frac{\nu_p P}{\nu_m M}$; K - коэффициент проницаемости, $\vec{V}$ - скорость фильтрации, β - коэффициент характеризующий скорость реакции, C_m - концентрация урана в твердой фазе, C_r - концентрация реагента в растворе, C_p - концентрация полезного компонента (урана) в растворе, C_m^0 - начальная концентрация минерала в твердой фазе, C_r^0 - концентрация реагента на закачной скважине, q - дебиты скважин ($q > 0$) для откачивающих скважин, ($q < 0$) для нагнетательных скважин), θ - пористость пласта, D - коэффициент гидродисперсии. Уравнения (11) – (13) решаются при соответствующих начальных и граничных условиях: в начальный момент известно распределение минерала в пласте, концентрация раствора и растворенного полезного компонента отсутствуют

$$\begin{aligned} C_m \Big|_{t=0} &= C_m^0, & C_r \Big|_{t=0} &= C_r^0, & C_p \Big|_{t=0} &= C_p^0 \\ \frac{\partial C_m}{\partial x} \Big|_G &= 0, & \frac{\partial C_m}{\partial y} \Big|_G &= 0, & \frac{\partial C_m}{\partial z} \Big|_G &= 0 \\ \frac{\partial C_r}{\partial x} \Big|_G &= 0, & \frac{\partial C_r}{\partial y} \Big|_G &= 0, & \frac{\partial C_r}{\partial z} \Big|_G &= 0 \\ \frac{\partial C_p}{\partial x} \Big|_G &= 0, & \frac{\partial C_p}{\partial y} \Big|_G &= 0, & \frac{\partial C_p}{\partial z} \Big|_G &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Схема расположения скважин представлена на рис.6. Из-за симметричности рассматриваемой области вычисление производится для блока состоящей из двух закачных и одной откачной скважин. Результаты вычисления показаны на рисунках 7,8.

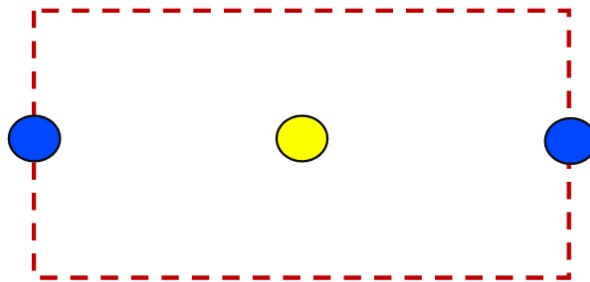


Рисунок 6 Схематический рисунок рассматриваемой области (две закачные скважины расположены на границе и одна откачная скважина - в центре области)

На рисунке 7 приведена зависимость степени извлечения минерала и концентрации продуктивного раствора на эксплуатационной скважине со временем. Концентрация продуктивного раствора появляется на эксплуатационной скважине несколько дней спустя (зеленая кривая) после старта закачки реагента. Концентрация минерала на эксплуатационной скважине постоянно растет до определенного значения затем начинает уменьшаться, когда степень извлечения достигает 60 процентов. Степень извлечения (красная кривая) становится устойчивым, когда она достигает примерно 85 процентов. Это означает, что дальнейшее извлечение минерала экономически нецелесообразно.

Заключение.

В расчетах скважина принималась как высокопроницаемый канал, зависящий от конструкции фильтра (скважности и формы перфорационных отверстий). Коэффициент фиктивной проницаемости оказывает сильное влияние на приток жидкости к скважине (рис. 5-8). Расчеты проведены для одной скважины, однако легко может быть применен для решения трехмерной задачи с множеством скважин. Результаты расчета показывают, что распределение расхода (притока

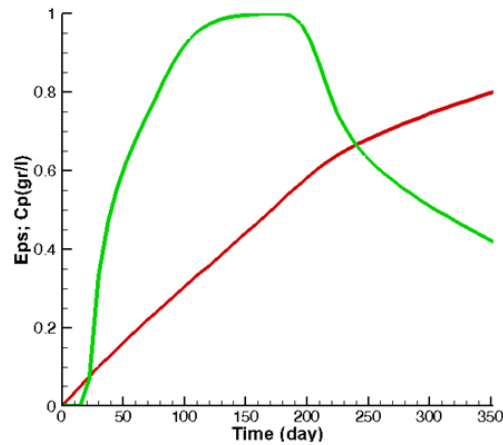


Рисунок 7 Изменение степени извлечения и концентрации продуктивного раствора на откачной скважине по времени. Красная кривая - степень извлечения минерала, зеленая - концентрация продуктивного раствора на откачной скважине

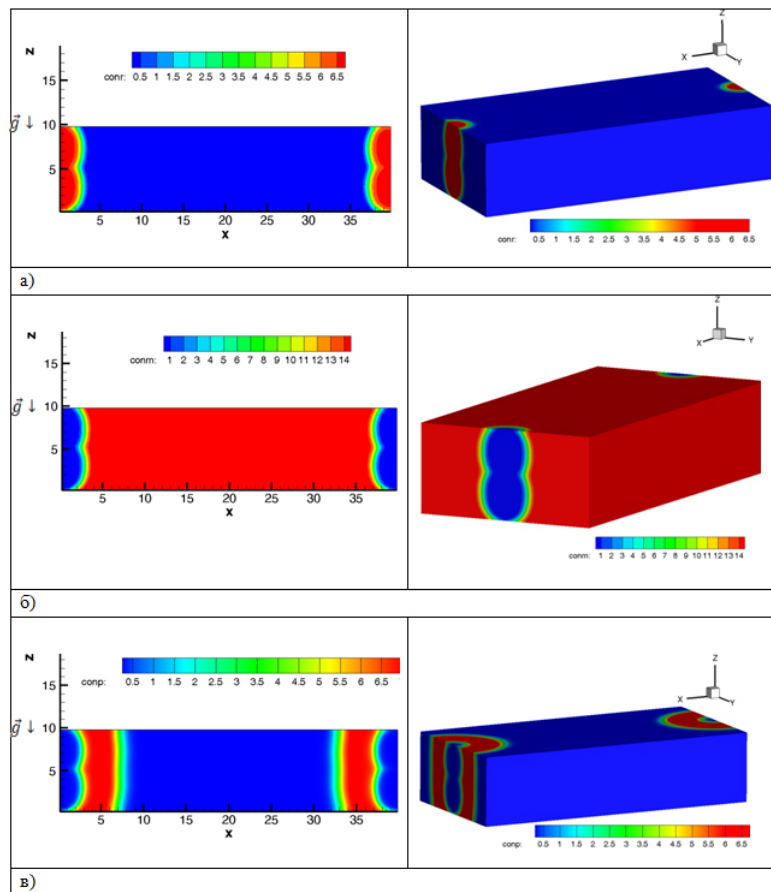


Рисунок 8 Распределение концентрации реагента (а), минерала (б), полезного продукта (в) в пласте при $T=7.5$ суток (поперечное сечение вдоль скважины и 3D)

жидкости) по высоте скважины не является равномерным. На рисунке 12. видно сгущение линий токов в верхней части фильтра совершенной скважины, что объясняет больший расход по сравнению с нижней частью. При использовании ярусной посадки фильтров расход по высоте скважины выравнивается и дает возможность для эффективной работы нижней части фильтра скважины.

Исходя из результатов решения рассмотренной задачи, можно заключить, что в случае заставивания нижней зоны скважины, из-за пескования или иных причин, целесообразно применять ярусную посадку фильтров, так как при использовании ярусных фильтров в застойной зоне появляется не нулевой радиальный приток который можно регулировать высотой посадки нижних фильтров и их скважностью.

Список литературы

- [1] Гидродинамические особенности течения жидкости в призабойной зоне скважины. Толпаев В.А., Захаров В.В. // Вестник СевКавГТУ. Серия "Физико-химическая". -Ставрополь, 2003. - №1(7). -с. 120-127.
- [2] Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пласта. Данаев, Н.Т., Корсакова, Н.К., Пеньковский, В.И. // Алматы: Казах университети, 2005. - 180с.
- [3] MT3DMS: A Modular Three-Dimensional Multispecies Transport Model for Simulation of Advection, Dispersion, and Chemical Reaction of Contaminants in Groundwater Systems; Documentation and User's Guide, by Chunmiao Zheng, P. Patrick Wang // Department of Geological Sciences, University of Alabama, 1999. - p. 160
- [4] Геотехнологические исследования при разработке металлов. Грабовников, В.А. // Москва: Недра, 1995. - 155 с.
- [5] Прогноз, поиски, разведка и промышленная оценка месторождений урана для отработки подземным выщелачиванием. Бровин К.Г., Грабовников В.А. и др. // Алматы: Ғылым, 1997. - 384 с.
- [6] Технологии параллельного программирования. Лупин С.А., Посыпкин М.А. // М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2008. – 208 с.
- [7] Uranium roll fronts <http://www.wma-minelife.com/uranium/mining/rllfrnt1.html>

УДК 528:332

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЪЕКТНО-КАРТОГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ГЕОПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ В РЕГИОНАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Д.В. Лисицкий, С.С. Дышлюк, Ж.А. Асылханова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. In article the main demands made to spatial data, digital and electronic cards, and also features of design of uniform digital information base for safety are considered.

Keywords: GIS, emergency situations, prevention, databases.

Аңдатпа. Мақалада кеңістік мәлеметтерге, сандық және электрондық карталарға, талап етілетін, сондай-ақ қауіпсіздікті қамтамасыз ету үшін бірегей сандық ақпараттық қоймасын жобалау ерекшелігінің негізгі талаптары қарастырылады.

Кілттік сөздер: геоақпарат жүйелері, төтенше жағдайлар, алдын алу, мәлеметтер қоймасы.

Аннотация. В статье рассматриваются основные требования, предъявляемые к пространственным данным, цифровым и электронным картам, а также особенности проектирования единой цифровой информационной базы для обеспечения безопасности.

Ключевые слова: геоинформационные системы, чрезвычайные ситуации, предотвращение, базы данных.

Развитие производственной и социальной сфер деятельности человечества сопровождается усложнением промышленных технологий и расширением их влияния на окружающую среду. Наблюдается общемировая тенденция роста числа и масштабов техногенных и природных чрезвычайных ситуаций (ЧС). Снижение социально-экономического ущерба от чрезвычайных ситуаций может быть достигнуто за счет заблаговременного прогнозирования возникновения ЧС и их последствий, организации предупредительных мер по устранению возможных причин аварий и катастроф, определения наиболее эффективных мер для ликвидации ЧС и оперативной поддержки принятия решений в кризисных ситуациях.

Оперативное реагирование на возникновение ЧС является основным фактором, определяющим эффективность управленческих решений. Природные и техногенные ЧС, как правило, быстрые, и эффективность управления определяется, главным образом, тем, насколько быстро в момент ЧС формируются адекватные решения. От этого зависит, насколько быстро и слаженно задействуются организационные механизмы. Катастрофы похожи на военные действия. Их «объединяет необходимость быстрого реагирования на происходящее и жесткие требования к системам управления при условии, что огромная организационно-техническая система будет задействована в течение минут».

Важнейшую роль в решении перечисленных задач должно сыграть создание в Казахстане государственной автоматизированной информационно-управляющей системы предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций - АИУС МЧС, ее территориальных и функциональных подсистем. Цель создания системы - реализация комплексного подхода к предотвращению и ликвидации ЧС. Проблема построения государственной автоматизированной системы по чрезвычайным ситуациям представляет широчайший фронт работ для создания научных основ и разработки прикладных систем в этой области. В мировой практике накоплен значительный опыт по комплексному решению задач автоматизированной поддержки принятия решений по предупреждению и ликвидации чрезвычайных ситуаций. Отечественные исследования ведутся сравнительно недавно.

В связи с этим, при выборе подходов к созданию современного информационного обеспечения органов МЧС Казахстана всех уровней необходимо ориентироваться на геоинформационные системы и технологии (ГИС-технологии), которые обеспечивают сбор, хранение, обработку и представление, как традиционной описательной информации, так и пространственной информации о территории, находящихся на ней объектах и происходящих (опасных) процессах.

Одним из наиболее привлекательных свойств ГИС-технологий для МЧС Республики Казахстан является их способность интегрировать (увязывать в единую систему) как разнородную информацию, так и различные функциональные (производственные) задачи. Это свойство ба-

зируется на том факте, что вся разнородная информация (алфавитно-цифровая, графическая, картографическая, видео и фотоснимки, математическое описание процессов), необходимая для организации и управления деятельностью МЧС, напрямую или косвенно относится к территории нашего региона, Восточно-Казахстанская область, и ее окружению и, следовательно, может быть привязана к карте или объектам (объекту) карты Казахстана (или части ее территории).

На «пространственной» основе удастся осуществить и интеграцию функциональных задач. Так как алгоритмы их решения базируются на интегрированной в единую систему (на основе ГИС-технологий) информации о территории области, то за счет выбора технологий решения этих задач (а для этого опять же подходят ГИС-технологии) и представления результатов их решения конкретным специалистам удастся реализовать взаимный обмен результатами решения этих задач.

Региональная ГИС по своему назначению является средством накопления, хранения и использования информации о разнообразных объектах и явлениях природного, хозяйственного, социально-экономического характера на заданном территориальном образовании, в связи, с чем она приобретает качества универсальной пространственной информационной системы. Такую разноплановую информацию о территории целесообразно организовывать в виде нескольких взаимосвязанных картографически представленных блоков: природно-ресурсного (включая недра, воду, лесное и сельское хозяйство), земельного, экологического, социально-экономического (включая инфраструктуру, в том числе транспорт и связь), что фактически наделяет региональную ГИС признаками отраслевых (тематических) и кадастровых информационных систем. Формирование таких блоков предлагается осуществлять по тематическому принципу, в виде разделов и подразделов, для каждого из которых разрабатывается соответствующее картографическое покрытие. Под понятием картографическое покрытие в данной работе понимается геоинформационное пространство (или его часть), обеспеченное необходимым набором позиционных данных о геопространственных объектах заданной тематики, а также сопровождающих атрибутов, которые устанавливают однозначную связь каждого объекта с соответствующими атрибутивными таблицами внешней базы данных.

Региональная ГИС должна разрабатываться как многофункциональная система, способная решать широкий комплекс прикладных задач, основанных на использовании высокоструктурированных данных. Она должна ориентироваться на интегральное использование различного типа данных при решении всевозможных региональных задач, включая сложные процессы моделирования и прогнозирования ситуаций. Все это определяет комплексность и многообразие состава ее баз данных.

Практической реализацией такой модели и является построение БД региональной ГИС, проводимое с целью описания местности на концептуальном уровне в терминах предметной области моделируемых объектов, их свойств и отношений. Разработка структуризации данных в представленной модели БД осуществлялась исходя из стремлений получить систему открытой и приближенной к базе знаний. С этой целью для всей совокупности слоев картографических покрытий определялся оптимальный набор объектов местности, которыми должен оперировать пользователь как объектами региональной ГИС при ее эксплуатации. Объекты выбираются с учетом базы знаний, формируемой вокруг них, что подразумевает, в первую очередь, положение конкретной группы объектов в иерархии других (в системе классификации/легенде карт), ареал их распространения по территории (концентрация, характер распределения), расположение относительно друг друга (включение одних объектов в другие, примыкание, совпадение, несовпадение в про-

странстве и пр.). Именно такое описание и представление объектов оперирования ГИС, когда выбор, классификация и определение основаны на превалирующем описании их сущности как объектов местности с одновременным подчиненным учетом особенностей картографической выразительности (включая облик, содержательную сущность и характеристики) будут в дальнейшем определяться как объектно-картографическое представление.

В пределах картографического покрытия объекты распределены по слоям, что позволяет оперировать группами и совокупностями групп объектов различных категорий. Каждый объект слоя посредством идентификаторов связывается с соответствующей таблицей «дерева» семантических и атрибутивных характеристик объектов ГИС, разработанного с учетом классификаций, которые приняты в той или иной предметной области, и организованного с помощью реляционной СУБД. В общем виде такая структура характеризуется многократным ветвлением атрибутов, которые описывают свойства всего множества отображенных на картах объектов, признаки их иерархического положения как объектов карт (рисунок 1). Это обеспечивает связь каждого графически отображаемого объекта с любой классификационной группировкой предлагаемой схемы, что позволяет, с одной стороны, описывать его семантическую сущность, с другой - извлекать любые сочетания объектов по запрошенным смысловым значениям или характеристикам. Система таких взаимосвязанных таблиц эффективна для организации данных в БД и обеспечивает в ней поддержку автоматической связи объектов во всех случаях, когда она однозначна и прописывается строгой иерархической системой соподчиненности, разработанной в соответствии с естественной классификацией объектов.

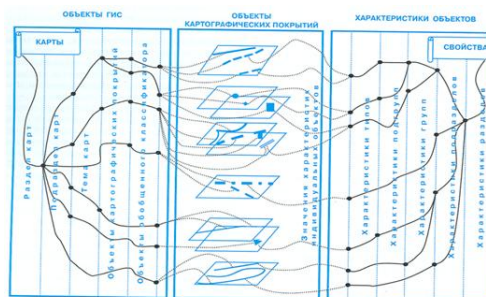


Рисунок 1 Структура базы данных региональной ГИС

При разработке структуры БД региональной ГИС в первую очередь был определен состав исходных данных, формирующих базу знаний о местности в рамках задач региональной ГИС. Состав данных разрабатывался как совокупность потенциальных объектов оперирования будущей ГИС. Объектно-картографический принцип, направленный на компактное и наглядное размещение множества позиционных и атрибутивных данных в БД, в какой-то степени оказывается аналогом картографического принципа размещения на ограниченной площади листа карты множества данных об объектах местности, представляемых в виде картографических моделей. Принципы, положенные в основу психологического восприятия объектов картографического изображения в качестве объектов местности, по аналогии были реализованы при объектно-картографической структуризации геопространственных объектов БД региональной ГИС.

Основными источниками для региональной ГИС являются топографическая карта, претендующая на роль базовой и ряд специализированных карт: геологических (собственно геологическая и карта полезных ископаемых), почвенных, ландшафтных, климатических, растительности и пр. В результате разработки объектного состава основных картографических покрытий региональной ГИС были сформированы наборы картографических объектов, вероятные в любом регионе.

Это осуществлялось в ходе анализа таблиц условных обозначений топографических и специализированных тематических карт, а также на основе содержания общегеографических атласов.

Топографические карты составляют значительную часть информации, которая необходима для формирования региональной ГИС. Их содержание помимо позиционных данных включает многочисленные атрибутивные характеристики объектов, зафиксированные в начертании картографических знаков и сопроводительных подписях. Чисто топографические объекты, являющиеся прерогативой исключительно топографической карты, чрезвычайно редки. В качестве основы была взята топографическая карта Восточно-Казахстанской области масштаба 1: 5 000 000 и социально-экономическая карта ВКО в масштабе 1: 2 500 000 (рисунок 2).

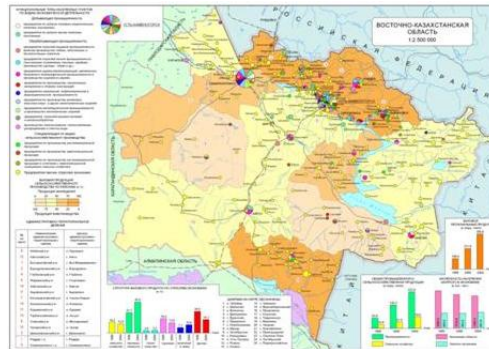


Рисунок 2 Социально-экономическая карта ВКО в масштабе 1: 2 500 000

Картографические данные, получаемые с карт, организованы в виде вложенных (иерархически подчиняющихся) группировок объектов различной тематики, образующих древовидную структуру. Фрагмент такой структуры, иллюстрирующий структуру нескольких тематических разделов БД, изображен на рисунке 3. Основу структуры составляет множество объектов картографических покрытий, представленных комплексом позиционных данных. Они обуславливают графическое отображение в ГИС и сопровождают связующие атрибуты, которые определяют их положение в иерархии тематических разделов карт и «дерева» характеристик (соответственно левая и правая части схемы).

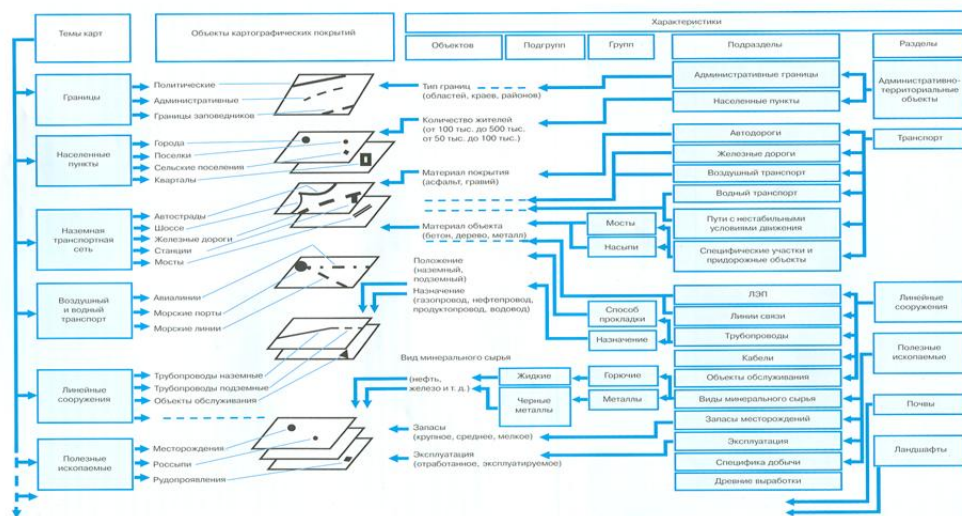


Рисунок 3 Принципиальная схема объектно-картографической организации данных в региональной ГИС (фрагмент)

Для создания цифровой карты был проведен анализ условных знаков. По условным знакам составляется классификатор.

Классификатор условных знаков – это совокупность условных знаков, применяемых для создания топографических электронных карт, с указанием их типа, подтипа, радиуса и уникального кода.

Код для условных обозначений разрабатывается согласно классификационному кодированию, которое делится на два вида: параллельное – основано на фасетной классификации; последовательное – основано на классификации по иерархической системе.

Каждый уровень классификатора соответствует отдельному слою векторного изображения карты в программе MapInfo и содержит в себе объединённые по какому-либо признаку условные знаки.

Разработка состава и структуры региональной ГИС направлена на объединение, взаимное дополнение и унификацию комплекса разнородных данных в терминах единой региональной ГИС. Полученная структура должна обеспечивать решение вопросов, возникающих при формировании БД из данных разных картографических источников, что предусматривает решение проблем согласования границ, отбраковки дублирующих и перекрывающихся данных, получения расширенных описаний объектов (семантик, атрибутов) путем объединения отдельных частных характеристик идентичных объектов, представленных на разных картах.

Особенности БД предложенной структуры в том, что, несмотря на обилие и разнородность помещаемых в ней сведений о разнообразных объектах и явлениях, она претендует на качества простой и понятной в восприятии информации и манипулировании данными, поскольку между всеми элементами структуры установлено иерархическое соподчинение. Таким образом, данные несут в себе информацию о структуре, т.е. организованы так, чтобы их смысл мог быть интуитивно воспринят пользователем как систематизированная и структурированная информация, служащая для непосредственного формулирования знаний об объектах и их свойствах в пределах понятий применяемой модели.

В разработанной структуре БД отображаются стандартные процессы восприятия информации, основанные в первую очередь на принципах от общего к частному, методом последовательного приближения к интересующему объекту по системе иерархий. От степени наглядности в структурировании данных зависит степень приближения такой БД к разряду интеллектуальных, поскольку получаемые при этом возможности манипулирования данными могут отдаленно воспроизводить традиционные процессы мышления, происходящие при чтении карт. Совокупность объектов БД выражена в ее концептуальной модели, на основе которой формируются знания о регионе.

Использование разработанного обобщенного классификатора позволит решить проблемы объединения и согласования данных в рамках региональной ГИС. Способствовать этому должны принципы наглядности, от общего к частному и последовательного приближения к сущности объекта, заложенные в основу построения предложенной концептуальной модели. Описываемый классификатором состав БД региональной ГИС может быть использован при разработке и формировании ГИС любого региона. Возможная адаптация структуры применительно к составу данных конкретного региона достигается путем несложных изменений в базе данных, сводящихся к добавлению новых ветвей и значений в таблицах-словарях. При этом структура классификатора остается практически неизменной.

Список литературы

- [1] Сербенюк С.Н. Картография и геоинформатика - их взаимодействие. – М.: МГУ, 1990
- [2] Журкин И.Г., Никишин А.Н. Концепция построения обобщенного картографического классификатора для региональной ГИС. //Геодезия и картография. - №10. – 2004
- [3] Щербаков, Ю.С. Обеспечение экологической безопасности крупных промышленных центров //Соврем, проблемы геодезии и оптики: ЛПІ научно-техн. конф. ч. II.- Новосибирск: СГГА, 2003

УДК 635.35.631.53.027

ПРИМЕНЕНИЕ ФИТОРЕГУЛЯТОРА ПРИРОДНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ ДЛЯ ВЫРАЩИВАНИЯ САДОВО-ПАРКОВЫХ КУЛЬТУР

С.С. Лутай, А.Л. Воробьев, А. А. Горячева, М.А. Асылхан

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. Influence of the natural origin phyto regulator a on viability, dynamics of growth and development of landscape gardening cultures is given in article and the possibility of using. The most productive concentration of the phyto regulator for acceleration of development of plants seeds is defined.

Keywords: Phyto regulators, biotechnology, growth regulators, plant hormones.

Аңдатпа. Мақалада бақ-саябақ дақылдарының шығымына, өсу және өну серпіндігіне табиғи тектік фиторегуляторлардың әсері туралы жазылған және оның игерушілігінің мүмкіндігін келтір. Өсімдіктердің тұқымдарының дамуын жеделдететін фиторегулятордың ең нәтижелі концентрациясы анықталды.

Кілттік сөздер: Фиторегулятор, биотехнология, бойдың реттеуіштері, фитогормондар.

Аннотация. В статье приведено влияние фиторегулятора природного происхождения на всхожесть, динамику роста и развития садово-парковых культур и возможность его использования. Определена самая результативная концентрация фиторегулятора для ускорения развития семян растений.

Ключевые слова: Фиторегулятор, биотехнология, регуляторы роста, фитогормоны.

В садово-парковом хозяйстве получение высококачественного посадочного материала в достаточном для производства количестве всегда является актуальным.

Применяемая в настоящее время агротехника выращивания посадочного материала часто не обеспечивает создания благоприятных экологических условий для прорастания семян, роста всходов и сеянцев.

В результате завышаются нормы посева, что в какой-то степени позволяет компенсировать недостатки агротехники. Повышению коэффициента использования семян и выхода стандартного посадочного материала с единицы площади могут способствовать агротехнические мероприятия, обеспечивающие управление ростом, т.е. получение особей с оптимальными параметрами.

С этой целью необходимо внедрять новейшие достижения науки в области усовершенствования технологии выращивания посадочного материала, с использованием современных экологически безопасных средств, в том числе стимуляторов роста, защитно-стимулирующих составов и др.

Одним из путей решения этого вопроса может быть посев семян и выращивание саженцев с использованием водорастворимых носителей, снабженных необходимыми элементами питания, регуляторами роста и другими компонентами. Это позволяет создать благоприятные условия для прорастания семян и роста всходов, повысить грунтовую всхожесть, осуществить точно заданный точечный высев, эффективно использовать биологическую энергию семян для гармоничного развития проростков и всходов, и, в конечном итоге, - обеспечить выращивание высококачественного жизнеспособного посадочного материала [1].

Перспективным приемом улучшения качества семенного материала является применение микроэлементов, которые необходимы не только для получения семян высокого качества, но позволяют также повысить экологическую устойчивость к действию неблагоприятных факторов внешней среды [2].

Важную научную проблему – повышение устойчивости к неблагоприятным факторам среды, болезням и вредителям – возможно решить с помощью регуляторов роста природного происхождения. Они являются экологически чистыми препаратами, гектарные дозы которых измеряются граммами и миллиграммами [3].

Современный уровень биотехнологий позволяет получить высокоэффективные, физиологически активные и экологически безопасные препараты, которые могут успешно использоваться в садово-парковом хозяйстве при выращивании растений различных видов. Применение физиологически активных веществ-регуляторов роста в садово-парковом хозяйстве является сравнительно новой и перспективной областью. Достигнутые в последние годы успехи в области теории и практики использования регуляторов роста позволяют считать их как самостоятельное и перспективное направление в области сельского хозяйства [4,5,6].

Регуляторы роста, применяемые в садово-парковом хозяйстве повышают интенсивность физиологических процессов в растениях, дают возможность полнее реализовать потенциальные возможности возделываемых культур. Следует учитывать, что регуляторы роста, как при предпосевной обработке семян, так и при опрыскивании вегетирующих растений используются в незначительных дозах, что даёт немалую экономию денежных средств, позволяет снизить расход средств защиты растений и значительно улучшить состояние окружающей среды [7].

Биологически активным веществом (БАВ) является любое вещество, стимулирующее регенерацию и рост организмов. В эту группу входят фитогормоны, стероидные гормоны и другие вещества, вырабатываемые в клетках растений и способствующие развитию организма.

В настоящее время все большее внимание уделяется препаратам, получаемым на основе экстрагирования древесных растений. Биологически активные вещества все более энергичное применение находят в сельском хозяйстве как в качестве стимулятора при подготовке семян к посеву, так и при внекорневой подкормке.

В настоящее время в сельском хозяйстве нашли широкое применение вещества биогенного происхождения или биопрепараты. В эту группу относят препараты, полученные на основе гуминовых кислот, стероидных гликозидов, продуктов метаболизма грибов-эндофитов и др. Помимо росторегулирующей активности фиторегуляторы влияют на метаболизм в тканях растений, в которых синтезируются внутриклеточные соединения, определяющие устойчивость растений к патогенам и стрессовым факторам окружающей среды [8].

В настоящее время все большее внимание уделяется препаратам, получаемым на основе эстрагирования древесных растений. Биологически активные вещества все более энергичное применение находят в сельском хозяйстве как в качестве стимулятора при подготовке семян к посеву, так и при внекорневой подкормке. Регуляторы роста растений, органические соединения, стимулирующие или тормозящие процессы роста и развития растений (природные вещества и синтетические препараты, применяемые при обработке с.-х. культур). Природные регуляторы роста представлены в растениях фитогормонами и ингибиторами роста, а также веществами типа витаминов [9].

К фитостимуляторам или фитогормонам относятся природные и синтетические органические соединения, которые влияют на жизненные процессы растений, не оказывая в используемых концентрациях токсического действия, и не являясь источником питания. Фитостимуляторы могут усиливать или ослаблять признаки и свойства растений в пределах нормы реакции, определяемой генотипом и наследственностью. С их помощью компенсируются недостатки сортов и гибридов, а также снимается неблагоприятное воздействие окружающей среды, что позволяет максимально реализовать потенциал продуктивности растений.

Фитогормоны полифункциональны, регулируют многие физиологические процессы, физиологическое действие их на растение зависит от следующих факторов:

1. Специфики фитогормона - спектра физиологического действия на растительный организм данного фитогормона;
2. Специфики объекта – видовых, органных, тканевых, возрастных и других особенностей растительного объекта, определяющих его восприимчивость к фитогормону;
3. Концентрации фитогормона – определенных границ концентраций, в которых фитогормон активизирует или ингибирует данный физиологический процесс;
4. Соотношение данного фитогормона с другими – от функционирования многокомпонентной гормональной системы, составляющей гормональное поле растения;
5. Обеспеченности растительного объекта необходимыми факторами минерального и углеродного питания;
6. Эндогенного содержания фитогормона – ответной реакции растительного объекта на экзогенный гормон, зависящей от его концентрации внутри растения;
7. Напряженности факторов внешней среды (свет, температура, вода и др.), создающих необходимые условия для действия фитогормона [10,11].

Для проведения исследований нами были взяты семена декоративного подсолнечника. Были отобраны лучшие по внешнему виду семена без внешних повреждений в количестве 100 штук. Замачивание производили 11 февраля 2013 года. Исследование действия биологически-активного вещества на всхожесть, рост и развитие декоративного подсолнечника производили на кафедре «ЛР, ТДиПП» ВКГТУ. Мы разработали способ приготовления фитостимулятора, основываясь на данных, полученных В.П. Филатовым, который обнаружил, что при неблагоприятных воздействиях на растения и животных в их тканях накапливаются сложные высокополимерные вещества небелковой природы, стимулирующие жизненные процессы и названные биогенными стимуляторами. В качестве исходного материала для получения ростостимулирующего препарата использовали зародыши яровой пшеницы. Изучали влияние фиторегулятора природного

происхождения на лабораторную всхожесть семян декоративного подсолнечника. Влияния различных концентраций фиторегулятора природного происхождения на лабораторную всхожесть семян декоративного подсолнечника в зависимости от концентрации и времени проращивания представлены на рисунке 1.

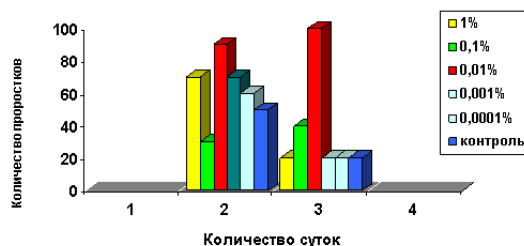


Рисунок 1 Влияние фиторегулятора природного происхождения на лабораторную всхожесть семян декоративного подсолнечника

Как свидетельствует рисунок 1, обработка семян фиторегулятором природного происхождения различных концентраций оказала положительное влияние на лабораторную всхожесть семян декоративного подсолнечника.

Из рисунка видно, что обработка семян 0,01 раствором фиторегулятора наибольшее количество первых проростков (90) появилось на 2 сутки после посадки, а весь период появления проростков занял 3 суток. Число проросших семян равно 100. Данная концентрация является самой продуктивной для посевной всхожести семян космеи в опыте 1.

В контроле период появления проростков растянулся до 3 дней, а количество всходов наблюдали в 7 случаях.

Процент всхожести семян при обработки раствором 0,01 концентрации равен 100, а в контроле – 70.

Изучали влияние фиторегулятора природного происхождения на полевую всхожесть семян декоративного подсолнечника.

Действие различных концентраций фиторегулятора на полевую всхожесть семян декоративного подсолнечника представлены на рисунке 2, в зависимости от концентрации и времени проращивания.

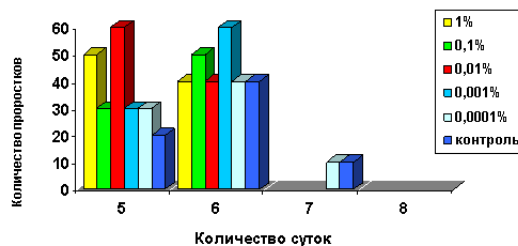


Рисунок 2 Влияние фиторегулятора природного происхождения на полевую всхожесть семян декоративного подсолнечника

Как свидетельствует рисунок 2, обработка семян данным фиторегулятором в различных концентрациях оказала положительное влияние на период полевой всхожести семян декоративного подсолнечника.

Так при обработке семян 0,01 раствором фиторегулятора наибольшее количество первых ростков (60) появилось на 5 сутки после посадки, а весь период появления всходов занял 6 суток. Число проросших семян равно 100. Данная концентрация является самой продуктивной для посевной всхожести семян декоративного подсолнечника в опыте 2.

В контроле период появления проростков растянулся до 7 дней, а количество всходов наблюдали в 7 случаях.

Процент всхожести семян при обработке раствором 0,01 концентрации равен 100, а в контроле – 70.

Изучали влияния фиторегулятора природного происхождения на высоту и диаметр растения. Изучение динамики развития растений за 7, 14, 21 дней осуществляли путем замеров: определяли высоту и диаметр растений.

Результаты действия различных концентраций фиторегулятора на высоту и диаметр декоративного подсолнечника показаны на рисунке 3.

№ п/п	Концентрация, %	7 суток		14 суток		21 сутки	
		Высота	Диаметр	Высота	Диаметр	Высота	Диаметр
1	1	7	0,01	9,5	0,012	13	0,015
2	0,1	7,5	0,011	10,5	0,013	13	0,016
3	0,01	8,5	0,012	11	0,015	15	0,018
4	0,001	8,5	0,011	11	0,014	14	0,017
5	0,0001	7,5	0,011	10,5	0,014	13	0,017
6	контроль	6	0,009	9	0,011	12	0,014

Рисунок 3 Влияния различных концентраций фиторегулятора природного происхождения на высоту и диаметр декоративного подсолнечника

Как свидетельствуют данные рисункам 3, обработка семян фиторегулятором природного происхождения оказала позитивное влияние на длину и диаметр декоративного подсолнечника.

При обработке семян 0,01 раствором фиторегулятора растение обладало наибольшим ростом в высоту и диаметром. Средние параметры растений оказались следующие: высота растений за 7 дней роста равна 8,5 см, диаметр 0,012 см; за 14 дней высота – 11 см, диаметр – 0,015 мм; за 21 сутки высота – 15 см, диаметр – 0,018. Данная концентрация является самой результативной для роста и развития декоративного подсолнечника.

В контроле растения имели более низкие характеристики вегетативного развития.

Изучали влияние фиторегулятора природного происхождения на динамику роста и развития декоративного подсолнечника за 1 месяц. Изучение динамики развития растений осуществляли путем замеров: определяли высоту и диаметр растений; количество листьев; длину листьев и корней.

Результаты действия различных концентраций фиторегулятора на динамику роста и развития декоративного подсолнечника за 1 месяц показаны на рисунке 4.



Рисунок 4 Влияния различных концентраций фиторегулятора на динамику роста и развития декоративного подсолнечника

Из данных рисунка 4 видно, что при обработке семян 0,01 раствором фиторегулятора у растения повышается вегетационная активность. Средние параметры растений следующие: высота растений – 23,5 см, диаметр 3,0 мм, длина листьев 2,5 см, длина корней 6,5 см. Данная концентрация является самой продуктивной для роста и развития декоративного подсолнечника.

В контроле растения обладали меньшими размерами. Средние показатели равны: высота растений – 17,3 см, диаметр 2,2 мм, длина листьев 1,9 см и корней 2 см.

В результате проведенных опытов нами была определена оптимальная концентрация фиторегулятора природного происхождения для выращивания садово-парковых культур. Во всех опытах концентрация фиторегулятора 0,01 концентрации является самой результативной, влияет на всхожесть семян, динамику роста и развития декоративного подсолнечника.

Можно рекомендовать сеять семена садово-парковых культур, обработанные фиторегулятором из проростков яровой пшеницы с концентрацией 0,01.

Список литературы

- [1] Пентелькина Н.В., Буторин А.Н., Родионова М.В. Повышение всхожести семян путем обработки стимуляторами роста – 5 с.
- [2] Реймерс Н.Ф. Природопользование: словарь-справочник / Н.Ф. Реймерс. - М.: Мысль, 1990. - 637 с.
- [3] Коф Э.М., Борисова Т.А., Аскоченская Н.А. Регуляторы роста природного типа и отдельные фазы онтогенеза // Итоги науки и техники, 1998. – 150 с.
- [4] Вакуленко В. В. Регуляторы роста // Защита и карантин растений. 2004. № 1. с. 24-26.
- [5] Никелл Л. Регуляторы роста растений (применение в сельском хозяйстве). М., 1984. – 190с.
- [6] Верзилов В.Ф. Регуляторы роста и их применение в растениеводстве.– М.: Наука, 1971. с. 12-23.
- [7] Регуляторы роста растений / Под ред. акад. ВАСХНИЛ В.С. Шевелухи. – М.: Агропромиздат, 1990. – с. 6-35.
- [8] Пентелькина Н. В. Экологически чистые технологии на основе использования стимуляторов роста / Экология, наука, образование, воспитание//Сб. науч. тр. БГИТА. Вып. 3. Брянск, 2002. с. 69-71.

- [9] Шевелуха В.С., Блиновский И.К. Состояние и перспективы исследований и применения фитогормонов в растениеводстве // В кн.: Регуляторы роста растений.- М.: Агропромиздат, 1990.- С. 6-35.
- [10] Цицин Н.В. Фитогормоны- регуляторы роста растений. – М.: Наука, 1975. – 95 с.
- [11] Полевой, В.В. Фитогормоны /В.В. Полевой. - Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1982. - 249с.

УДК 004.942

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ПОТОКА ПРОДУКТОВ РЕАКЦИИ В ДВУХСТУПЕНЧАТОМ УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ДЕТОНАЦИОННОГО НАПЫЛЕНИЯ

Н.А. Макарова

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова (г. Барнаул)

Abstract. There are the results of numerical simulation of a two-stage device for detonation spraying in the article. The second stage is represented with a turbulizing nozzle filled with argon. Virtual experiment was conducted in Ansys CFX. Previously premixed propane-butane and oxygen mixture in stoichiometric ratio was used as reacting mixture. Scheme of device has been proposed which allows to reach the speed of the reaction products of the order of 2500 m/s with linear dimensions of the device of approximately 1 m.

Keywords: Detonation spraying, detonation, virtual experiment, gas dynamic of combustion.

Аннотация. В статье приведены результаты численного моделирования работы двухступенчатого устройства для детонационного напыления покрытий. Вторая ступень представлена турбулизирующей насадкой с аргонным наполнителем. Виртуальный эксперимент проводился в среде Ansys CFX. В качестве реагирующей смеси выступали предварительно перемешанные пропан-бутановая смесь и кислород в стехиометрическом соотношении. Была предложена схема устройства, позволяющая достигать скорости продуктов реакции порядка 2500 м/с при линейных размерах установки около 1 м.

Ключевые слова: детонационное напыление, детонация, виртуальный эксперимент, газодинамика горения.

Технологии модификации поверхности служат для восстановления поверхности детали или придания ей особых свойств путем нанесения дополнительного покрытия [6]. Поверхностные покрытия занимают все более важную роль в промышленности. Это обусловлено повышением энергоэффективности и увеличением срока службы конструкций с напыленными покрытиями. Газотермическое напыление занимает уникальное положение в спектре технологий модификации поверхности по сравнению с другими технологиями нанесения покрытий, такими как гальванопластика [3]. Методом газотермического напыления можно наносить металлы, сплавы, керамические материалы, пластики и композиты [4].

Газотермическое напыление (ГТН) – это процесс нагрева, диспергирования и переноса конденсированных частиц распыляемого материала газовым потоком и формирование на подложке компактного слоя материала [6].

Существует несколько методов ГТН, хорошо зарекомендовавших себя в решении различных задач напыления. На рисунке 1 представлена сравнительная диаграмма наиболее распространенных методов ГТН в зависимости от скорости, до которой разгоняются напыляемые частицы и температуры их нагрева [5].

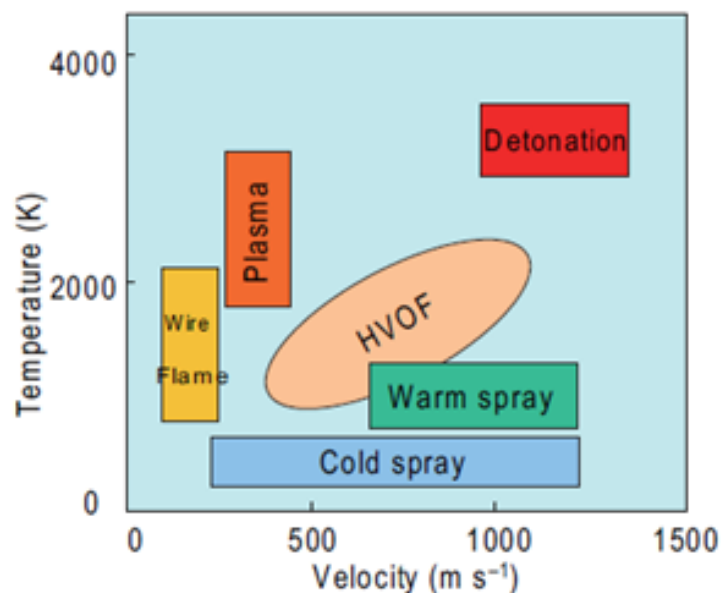


Рисунок 1 Диаграмма методов ГТН в зависимости от скорости (Velocity) и температуры (Temperature) частиц, где wireflame – газопламенное напыление, plasma – плазменное напыление, detonation – детонационное напыление, HVOF – высокоскоростное напыление, coldspray – холодное напыление, warm spray – «теплое» напыление

Каждый из существующих методов хорошо зарекомендовал себя применительно к определенным типам задач. При этом потребности производства диктуют необходимость разрабатывать новые способы нанесения покрытий [4].

Так, японские ученые Сэидзи Курода, Дзин Кавакита, Макото Ватанабэ (Национальный институт материаловедения) и Хироси Катанода из г. Кагошима успешно применили [3] подход к нанесению покрытий, заключающийся в разгоне частицы до скоростей, достаточных для достижения уровня кинетической энергии, достаточного для пластичного взаимодействия с подложкой. Warm spraying («теплое» напыление) – метод напыления, идея которого основана на смешении инертного газа (азота) и реагирующей смеси для контроля над температурой частиц [2].

Исследователями продемонстрированы возможности данного метода при напылении титана [1, 2, 3]. При этом отмечаются значительные недостатки метода, такие как значительное количество паров воды, непрореагировавшего топлива и кислорода [3].

На рисунке 1 представлена базовая схема разработанного авторами устройства. Пропан-бутановая смесь и воздух подаются в детонационную камеру, где при помощи свечи зажигания происходит инициирование детонационной волны. Одновременно с заполнением камеры реагирующей смесью на стабилизирующем участке до подачи порошка происходит впрыск инертного газа (аргона), который создает газовую пробку, снижая температурное воздействие продуктов

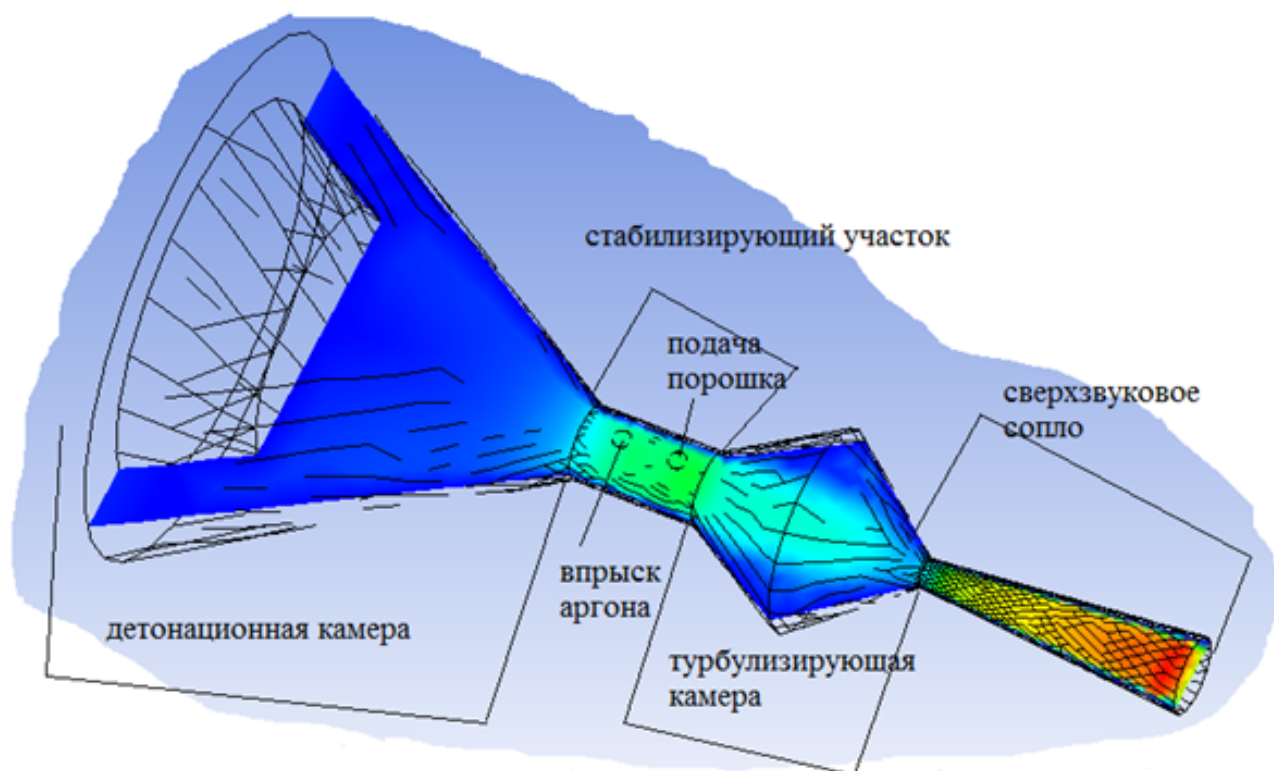


Рисунок 2 Геометрическая модель устройства для детонационного напыления

реакции на частицы порошка. Волна и следующие за ней продукты реакции начинают движение по стволу устройства, встречают на своем пути аргонную пробку, толкают ее до турбулизирующей камеры. В данной камере происходит турбулизация потока, благодаря которой частицы с разными скоростями перемешиваются и попадают в сверхзвуковое сопло. На выходе из сопла поток достигает максимальной скорости (красный цвет на рисунке).

Авторами была разработана методика проведения виртуального эксперимента по процессу распространения детонационной волны в камере и стволе устройства для детонационного напыления и проведено исследование скорости распространения потока в двухступенчатой детонационной камере. Исследование проводилось конечно-элементной методикой Вычисляемая жидкостная динамика (Computational Fluid Dynamics - CFD) в среде AnsysWorkbench.

Конструкция установки преследует две цели: добиться максимальной скорости продуктов реакции и снизить температурное влияние на частицы напыляемого порошка.

Для увеличения скорости продуктов реакции используется прием профилирования канала, т.е. добавления в схему устройства турбулизирующих камер. На рисунке 3 показаны результаты виртуального эксперимента над моделями устройства с одной турбулизирующей камерой. Как было показано в [7] использование более двух камер нецелесообразно.

Наилучшие результаты скорости газовой смеси наблюдаются в камере с двумя стабилизирующими участками (по 30 мм.) и турбулизирующей камерой с конусной и обратно-конусной частями (рисунок 3 а). При такой конструкции поток газа достигает скорости порядка 2000 м/с.

Для дальнейшей оптимизации на выходном участке ствола устройства используется сопло по аналогии с соплами, используемыми в технологии холодного напыления [6].

Газодинамический конечно-элементный анализ (рисунок 4) показывает значительное увеличение скорости продуктов детонации (выше 2500 м/с).

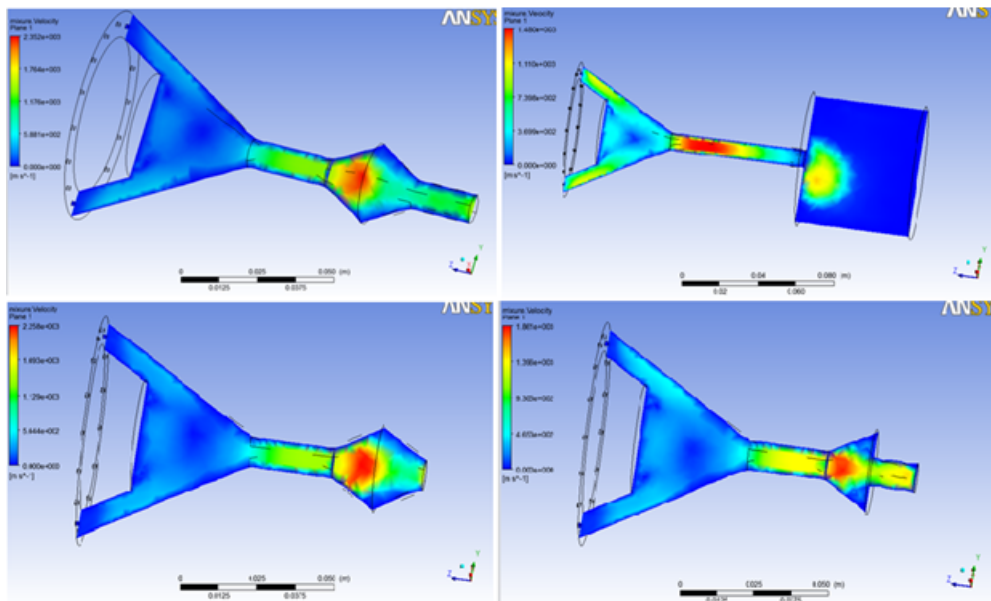


Рисунок 3 Конструкции устройства для детонационного напыления покрытий: а) с двумя стабилизирующими участками и конусно-обратноконусной насадкой; б) с одним длинным стабилизирующим участком и цилиндрической камерой; в) с одним стабилизирующим участком и конусно-обратноконусной насадкой; г) с двумя стабилизирующими участками и конусной насадкой

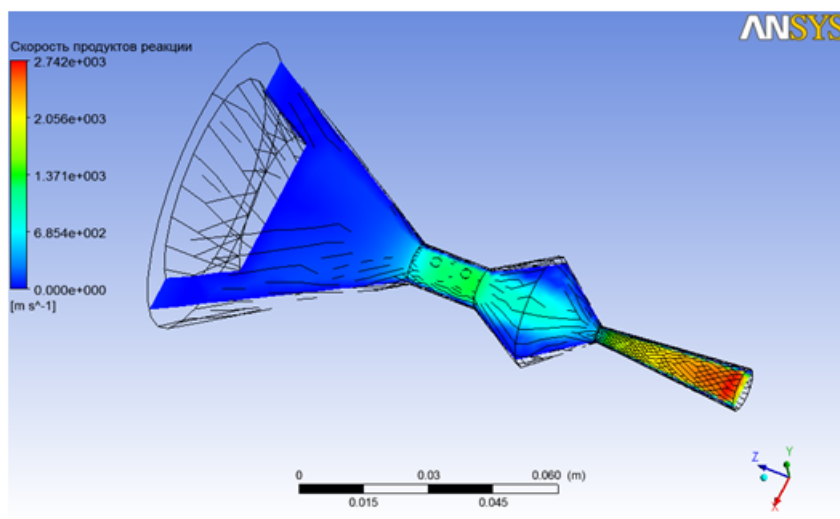


Рисунок 4 Диаграмма распределения скоростей в двухфазном (продукты детонации – инертный газ) потоке в модели устройства для детонационного напыления

Таким образом, методом компьютерного моделирования была проведена оптимизация геометрии устройства для детонационного моделирования для достижения максимальных показателей скорости потока. Результаты моделирования свидетельствуют о возможности достижения скорости продуктов детонации порядка 2500 м/с при конструкции устройства со стабилизирующим участком, одной турбулизирующей насадкой с конусной и обратно-конусной частями и сверхзвуковым соплом на выходном участке.

Список литературы

- [1] Kim K., Kuroda S., Watanabe M/ Microstructural Development and Deposition Behavior of Titanium Powder Particles in Warm Spraying Process: From Single Splat to Coating / Journal of Thermal Spray Technology, 2010 vol. 19 (6), pp. 1254-1264.
- [2] Kim K., Kuroda S., Watanabe M., Huang R., Fukunuma H., Katanoda H. Comparison of Oxidation and Microstructure of Warm-Sprayed and Cold-Sprayed Titanium Coatings / Journal of Thermal Spray Technology, 2012 vol. 21 (3-4), pp. 550-560.
- [3] Kuroda S., Kawakita J., Watanabe M., Katoda H. Warm spraying—a novel coating process based on high-velocity impact of solid particles / Sci. Technol. Adv. Mater., 2008, 9(3), p 033002 (17 pp).
- [4] Pawlowski L. The Science and Technology of Thermal Spray Coatings / L. Pawlowski. – New York: Wiley, 2006 – 644 p.
- [5] Yokoyama K., Watanabe M., Kuroda S., Gotoh Y., Schmidt T., Gertner F. / Simulation of Solid Particle Impact Behavior for Spray Processes. / Materials Transactions, Vol. 47, No. 7 (2006) pp. 1697-1702.
- [6] Газотермическое напыление: учебное пособие / кол.авторов; под общей ред. Л.Х. Балдаева. – М: Маркет ДС, 2007. – 344 с.
- [7] Смирнов Н.Н., Никитин В.Ф. Влияние геометрии канала и температуры смеси на переход горения в детонацию в газах / Физика горения и взрыва, 2004. – Т.40 (№2), с. 68-83.

УДК 553.551 (574.4)

К ОЦЕНКЕ ПЕРСПЕКТИВ ДЕЛЬБЕГЕТЕЙСКОГО ОЛОВОРУДНОГО УЗЛА

И.Е. Матайбаева, Б.А. Дьячков, Н.П. Майорова, З.И. Черненко

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. Tin rare metals mineralization of Delbegetey ore cluster is genetically related to the granites delbegetey complex. The indicators of metasomatic formations with cassiterite-sulphide mineralization situated in the exocontact of Delbegetey massive are tinny tourmaline, quartz, actinolite and axinite. Elements of the indicator-sulfide-tin mineralization - *Sn*, *Bi*, *As*, *Ag*, *Cu*. From this perspective projection made Delbegetey area from the surface and at depth. Tin rare metals mineralization Delbegeteysky ore cluster

Keywords: Tin rare metals mineralization, Delbegetey ore cluster

Аңдатпа. Қалайы сирек металлды Делбегетей кенді түйіннің кенденуі дельбегетей граниттік кешенімен генетикалық байланыста. Делбегетей массивінің экзоконтактінде дамыған сульфидті-касситериттік минерализацияданған метасоматикалық жаралымдар индикаторларға қалайы турмалин, кварц, аксинит және актинолит қатысты. Сульфидті-қалайы кенденудің элементтер-индикаторлар – *Sn*, *Bi*, *As*, *Ag*, *Cu*. Осы көзқарас бойынша Делбегетей учаскесінің тереңдікте және жер бетінен болашағын бағалауы өткізіледі.

Кілттік сөздер: Қалайы сирек металлды кендену, Делбегетей кенді түйін

Аннотация. Оловоредкометалльное оруденение Дельбегетейского рудного узла генетически связано с гранитами дельбегетейского комплекса. К индикаторам метасоматических образований с сульфидно-касситеритовой минерализацией, развитых в экзоконтакте Дельбегетейского массива, относятся оловоносный турмалин, кварц, аксинит и актинолит. Элементы-индикаторы сульфидно-оловянного оруденения – *Sn*, *Bi*, *As*, *Ag*, *Cu*. С этих позиций производится перспективная оценка Дельбегетейского участка с поверхности и на глубину.

Ключевые слова: Оловоредкометалльное оруденение, Дельбегетейский рудный узел

В настоящее время в Казахстане остро стоит проблема воссоздания собственной минерально-сырьевой базы редких металлов и, в первую очередь, тантала, ниобия, бериллия и лития, которые широко используются в сфере высоких технологий (атомная промышленность, ракетная техника, производство твердых сплавов и др.) в этом плане целесообразно продолжить оценку перспектив Дельбегетейского рудного узла на возможность обнаружения скрытого редкометалльного оруденения (*Sn*, *Be* и др.), связанного с гидротермально-измененными породами надинтрузивной зоны гранитного массива (кварц-турмалиновые метасоматиты, зоны грейзенизации, окварцевания и олово-сульфидной минерализации). Главная задача заключается в разработке технологических и минералого-геохимических индикаторов для прогнозирования и поиска, скрытых редкометалльных месторождений. Особое значение для уточнения стадийности рудообразований имеет выявление корреляционной связи группы сульфидных элементов (*Cu*, *Pb*, *Zn*, *As* и др.) и редких металлов (*Sn*, *Be*, *Li*, *Mo* и др.)

Дельбегетейский перспективный участок расположен в южном экзо – и эндоконтакте одноименного гранитного массива (Западная Калба). Характеризуется развитием грейзеновых и кварцевожилых оловянных месторождений и рудопроявлений (Кызылжал, Шерловое, Аркат, Изумрудное и др.), а также проявлением оловянных руд повышенной сульфидности типа минерализованных зон (Юбилейный Октябрь). В изучение этих объектов большой вклад внесли В.Ф. Кащеев, А.Р. Бутко, М.П. Материлов, А.Г. Алексеев, В.А. Нор и другие. Имеются многочисленные следы разработки оловорудных объектов древними рудокопами. В последние годы здесь производилась разработка Изумрудного рудопроявления модульным способом. Особенности геологического строения и рудных объектов Дельбегетейского массива рассмотрены в ряде публикаций [1-4]. В геологическом строении изучаемой территории развиты терригенные отложения аганактинской (C1s) и буконьской (C2-3) свит, перекрытых рыхлыми осадками неогеновой и четвертичной систем. Интрузивные образования представлены дайками габбро-диабазов аргимбайского комплекса (C2-3), малыми интрузиями и дайками кунушского комплекса (C3) и гранитоидами дельбегетейского комплекса (P2).

Проводимые исследования позволяют уточнить оценку перспектив дельбегетейского участка на основании следующих данных. Определена геолого-структурная позиция Дельбегетейского гранитоидного массива, приуроченного к узлу пересечения широтного, меридионального и северо-западного глубинных разломов, активизация которых сопровождалась неоднократным поступлением гранитных расплавов и метасоматическими процессами (микроклинизация, грейзенизация, турмалинизация, скарнирование и окварцевание) в надинтрузивной зоне.

Четко проявлена генетическая связь всех типов оловянного оруденения с гранитами дельбегетейского комплекса, базирующаяся на геолого-структурных и минералого-геохимических критериях. Рудовмещающими являются среднеравномернотекстурированные биотитовые миароловые граниты II фазы, состоящие из калиевого полевого шпата (36,1%), кислого плагиоклаза (31,5%), ксеноморфного кварца (30%), биотита (2,3%) и аксессуариев (0,1%). Средний состав отвечает нормаль-

ным гранитам плюмазитовой серии, с общей железистостью $f = 79.25$ и содержанием F (0,4%). Для этих гранитов характерны миароловые гнезды, содержащие идиоморфные кристаллы мориона, раухтопаза, микроклина, шерла, топаза и аквамарина. Геохимически в них повышены кларки-концентрации Li , Mo , Sn , W , а в слюдах их миароловых гнезд и оловоносных грейзенов установлены высокие содержания фтора.

Построенная геолого-генетическая модель отражает вертикальную зональность проявления метасоматических процессов и оруденения в фильтрующей колонке, последовательную смену рудных формаций и минеральных типов, оловянных руд (микроклин-кварцевый, касситерит-топазовый, касситерит-турмалин-кварцевый, кварц-турмалин-сульфидный и др.). Получены доказательства о более раннем (догранитном) возрасте порфировых даек кунушского комплекса, которые срезаются и метаморфизуются гранитами Дельбегетейского массива с наложением на дайки сульфидно-касситеритовой минерализации (Юбилейный Октябрь).

Установлено контактово-метасоматическое преобразование вмещающих пород в процессе формирования гранитного массива. Особое внимание обращается на скарнирование известковистых песчаников буконьской свиты с образованием в них вторичных минералов – моноклинного пироксена, хлорита, актинолита, эпидотов, карбонатов и аксинита. Полосы амфиболитизированных песчаников прослеживаются в длину на несколько километров при мощности 1-20 м. они приурочены к зонам повышенной трещиноватости и брекчирования и связаны с контактово-гидротермальным воздействием скрытых гранитных апофиз Дельбегетейского массива. Макроскопически это породы светло-серой зеленовато-серой окраски, массивной текстуры и микрогранобластовой структуры. Петрохимически по сравнению с неизмененными песчаниками в них отмечается дефицит SiO_2 (52-56%), щелочей и привнос Ca , Mg , Fe^{2+} . Геохимическая специализация проявляется в привносе Sn (до 0,01-0,2%), Zn (до 0,1%), Li (0,05%), Cu (0,01%).

В гидротермально-измененных обохренных песчаниках, развитых в районе месторождения Юбилейный Октябрь, установлены повышенные содержания Sn , Bi , As при высокой положительной корреляции олова с мышьяком. Аномальные концентрации олова и мышьяка фиксируются также в кварц-турмалиновых, кварц-турмалин-сульфидных и аксинит-хлорит-актинолитовых метасоматитах, проявленных соответственно в Южной, Центральной и еривой зонах минерализации эжного экзоконтакта гранитного массива. В этих образованиях, типичных для верхней части рудоносной колонны, выявлена положительная корреляция мышьяка с Sn Mo , при надкларковых значениях Cu , Zn , Ni , Cr .

Для аксинит-хлорит-актинолитовых метасоматитов установлена высокая корреляция Sn с Zn , As (+0,89), Li (+0,62), Mo (+0,55). Количественным спектральным анализом штучных проб в этих метасоматитах установлено Sn (от 0,1 и более 0,3%), Be (от 0,08 и более 0,3%), Li (0,02-0,1%). Касситериты здесь содержат примеси Cu (0,4%), Zn (0,1%), As (0,15%) и являются не танталоносными ($Ta_2O_3 < 0,001\%$), $Nb_2O_5 (< 0,003\%)$. Они ассоциируют с турмалином (шерлом), содержащим Sn (до 1%), As (0,06%). Количественным спектральным анализом в турмалинах содержание Sn в пределах 0,08-1% при среднем значении по 8 пробам – 0,179%. В брекчированных и обохренных кварц-турмалиновых метасоматитах обнаружено Au (0,2г/т).

Кварц-турмалиновые метасоматиты на месторождении Юбилейный Октябрь, образовавшиеся в дайках кунушского комплекса, локализуются преимущественно в кварц-полевошпатовых порфирах и гранит-порфирах. Петрохимически их образование сопровождалось выносом щелочей, с меньшей степени кремнезема. Геохимически характеризуются привносом Sn , Bi , As , а также Cu и Pb . Олово имеет сильные связи с Li (+0,79) и слабую корреляцию с As (+0,37), Pb (+0,32),

Cu (+0,29). Турмалин содержит повышенные концентрации *Sn* (0,1-0,15%), *As* (0,05-0,1%), *Zn* (0,05%), *Cu* (0,06%).

Таким образом, оловоредкометалльное оруденение Дельбегетейского рудного узла генетически связано с гранитами дельбегетейского комплекса. Одним из главных доказательств, кроме тесной пространственной связи гранитоидов и рудных объектов, явилось выявление в миароловых гнездах гранитного массива идиоморфных кристаллов мориона, микроклина, шерла, топаза, берилла, крупнопластинчатого мусковита. Такие же минералы типичны для топаз-турмалин-кварцевых грейзенов известных месторождений и рудопроявлений (Топазовое, Зарница, Кызылжал и др.). поэтому минералами-индикаторами для прогнозирования и поиска оловорудных грейзенов в гранитоидах являются топаз, флюорит, турмалин и берилл. К индикаторам метасоматических образований с сульфидно-касситеритовой минерализацией, развитых в экзоконтакте Дельбегетейского массива, относятся оловоносный турмалин, кварц, аксинит и актинолит. Элементы-индикаторы сульфидно-оловянного оруденения – *Sn*, *Bi*, *As*, *Ag*, *Cu*. С этих позиций производится перспективная оценка Дельбегетейского участка с поверхности и на глубину.

Список литературы

- [1] Дьячков Б.А., Воронцов И.Н., Майорова Н.П. Новые данные по геологии и рудоносности Дельбегетейского рудного узла // Изв. АН Каз. ССР. Сер. Геол., 1983. №6. С. 8-17.
- [2] Дьячков Б.А., Гавриленко О.Д., Майорова Н.П., Бочкова О.Н. Миаролова минерализация гранитов как индикатор оловорудного метального оруденения // Записки всероссийского минералогического общества. №5. 1992 . С. 16-26.
- [3] Материков М.П., Сирина Т.Н. К вопросу о возрасте оловянного оруденения Калбы и его соотношение с магматизмом // Геология оловорудных районов и месторождений Казахстана и Средней Азии. Алма-Ата: Каз ИМС, 1982. С. 125-138
- [4] Щерба Г.Н., Дьячков Б.А., Гавриленко О.Д. К систематике оловорудных месторождений // Геология рудных месторождений. 1989. №5. С. 98-105

УДК 00.574

ОСНОВНЫЕ МИНЕРАЛЬНЫЕ АССОЦИАЦИИ МЕСТОРОЖДЕНИЯ СЕКИСОВСКОЕ (ВОСТОЧНЫЙ КАЗАХСТАН)

А. Мизерный, Р. Селтманн, М. Рафаилович, Е. Наумов

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева; Музей Естественной истории, г. Лондон (CERCAMS); НИИ Природных ресурсов ЮГГЕО; Институт геологии и минералогии СО РАН

Abstract. The oxidized and primary stockwork the ores of Sekisovskoe deposit occur in the cement of Explosive-hydrothermal breccias. The major ore minerals are pyrite, chalcopyrite, sphalerite,

pyrrhotite, galena, and failure. The major ores elements are gold and silver. There are some tellurium minerals: altaite, petcite, hessite, sylvanite, calaverite and etc.

Keywords: Geology, Sekisovskoe deposit, gold, Kazakhstan.

Аңдатпа. Кендену мен бастапқы геохимиялық ореолдардың құрылу моделін қоса отырып, қара қабаттасты түзілімдерде орналасқан, Бақыршық типті алтын кенді кенорындардың геологиясы сипатталған.

Кілттік сөздер: Геология, Секисовка кенорны, алтын, Қазақстан.

Аннотация. Окисленные и первичные руды Секисовского месторождения приурочены к цементу эксплозивных гидротермальных брекчий. Главные рудные минералы: пирит, халькопирит, сфалерит, пирротин, галенит. Главные рудные элементы – золото и серебро, в небольших количествах имеются теллуриды: алтаит, петсит, гессит, сивланит, калаверит и др.

Ключевые слова: Геология, Секисовское месторождения, золото, Казахстан.

Введение. Секисовское месторождение расположено на территории Глубоковского района Восточно-Казахстанской области Республики Казахстан, в отрогах Иртышского предгорья на восточной окраине села Секисовка, в 40 км к югу от административного областного центра г. Усть-Каменогорска. Район месторождения располагается в пределах Алейской подзоны Рудноалтайской структурно-формационной зоны, в области юго-восточного погружения Алейского антиклинория. В пределах описываемой площади преобладающее значение имеют интрузивные образования Змеиногорского комплекса позднекаменноугольно-раннепермского возраста, развиты вулканогенно-осадочные образования франского и фаменского ярусов верхнего девона, турнейского и визейского ярусов нижнекаменноугольной системы.

В геолого-структурном отношении месторождение приурочено к многофазному габбродиорит-диорит-гранодиорит-гранитовому массиву.

В пределах Секисовского месторождения получили распространение породы 4 фаз Змеиногорского интрузивного комплекса в следующей последовательности:

Первая фаза – габбро, габбро-диориты.

Вторая фаза – среднезернистые гранодиориты и диориты.

Третья фаза – среднезернистые плагиограниты, граниты.

Четвертая фаза – представлена породами дайковой серии.

В пределах листа карты Секисовского месторождения масштаба 1:1000 доминируют породы второй фазы. Представлены диоритами, характеризующихся разнообразием петрографических типов, выделяются собственно диориты, кварцсодержащие и кварцевые диориты.

Самая распространенная группа пород характеризуется в первую очередь резкими колебаниями содержаний кварца и темноцветных минералов (от лейкократовых до меланократовых разновидностей). Содержания кварца колеблются от 5 до 30%, плагиоклаз составляет 40-60%, роговая обманка 30-40%, биотит – 5%. Плагиоклаз отвечает по составу андезину № 30-35, 40-45. По петрохимическим данным кварцевый биотит-роговообманковый диорит соответствует роговообманковому андезиту по Дэли ($w=9,6$; $a=8,9$). По классификации А.Н. Заварицкого это пересыщенные кремнеземом породы ($Q=+24,8$) – класс 22, очень бедные щелочами (группа б, $a/c=1,3$).

Габбро, габбро-диориты первой фазы распространены ограниченно в виде ксенолитов, закономерно распределенные среди диоритов. Породы макро- и микроскопически характеризуются мелкозернистым сложением и темной окраской и напоминают диабазы. Это группа пород, также как и породы второй фазы, характеризуется широким диапазоном вариаций в содержании

кварца и роговой обманки, гипидиоморфнозернистой, субофитовой, пойкилитовой структурой (последняя обычно обусловлена наличием мелких пойкилитовых вростков плагиоклаза в роговой обманке). Отмечается несовпадение химического и минералогического состава. По минералогическому составу, учитывая состав плагиоклаза и темноцветного минерала, это группа пород соответствует лампрофирам диоритового ряда.

По химическому составу эта группа пород соответствует габброидам. По классификации А.Н. Заварицкого подобные породы относятся к группе пересыщенных кремнеземом (класс 4), умеренно богатой щелочами (группа 13) и очень бедных щелочами (группа 15), лейкомеланократовые (подгруппа А). На петрохимической диаграмме породы располагаются в поле габброидов по Дэли.

Несколько менее распространены биотитовые плагиограниты, граниты третьей фазы, с резким преобладанием первых над вторыми. Тела брекчий имеют распространение на всей площади карты месторождения, в плане, как правило, линейно-вытянутые тела в северо-западном, несколько реже в субмеридиональном, иногда в северо-восточном направлениях. Нередко подвержены гидротермально-метасоматическим изменениям вплоть до образования березитов, как правило, распространенных в непосредственной близости от тела брекчий. Данный тип березитов характеризуется крайне слабой золотоносностью. Отмечаются также переходные разности.

Кроме того, на месторождении широко проявлена дайковая серия, представленная мелко- и микрозернистыми диоритами, диоритовыми порфиритами, аплитовидными гранитами, гранит-порфирами, кварцевыми альбит-порфирами, фельзитами. Значительную роль играют дайки кислого состава, представленные сложноветвящимися телами преимущественно северо-западного, реже северо-восточного и субмеридионального простирания. Породы имеют весь набор от микро- до средне-крупнозернистых и пегматоидных структур.

В пределах Секисовско-Церковского рудного поля и месторождения основными разломами являются северо-западные, контролирующие размещение explosивно-гидротермальных брекчий, рудных тел и даек, проявлены в центральной части площади карты масштаба 1:50000, имеют простирание 310-325°. Два наиболее крупных из них проходят через Секисовское месторождение и Церковское рудопроявление являются фрагментами Шемонаихинско-Нарымского линейamenta. Морфологически они выражены уступами рельефа и гидрографической сетью.

Субмеридиональные и северо-восточные нарушения с субвертикальными и крутыми углами падения являются более поздними, обуславливают блоковую структуру месторождения, влияют на морфологию тел дайковой серии и приводят к сдвиговым перемещениям. Субширотные трещины встречаются ограниченно, фиксируются уступами рельефа, ложковой сетью и трещиноватостью в гранитоидах. К самым поздним на месторождении относятся пологие трещинные структуры с углами падения от 100 до 400, фиксирующиеся по горным выработкам (гор. +441, шахта 50 м, гор. + 320, орт 201, забой), по которым возможны сбросо-сдвиговые перемещения. Трещинные структуры характеризуются малой мощностью (0,1-0,5 м), заполнены глиной трения, иногда обводнены. По результатам горных работ смещений разломами рудных тел не установлено.

Характеристика оруденения. Рудовмещающими породами на месторождении являются брекчии (рисунок 1), которые систематизированы в соответствии с классификацией Иванкина П.Ф. и относятся к explosивно-гидротермальным, т.е. состоящими из обломков магматических пород (диоритов, плагиогранитов и переходных между ними разностей), сцементированных тонкоизмельченным материалом либо того же состава, либо жильным (кварцевые, кварц-

карбонатные гнезда и прожилки, содержащие вкрапления рудных минералов - пирита, сфалерита, галенита, при преобладании первого). Помимо брекчии, на месторождении локальное развитие имеют слабозолотоносные березитизированные гранитоиды и пропилитизированные габброиды, не подверженные брекчированию и не имеющие промышленного значения.

Предыдущими исследователями было выделено 4 типа брекчий:

1. Эксплозивно-гидротермальные брекчии среднего состава;
2. Эксплозивно-гидротермальные брекчии средне- основного состава;
3. Эксплозивно-гидротермальные брекчии смешанного состава;
4. Эксплозивно-гидротермальные брекчии кислого состава.

Наибольшее распространение имеют брекчии смешанного состава.

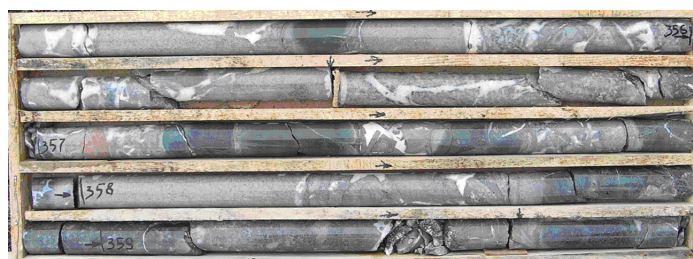


Рисунок 1 Эксплозивно-гидротермальные брекчии смешанного состава. Скважина МЕТ2.

Интервал 355.05-359.85 м.

В брекчиях всех типов выделяются мелко- и крупнообломочные разновидности. Для первых характерна более интенсивная степень гидротермальных изменений. Размер обломков колеблется от 0.1м до 2м, преобладают обломки 0.1-0.5м, иногда встречаются крупные блоки вмещающих пород. Обломки по периферии подвержены гидротермальным изменениям, мощность зонк изменений составляет 1-5 см, визуально наблюдается в виде оторочки более светлого оттенка. Цементированы брекчии перетертым, гидротермально-измененным материалом пород кварц-серицит-хлоритового состава с вкрапленностью сульфидов (главным образом пирит), редко с включениями останцов пород. Широкое развитие в цементе брекчий имеет гнездово-прожилково-штокверковая система кварц-карбонат-сульфидного состава. Жильные минералы представлены в основном в виде гнёзд неправильной формы размером от нескольких мм до 20-30см, при неравномерном распределении. Несколько реже встречаются тонкие прожилки (несколько мм), и ещё менее развиты жилы мощностью до 10-20см. Прожилки обычно невыдержанные. По составу гнездово-жильные обособления весьма разнообразны и представлены монокварцевыми, кварц-карбонатными, монокarbonатными разновидностями, с сульфидами и без, однако следует отметить довольно ограниченное распространение мономинеральных образований. Содержание сульфидов в цементе брекчий неравномерное и изменяется от долей процента до 15%, в среднем 5%. Золотое оруденение пространственно и генетически связано с сульфидами, однако прямой корреляции между содержаниями сульфидов и золота не установлено. Как правило, визуальный контроль оруденения отсутствует, рудные тела выделяются по данным опробования. Золото распределено крайне неравномерно и образует своеобразный гнездово-струйчатый тип оруденения. Повышенные концентрации (струи) золота возникают в контактах различных типов брекчий, а также в

контактах брекчии с вмещающими диоритами и дайками кислого состава. В брекчиях выделяется 4 минерализованные зоны, в каждой из которых локализуется целая группа рудных тел.

На месторождении выделены следующие золотоносные зоны: центральная, в которой выделяются 2 подзоны – северо- восточная (группа рудных тел 3, 6) и юго-западная (группа рудных тел 1, 5, 8); северная (группа рудного тела 2); западная (группа рудного тела 11); юго-западная (группа рудного тела 10).

Размеры рудных тел по простиранию в среднем 40-80 м, по падению 150-500 м. Основные тела по падению не оконтурены и прослеживаются на глубину более 950 м от поверхности, форма тел лентовидная и линзовидная. В плане и разрезах рудные тела имеют лентовидные, иногда линзовидные формы малой мощности с преобладанием длины по падению над шириной по простиранию как отношение 5-8:1. Средняя мощность рудных тел колеблется от 0.5м до 5.8м.

Вещественный состав руд. Рудные зоны локализованы в explosивно-гидротермальных брекчиях. Оруденение представлено минерализацией двух типов, вкрапленной гидротермально-метасоматической и гнездово- жильной гидротермальной. Минерализация обоих типов развиваются в цементе explosивно-гидротермальных брекчии.

Основными минералами первичных золотосульфидных руд являются пирит, рутил, халькопирит, сфалерит, пирротин, галенит, блеклая руда. Реже встречаются алтаит, гессит, аргентит, самородное золото, петцит, силванит, калаверит, креннерит.

Основными рудными элементами являются золото и серебро. Содержания цветных металлов, теллура и висмута не высокие. Содержание глинозема и кремнезема, 12-15% и 50-60%, соответственно.

Текстура руд вкрапленная, гнездово-вкрапленная и прожилково-вкрапленная. Наиболее характерны для первичных руд структуры – аллотриаморфнозернистая, скелетная, эмульсионная, петельчатая. Резко преобладающим минералом гипогенных руд является пирит, составляющий более 90% от всех рудных минералов. Пирит представлен тремя генерациями – пирит синберезитовой (гидротермально-метасоматической) стадии, ранней и поздней рудной (гнездово- жильной гидротермальной) стадий. Пирит первой генерации представлен зернистыми агрегатами неправильной, овальной, удлиненной, трапецеидальной, кубической, пентагон-додекаэдрической формы. Пирит интенсивно катаклазирован, трещиноват, корродирован. В пирите встречаются микрозернистые включения кварца, халькопирита, галенита, пирротина, рутила, ильменита, магнетита, нерудного минерала.

Пирит второй генерации относится к ранней рудной стадии образует идиоморфные выделения изометричной и угловатой формы, размером 0.001-0.004мм. Пирит в основном кубический, кубопентагондодекаэдрический, пентагон-додекаэдрический. Отмечаются обильные включения сфалерита, халькопирита, реже галенита.

Пирит третьей поздней рудной стадии, жильный, ассоциирующий с поздними секущими кварцево-карбонатными прожилками. Представлен прожилково-видными и гнездообразными обособлениями в кварцево-карбонатных жилах, а также в виде цепочек метакристаллов в околожильных березитах. Размер выделений 1,0-3,0 мм. Кубический, призматический, октаэдрический пирит, насыщенный включениями сульфидов меди, свинца, цинка, теллуридов и самородного золота.

Вкрапленное оруденение связано с процессом березитизации, сопровождавшим становление explosивно-гидротермальных брекчий, и неравномерно рассеяно в цементе брекчий. Золотоносность оруденения этого типа незначительна. Концентрация рудных минералов составляет от 1 до

10% объема цемента. Резко преобладающим минералом гипогенных руд вкрапленного оруденения является пирит (более 90% рудных минералов), в значительном количестве присутствует рутил (до 1.5%), нередко титаномагнетит, ильменит, два последних являются аксессуарными минералами исходных брекчиеобразующих пород. Реже встречаются пирротин, халькопирит, сфалерит, крайне редко – самородное золото. Титаномагнетит, реже ильменит отмечаются в виде зерен изометричной, иногда треугольной формы размером до 0.1-0.15 мм в останках первичных пород цемента, реже в цементе.

Гнездово-жильное гидротермальное оруденение связано с процессами березитизации брекчий (синберезитовые жильные рудные минеральные ассоциации) и более поздними гидротермально-метаморфогенными процессами (наложенные прожилки). Ведущей минеральной ассоциацией первого процесса является халькопирит-сфалерит-пирит-кварцевая, поздним процессам отвечает золото-теллуридно-сульфидно-кварцевая ассоциация, с которыми связано главное промышленное оруденение месторождения. Самородным элементом в первичных рудах является золото. Оно пространственно и генетически приурочено к сульфидам и жильным минералам – кварцу, карбонату. Халькопирит-сфалерит-пирит-кварцевая минеральная ассоциация составляет более 90% гнездово - жильного типа оруденения. Преобладающее значение в ней имеет пирит, крайне неравномерно распределенный в жильных и гнездовых обособлениях, слагающий то крупные, почти мономинеральные скопления размером до 3-5 см, то образующий редкую, почти микро-скопическую вкрапленность в кварце. Преобладают таблитчатые и кубические кристаллы. Очень редко в этом пирите встречаются по трещинам тончайшие прожилки сфалерита, халькопирита, и еще реже – галенита и самородного золота (размер выделений – первые микроны). Сфалерит образует иногда довольно значительные гнездовидные скопления размером до 1-3 см, но чаще 1-5 мм. Форма обычно овальная и изометричная, реже заливообразная. Практически во всех выделениях сфалерит насыщен эмульсией халькопирита, обычно закономерно (по различным направлениям спайности) распределенного в сфалерите. Доля халькопирита в сфалерите составляет 10-25%. Выделения каплевидной и изометричной формы размером 5-20 микрон. Иногда по трещинам они сливаются в непрерывные закономерно проявленные прожилки, крайне редко с мелкими включениями самородного золота. Очень редко халькопирит образует самостоятельные ксеноморфные выделения в кварце (до 0,3 мм).

Золото-теллуридно-сульфидно-кварцевая жильная минеральная ассоциация распространена в виде мелких гнезд и маломощных прерывистых прожилков, часто тяготеющих к брекчиям вблизи поздних даек кислого состава. Для таких прожилков и гнезд характерно зональное строение. Сульфиды и теллуриды, представляющие обычно сложнопостроенные агрегаты, локализуются в центральной части прожилков. Далее к периферии и частично в центре развивается серый кварц, а зальбанды прожилков сложены белым и серо-белым кварцем. Распределение сульфидов и теллуридов крайне неравномерное кустовое и столбовое. Состав рудной минерализации сложен: пирит, сфалерит, халькопирит, галенит, теннантит, пирротин, алтаит, петцит, гессит, сильванит, калаверит, креннерит, аргентит, самородное золото. Пирит не образует сплошных крупных скоплений, весьма разнообразен кристалломорфически, но в отличие от ранее описанных генераций содержит большое количество мелких (сотые доли мм) включений золота, разнообразных теллуридов и сульфидов, что резко отличает его от пирита менее продуктивных рудных минеральных ассоциаций. Сфалерит и халькопирит обычно образуют эмульсионную структуру распада твердого раствора, подобную вышеописанной, но если в первом случае только халькопирит составлял эмульсию в сфалерите, то здесь отмечается и обратная картина, подчеркивающая их одновре-

менное образование. Характерным типоморфным признаком этой ассоциации является тесное срастание халькопирита и сфалерита с галенитом, блеклой рудой, самородным золотом и разнообразными теллуридами.

Галенит довольно редкий минерал. Встречается в виде мелких (0,06-0,4 мм) угловатых выделений в сфалерите в тесном срастании с алтаитом и халькопиритом.

Теннантит также редок. Это зерна неправильной формы, размером до 0,5 мм, находящиеся в тесных срастаниях с теллуридами и самородным золотом. Алтаит (PbTe) - повсеместно распространенный теллурид, встречающийся в виде эмульсии распада в галените, в срастаниях со сфалеритом, петцитом, самородным золотом, а также в виде самостоятельных выделений угловатой и крючковатой форм в кварце. Размер выделений алтаита в кварце достигает 1-2 мм.

Петцит (Ag_3AuTe_2) - также часто встречающийся теллурид, повсеместно ассоциирующий с алтаитом, гёсситом, иногда в виде мелких включений в пирите. Отмечаются случаи распада петцита с образованием аргентита и самородного золота. Размер выделений петцита от 0,005 до 0,1 мм.

Гёссит (Ag_2Te) встречается в срастании с алтаитом, петцитом (рис. 2) и самородным золотом в виде мельчайших зерен неправильной формы размером от 0.024x0.002 до 0.112x0.24 мм.

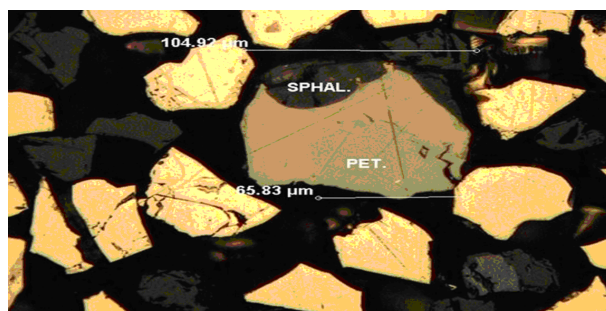


Рисунок 2 Аншлиф. Гёссит в сростке с петцитом и сфалеритом

Сильванит (AuAgTe_4), калаверит ($((\text{Au},\text{Ag})\text{Te})$) встречаются в виде мелких включений в пирите, размером до 0.005x 0.010мм.

Креннерит (AuAgTe) встречен в единичном случае в срастании с петцитом и аргентитом. Размер выделения 0,01x0,025 мм, форма таблитчатая, деформированная.

Аргентит (Ag_2S) встречается редко в тесном срастании с блеклой рудой, алтаитом и петцитом, форма изометричная и овальная, размер от 0,005 до 0,02 мм.

Самородное золото распространено довольно широко и обычно встречается в срастании с алтаитом, петцитом (рисунок 3) и блеклой рудой, реже – в пирите и кварце. Форма выделений овальная и овально-изогнутая, крючковатая, прожилкововидная. Размер от 0,001 до 0,050 мм. В пирите золото чаще образует прожилковидные выделения по трещинам.

Толщина прожилков 0,001-0,005 мм, длина 0,010-0,050 мм. Обычно в прожилках, помимо золота, присутствуют алтаит, петцит и блеклая руда. **Генезис месторождения.** Согласно современным представлениям (М.С. Рафаилович и др.) золоторудные объекты секисовского типа относятся к золото-сульфидно кварцевым штокверковым. Секисовское месторождение локализовано в многофазном габбродиорит-гранитовом массиве, содержащем дайки кислого состава и взрывчатые брекчиевые тела с гидротермальными изменениями в виде березитизации, окварцевания и карбонатизации.

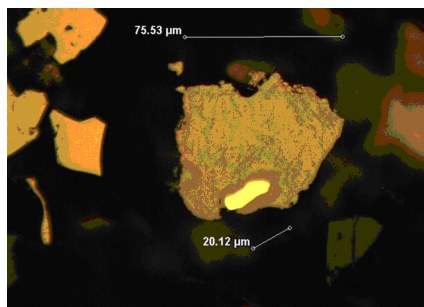


Рисунок 3 Аншлиф. Самородное золото в петците

Брекчий формировались на завершающих стадиях становления многофазной интрузии Змеиногорского комплекса, вблизи узла сопряжения фрагмента Шемонаихинско-Нарымского линейного с тектоническими структурами северо-восточного направления. Интенсивно проявленные в зонах explosивно-гидротермальных брекчий процессы низкотемпературного околотрещинного метасоматоза выражены в процессах березитизации, лиственитизации и пропилитизации пород (цемента брекчий), позволяют определить генезис Секисовского месторождения как низкотемпературный гидротермально-метасоматический. В период становления брекчий происходила циркуляция газогидротерм и цементирующая масса, как наиболее ослабленная часть, явилась основой образования березитов, пропилитов, лиственитов с выделением золотоносной сульфидной минерализации.

Внедрение дайковых тел кварцевых альбит-порфиров происходило в завершающий момент становления брекчиевых тел. На это указывает факт наличия обломков дайковых образований вблизи экзоконтакта в обломочной части брекчиевых тел. Золотоносная сульфидная минерализация приурочена к цементирующей массе брекчий и не проявлена в дайковых телах. Следующим этапом было образование кварцевых, кварцево-карбонатных гнезд, прожилков с сульфидной минерализацией, со свободным золотом. Прожилковая минерализация секущего характера сформировалась в завершающий этап газогидротермальной деятельности и проявлена независимо от состава вмещающих пород, как в зонах explosивно-гидротермальных брекчий, так и в дайковых телах и, во вмещающих зонах, неизмененных диоритах, плагиогранитах и наиболее поздними образованиями являются карбонатные прожилки секущего характера, практически не золотоносные.

В целом мощные дайковые тела кварцевых порфиров играют роль своеобразного экрана, создающего условия обогащения золотосульфидной минерализацией в цементирующей массе explosивно-гидротермальных брекчий.

Заключение. Авторы высказывают благодарность руководству и специалистам компании Hambleton Mining. Данная работа выполнялась в рамках гранта IGCP-592 IUGS-unesco.

Список литературы

- [1] *Novozhilov Y.I., Gavrilov A.M. (1999) Gold-sulfide deposits hosted in carbonaceous terrigenous sequences. Moscow, p 175* Rafailovich MS (2008) PGE in subsurface of Kazakhstan: systematics of deposits, mineral species, and resources. *Geology and protection of subsoil* 4: 9-19 .
- [2] *Zenkova V.I. (1975) Formation of rocks and ores at the Bakyrchik gold deposit. Geology, geochemistry, and mineralogy of the gold districts and deposits of Kazakhstan. Almaty, pp 104-113*

УДК 41.03

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ ¹

М.Дж. Минглибаев ^{1),2)}, Г.М. Маемерова ¹⁾

¹⁾ Казахский национальный университет имени аль-Фараби, ²⁾ Астрофизический институт имени В.Г. Фесенкова

Abstract. Secular perturbations in the three-bodies problem with masses, changing isotropically by different specific rates are investigated. As initial unperturbed intermediate motion is used individual aperiodic motion at the quasiconic section. Eccentricities and inclinations of the orbits of bodies considered to be small quantities, masses of bodies comparable to each other. Under these assumptions, using a computer algebra system *Mathematica* are evaluated the expressions of secular perturbing function in the analogues of the second system variables Poincare with accuracy up to the second degree inclusive of small quantities. In symbolically are calculated secular perturbations of the three-bodies problem with variable masses.

Keywords: three-bodies problem, secular perturbations, variable masses, aperiodic motion, a computer algebra system *Mathematica*.

Аңдатпа. Массалары изотропты түрде өзгертін үш дене мәселесінің ғасырлық ұйытқулары зерттелді. Бастапқы ұйытқымаған аралық қозғалыс ретінде өзіндік квазиконустық қима бойымен аperiodдық қозғалыс қарастырылды. Орбиталардың эксцентриситеттері мен көлбеулері кіші шамалар болып саналады, ал денелердің массалары өзара шамалас. Осы шарттарды ескере отырып, *Mathematica* компьютерлік алгебра жүйесінің көмегімен кіші шамалардың екінші дәрежесіне дейін Пуанкаре айнымалылары аналогтарының екінші жүйесінде ұйытқушы функцияның ғасырлық ұйытқулары алынды. Символдық түрде массалары айнымалы үш дене мәселесінің ғаырлық ұйытқулары есептелді.

Кілттік сөздер: үш дене есебі, ғасырлық ұйытқулар, айнымалы масса, аperiodдық қозғалыс, *Mathematica* компьютерлік алгебра жүйесі.

Аннотация. Исследованы вековые возмущения задачи трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах. В качестве исходного невозмущенного промежуточного движения используется индивидуальное аperiodическое движение по квазиконическому сечению. Эксцентриситеты и наклоны орбит тел считаются малыми величинами, а массы тел сравнимыми между собой. При этих предположениях применяя систему компьютерной алгебры *Mathematica* вычислены выражения вековой части возмущающей функции в аналогах второй системы переменных Пуанкаре с точностью до второй степени малых величин включительно. В аналитическом виде вычислены вековые возмущения задачи трех тел с переменными массами.

Ключевые слова: задача трех тел, вековые возмущения, переменная масса, аperiodическое движение, система компьютерной алгебры *Mathematica*.

Введение. В реальных протопланетных и планетных гравитирующих системах на сегодняшний день основными диссипативными факторами считаются приливная эволюция, трения ядро -

¹Работа частично финансирована грантом 0688/ГФ научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК, 2012г.-2014г.

мантия и трение атмосфера - небесное тело [1]–[3]. Однако, на определенных этапах эволюции гравитирующих систем диссипация массы за пределы системы и обмен масс могут быть ведущими факторами динамической эволюции [4]–[9]. Исследование эволюционных эффектов переменности масс в гравитирующих системах – интересная задача.

Простейшая модель реальных небесных тел – это сферическое тело, гравитационная сила которого на внешней области моделируется гравитационной силой материальной точки, находящейся в центре этой сферы с соответствующей массой. Рассмотрим три сферических тела с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах взаимогравитирующие по закону Ньютона, что приводит к задаче трех точек с переменными массами. В этой проблеме эффекты диссипации масс не исследованы, по-видимому, из-за сложности задачи и отсутствием математических разработок. В такой постановке отсутствуют десять классических первых интегралов [7], т.е. интеграл энергии, шесть интегралов движения центра масс и три интеграла сохранения момента количества движения. В нашем случае из-за изменения массы в различных темпах происходит диссипация энергии системы в целом. Так как законы изменения масс известны и заданы, то дифференциальные уравнения системы замкнутые и не появляются дополнительные степени свободы. Однако, в связи с диссипацией количества движения, момента количества движения и энергии не сохраняются классические интегралы.

В настоящей работе используя наши разработки [7], модифицируя классическую схему [10], получено новое разложение в ряд возмущающей функции в задаче трех тел с массами, изменяющимися изотропно, в различных темпах, в принципе. Возмущающая функция выражена через аналоги второй системы элементов Пуанкаре с точностью до второй степени включительно малых величин e_i, i_i . Эта громоздкая и трудоемкая задача алгебры, конкретное выполнение которой возможно только с использованием компьютерной системы символьных вычислений.

С помощью системы аналитического вычисления *Mathematica*, фактически нами получено полное выражение возмущающей функции, в котором только выражение $m_1 m_2 / r_{12}$ состоит из 684 слагаемых. На основе полученной возмущающей функции впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи - канонические неавтономные уравнения вековых возмущений и получено аналитическое решение этих уравнений.

Постановка задачи. Рассмотрим в координатах Якоби систему взаимогравитирующих трех тел T_0, T_1 и T_2 с переменными массами $m_0 = m_0(t)$, $m_1 = m_1(t)$, $m_2 = m_2(t)$, изменяющимися изотропно в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1}, \quad \frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}, \quad \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}. \quad (1)$$

Исследуем уравнения возмущенного движения в аналогах второй системы элементов Пуанкаре

$\Lambda_i, \lambda_i, \xi_i, \eta_i, p_i, q_i$, которые определяются следующими формулами [7]

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \tilde{\beta}_i \sqrt{a_i}, & \lambda_i &= n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau)] + \pi_i = l_i + \Omega_i + \omega_i, \\ \xi_i &= \sqrt{2\Lambda_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \cos \pi_i, & \eta_i &= -\sqrt{2\Lambda_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \sin \pi_i, \\ p_i &= \sqrt{2\Lambda_i \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos i_i)} \cos \Omega_i, & q_i &= -\sqrt{2\Lambda_i \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos i_i)} \sin \Omega_i, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{\beta}_1^2 = f \cdot \mu_1(t_0) m_1(t_0) m_0(t_0), \quad \tilde{\beta}_2^2 = f \cdot \mu_2(t_0) m_2(t_0) [m_0(t_0) + m_1(t_0)], \quad n_i = \tilde{\beta}_i / \mu_{i0} a_i^{3/2},$$

$$\mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1} \neq const, \quad \mu_2(t) = \frac{m_2(m_1 + m_0)}{m_0 + m_1 + m_2} \neq const, \quad \mu_{i0} = \mu_i(t_0),$$

где $\phi_i(t)$ первообразные функции $\gamma_i^{-2}(t)$, причем

$$\gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_1(t) + m_2(t)}.$$

Величины

$$a_i, e_i, \omega_i, \Omega_i, i_i, \phi_i(\tau_i) \quad (3)$$

элементы орбиты – аналоги соответствующих кеплеровских элементов, f – гравитационная постоянная.

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим нерезонансный случай и осредняя возмущающие функции по λ_i , получим уравнения вековых возмущений

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_i &= 0, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $R_{1\text{век}}^*, R_{2\text{век}}^*$ соответствующие вековые части следующих выражений

$$\begin{aligned} R_1^* &= \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}L_1^2} + \frac{1}{\psi_1} \left[-\frac{b_1 r_1^2}{2} + f \left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{r_2} \right) \right], \\ R_2^* &= \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}L_2^2} + \frac{1}{\psi_2} \left[-\frac{b_2 r_2^2}{2} + f \left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{r_2} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{\mu_2}{\psi_2} [2\dot{\nu}_1(\dot{x}_1 x_2 + \dot{y}_1 y_2 + \dot{z}_1 z_2) + \ddot{\nu}_1(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\psi_i = \psi_i(t) = \mu_i(t)/\mu_i(t_0), \quad b_1 = b_1(t) = \mu_1(t)\ddot{\gamma}_1(t)/\gamma_1(t), \quad b_2 = b_2(t) = \mu_2(t)\ddot{\gamma}_2(t)/\gamma_2(t),$$

$$\nu_1 = \nu_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \neq const, \quad \nu_0 = \nu_0(t) = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq const.$$

Решение уравнений вековых возмущений (4) в аналитическом виде является основной целью настоящей работы.

Разложение возмущающей функции.

Для вычисления вековых частей возмущающих функций необходимо вычислить вековые части следующих величин

$$\begin{aligned} F_{\text{век}} &= f \left[\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{r_2} \right]_{\text{век}}, \quad F_{\rho\text{век}} = - \left[\frac{b_1 r_1^2}{2\psi_1} + \frac{b_2 r_2^2}{2\psi_2} \right]_{\text{век}}, \\ V_{\text{век}} &= \frac{\mu_2}{\psi_2} [2\dot{\nu}_1(\dot{x}_1 x_2 + \dot{y}_1 y_2 + \dot{z}_1 z_2) + \ddot{\nu}_1(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)]_{\text{век}}. \end{aligned}$$

Предположим, что элементы e_i, i_i достаточно малые. Тогда, можно разложить возмущающую функцию в ряд по малым параметрам e_i, i_i и учитывать только члены второго порядка включительно. В отличие от двухпланетной задачи трех тел массы $m_1(t), m_2(t)$ не предполагаются малыми.

В аналогах второй системы элементов Пуанкаре вековые выражения для $R_{1\text{век}}, R_{2\text{век}}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 R_{1\text{век}}^* &= \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + F_{01} + F_{12\text{век}1} + F_{1\text{век}} + F_{\rho 1\text{век}}, \\
 R_{2\text{век}}^* &= \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + F_{02} + F_{12\text{век}2} + F_{2\text{век}} + F_{\rho 2\text{век}} + V_{\text{век}}, \\
 F_{01} &= -\frac{b_1}{2\psi_1} \gamma_1^2 a_1^2 + f \frac{m_1 m_2 A_0}{2\psi_1} - \frac{f}{\psi_1} \left(\frac{m_1 m_2}{a_2 \gamma_2} + \frac{a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{2a_2^3 \gamma_2^3} \right), \\
 F_{02} &= -\frac{b_2}{2\psi_2} \gamma_2^2 a_2^2 + f \frac{m_1 m_2 A_0}{2\psi_2} - \frac{f}{\psi_2} \left(\frac{m_1 m_2}{a_2 \gamma_2} + \frac{a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{2a_2^3 \gamma_2^3} \right), \\
 F_{12\text{век}1} &= \frac{f}{\psi_1} \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}}, \quad F_{12\text{век}2} = \frac{f}{\psi_2} \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}}, \\
 F_{1\text{век}} &= -f \frac{3a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3 \gamma_2^3 \Lambda_1} (\xi_1^2 + \eta_1^2), \quad F_{\rho 1\text{век}} = -\frac{3b_1 \gamma_1^2 a_1^2}{4\Lambda_1 \psi_1} (\xi_1^2 + \eta_1^2), \\
 F_{2\text{век}} &= -f \frac{3a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3 \gamma_2^3 \Lambda_2} (\xi_2^2 + \eta_2^2), \quad F_{\rho 2\text{век}} = -\frac{3b_2 \gamma_2^2 a_2^2}{4\Lambda_2 \psi_2} (\xi_2^2 + \eta_2^2), \\
 V_{\text{век}} &= -\frac{9a_1 a_2 \mu_2 \gamma_2 (2\dot{\gamma}_1 \dot{\nu}_1 + \gamma_1 \ddot{\nu}_1)}{14\sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2} \psi_2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Вычисление $m_1 m_2 / r_{12}$ требует много времени и большой работы. Формулы (6) получены с помощью системы аналитических вычислений *Mathematica* [12]. Полученное полное неосредненное выражение $m_1 m_2 / r_{12}$ очень громоздкое и труднообозримое, его запишем в следующем компактном виде

$$F_{12} = \sum_{i=1}^{680} \Pi_i^*(t) P_i(\epsilon_k) + \sum_{j=1}^4 \tilde{\Pi}_j(\Lambda_1, \Lambda_2, t), \tag{7}$$

где $\epsilon_k = \epsilon_k(\lambda_1, \Lambda_1, \xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \lambda_2, \Lambda_2, \xi_2, \eta_2, p_2, q_2)$. Осредняя выражение (7) по быстрым переменным λ_1, λ_2 , получим $[m_1 m_2 / r_{12}]_{\text{век}}$. Анализ формул (6) показывает, что уравнения вековых возмущений расщепляются на две системы относительно элементов ξ_i, η_i и p_i, q_i . Поэтому удобно обозначить

$$\begin{aligned}
 R_{1\text{век}}^* &= \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + F_{1\text{век}}^*, \quad R_{2\text{век}}^* = \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + F_{2\text{век}}^*, \\
 F_{1\text{век}}^* &= F_{1\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, t) + F_{1\text{век}}^*(p_i, q_i, t), \quad F_{2\text{век}}^* = F_{2\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, t) + F_{2\text{век}}^*(p_i, q_i, t).
 \end{aligned}$$

Решение уравнений вековых возмущений для элементов ξ_i, η_i

Рассмотрим отдельно уравнения вековых возмущений для (ξ_i, η_i)

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial F_{1\text{век}}^*}{\partial \eta_1}, \quad \dot{\eta}_1 = -\frac{\partial F_{1\text{век}}^*}{\partial \xi_1}, \\
 \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial F_{2\text{век}}^*}{\partial \eta_2}, \quad \dot{\eta}_2 = -\frac{\partial F_{2\text{век}}^*}{\partial \xi_2},
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$F_{1\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, t) = K_0 + K_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + K_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + K_3(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
F_{2\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, t) &= K'_0 + K'_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + K'_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + K'_3(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2), \\
K_0 &= -\frac{b_1}{2\psi_1}\gamma_1^2 a_1^2 + f\frac{m_1 m_2 A_0}{2\psi_1} - \frac{f}{\psi_1} \left(\frac{m_1 m_2}{a_2 \gamma_2} + \frac{a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{2a_2^3 \gamma_2^3} \right), \\
K_1 &= \frac{1}{\psi_1} \left\{ -\frac{3b_1 \gamma_1^2 a_1^2}{4\Lambda_1} - f\frac{3a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3 \gamma_2^3} + f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2} (6\nu_0^3 a_1^4 C_0 \gamma_1^4 \Lambda_2 - \right. \\
&\quad \left. - 6\nu_0 a_1^3 a_2 \gamma_1^3 \gamma_2 \Lambda_2 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0 \Lambda_2 (3C_2 - 5C_0) - 4B_1 \Lambda_2) \right\}, \\
K_2 &= \frac{f}{\psi_1} \left\{ -\frac{3a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3 \gamma_2^3} + \frac{m_1 m_2}{16a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2} (6a_2^4 C_0 \gamma_2^4 \Lambda_1 - \right. \\
&\quad \left. - 6a_1 a_2^3 \gamma_1 \gamma_2^3 \Lambda_1 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0^2 \Lambda_1 (3C_2 - 5C_0) - 4\nu_0 B_1 \Lambda_1) \right\}, \\
K_3 &= -f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \psi_1} \{ 6\nu_0^2 a_1^2 \gamma_1^2 (3C_0 - C_2) + \\
&\quad + 6a_2^2 \gamma_2^2 (3C_0 - C_2) - a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (18B_0 + 2B_2 + 3\nu_0(7C_1 + C_3)) \}, \\
K'_0 &= -\frac{b_2}{2\psi_2}\gamma_2^2 a_2^2 + f\frac{m_1 m_2 A_0}{2\psi_2} - \frac{f}{\psi_2} \left(\frac{m_1 m_2}{a_2 \gamma_2} + \frac{a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{2a_2^3 \gamma_2^3} \right), \\
K'_1 &= \frac{1}{\psi_2} \left\{ -f\frac{3a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3 \gamma_2^3} + f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2} (6\nu_0^3 a_1^4 C_0 \gamma_1^4 \Lambda_2 - \right. \\
&\quad \left. - 6\nu_0 a_1^3 a_2 \gamma_1^3 \gamma_2 \Lambda_2 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0 \Lambda_2 (3C_2 - 5C_0) - 4B_1 \Lambda_2) \right\}, \\
K'_2 &= \frac{1}{\psi_2} \left\{ -\frac{3b_2 \gamma_2^2 a_2^2}{4\Lambda_2} - f\frac{3a_1^2 \gamma_1^2 m_0 m_2 \nu_1^2}{4a_2^3 \gamma_2^3} + f\frac{m_1 m_2}{16a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2} (6a_2^4 C_0 \gamma_2^4 \Lambda_1 - \right. \\
&\quad \left. - 6a_1 a_2^3 \gamma_1 \gamma_2^3 \Lambda_1 (B_0 + 2\nu_0 C_1) - 3a_1^2 a_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \nu_0^2 \Lambda_1 (3C_2 - 5C_0) - 4\nu_0 B_1 \Lambda_1) \right\}, \\
K'_3 &= -\frac{1}{\psi_2} \left\{ f\frac{m_1 m_2 \nu_0}{16a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} (6\nu^2 a_1^2 \gamma_1^2 (3C_0 - C_2) + 6a_2^2 \gamma_2^2 (3C_0 - C_2) - \right. \\
&\quad \left. - a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2 (18B_0 + 2B_2 + 3\nu_0(7C_1 + C_3))) + \frac{9a_1 a_2 \mu_2 \gamma_2 (2\dot{\gamma}_1 \dot{\nu}_1 + \gamma_1 \ddot{\nu}_1)}{14\sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2}} \right\},
\end{aligned}$$

где

$$A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, B_3, C_0, C_1, C_2, C_3$$

– коэффициенты Лапласа [10].

Аналитическое решение уравнений (8) можно получить методом Пикара. В первом приближении запишем

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \xi_i(t) = \xi_i(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F_i}{\partial \eta_i} \right)_0 dt, \\
\eta_i &= \eta_i(t) = \eta_i(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \right)_0 dt,
\end{aligned} \tag{11}$$

где индекс ноль в выражениях $(\partial F_i / \partial \xi_i)_0$, $(\partial F_i / \partial \eta_i)_0$ заключенных в скобки означает, что оскулирующие элементы в них заменены начальными значениями.

Решение уравнений вековых возмущений для элементов p_i, q_i Теперь рассмотрим отдельно уравнения вековых возмущений для (p_i, q_i)

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= \frac{\partial F_{1\text{век}}^*}{\partial q_1}, & \dot{q}_1 &= -\frac{\partial F_{1\text{век}}^*}{\partial p_1}, \\
\dot{p}_2 &= \frac{\partial F_{2\text{век}}^*}{\partial q_2}, & \dot{q}_2 &= -\frac{\partial F_{2\text{век}}^*}{\partial p_2},
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$F_{1\theta e\kappa}^*(p_i, q_i, t) = \psi_1^*(t)F(p_i, q_i), \quad F_{2\theta e\kappa}^*(p_i, q_i, t) = \psi_2^*(t)F(p_i, q_i),$$

$$\psi_1^*(t) = -\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_1}, \quad \psi_2^*(t) = -\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_2}, \quad (13)$$

$$F(p_i, q_i) = K_1^*(p_1^2 + q_1^2) + K_2^*(p_2^2 + q_2^2) + K_3^*(p_1p_2 + q_1q_2), \quad (14)$$

$$K_1^* = \frac{1}{\Lambda_1}, \quad K_2^* = \frac{1}{\Lambda_2}, \quad K_3^* = -\frac{2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}.$$

Введем новые переменные

$$p_1 = \gamma_{11}^*z_1^* + \gamma_{12}^*z_2^*, \quad q_1 = \gamma_{11}^*y_1^* + \gamma_{12}^*y_2^*,$$

$$p_2 = \gamma_{21}^*z_1^* + \gamma_{22}^*z_2^*, \quad q_2 = \gamma_{21}^*y_1^* + \gamma_{22}^*y_2^*,$$

используя ортогональные преобразования

$$\gamma_{12}^*\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*\gamma_{21}^* = 0, \quad (\gamma_{11}^*)^2 + (\gamma_{21}^*)^2 = 1, \quad (\gamma_{12}^*)^2 + (\gamma_{22}^*)^2 = 1, \quad (15)$$

$$2K_1^*\gamma_{11}^*\gamma_{12}^* + 2K_2^*\gamma_{21}^*\gamma_{22}^* + K_3^*(\gamma_{11}^*\gamma_{22}^* + \gamma_{12}^*\gamma_{21}^*) = 0.$$

Откуда следует

$$\gamma_{11}^* = \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}} = \text{const}, \quad \gamma_{21}^* = \frac{\sqrt{\Lambda_2}}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}} = \text{const},$$

$$\gamma_{12}^* = -\frac{\sqrt{\Lambda_2}}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}} = \text{const}, \quad \gamma_{22}^* = \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2}} = \text{const}.$$

Тогда квадратичная форма (14) приводится к виду

$$F(p_i, q_i) = F^*(z_i^*, y_i^*) = E_1^* [(z_1^*)^2 + (y_1^*)^2] + E_2^* [(z_2^*)^2 + (y_2^*)^2],$$

где

$$E_1^* = K_1^*(\gamma_{11}^*)^2 + K_2^*(\gamma_{21}^*)^2 + K_3^*\gamma_{11}^*\gamma_{21}^* = 0,$$

$$E_2^* = K_1^*(\gamma_{12}^*)^2 + K_2^*(\gamma_{22}^*)^2 + K_3^*\gamma_{12}^*\gamma_{22}^* = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{\Lambda_1\Lambda_2} = \text{const} \neq 0.$$

Дифференциальные уравнения вековых возмущений (12) в новых переменных сохраняют свой канонический вид

$$\frac{dz_1^*}{dt} = \frac{\partial F_{1\theta e\kappa}^*}{\partial y_1^*} = 0, \quad \frac{dy_1^*}{dt} = -\frac{\partial F_{1\theta e\kappa}^*}{\partial z_1^*} = 0,$$

$$\frac{dz_2^*}{dt} = \frac{\partial F_{2\theta e\kappa}^*}{\partial y_2^*} = -\psi_2^*(t)E_2^*2y_2^*, \quad \frac{dy_2^*}{dt} = -\frac{\partial F_{2\theta e\kappa}^*}{\partial z_2^*} = -[-\psi_2^*(t)E_2^*2z_2^*].$$

Решения последней системы дифференциальных уравнений напомним в виде

$$z_1^* = z_{10}^* = M_1^* \cos \beta_1^* = \text{const}, \quad y_1^* = y_{10}^* = M_1^* \sin \beta_1^* = \text{const},$$

$$z_2^* = M_2^* \cos \left(\sigma_2 \int \psi_2^*(t)dt + \beta_2^* \right), \quad y_2^* = M_2^* \sin \left(\sigma_2 \int \psi_2^*(t)dt + \beta_2^* \right),$$

где M_1^* , M_2^* , β_1^* , β_2^* , – постоянные интегрирования, $\sigma_2 = 2E_2^* = 2(\Lambda_1 + \Lambda_2)/\Lambda_1\Lambda_2$.

Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений вековых возмущений (12)

имеет вид

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_{11}^* M_1^* \cos \beta_1^* + \gamma_{12}^* M_2^* \cos \left(\sigma_2 \int \psi_2^*(t) dt + \beta_2^* \right), \\ q_1 &= \gamma_{11}^* M_1^* \sin \beta_1^* + \gamma_{12}^* M_2^* \sin \left(\sigma_2 \int \psi_2^*(t) dt + \beta_2^* \right), \\ p_2 &= \gamma_{21}^* M_1^* \cos \beta_1^* + \gamma_{22}^* M_2^* \cos \left(\sigma_2 \int \psi_2^*(t) dt + \beta_2^* \right), \\ q_2 &= \gamma_{21}^* M_1^* \sin \beta_1^* + \gamma_{22}^* M_2^* \sin \left(\sigma_2 \int \psi_2^*(t) dt + \beta_2^* \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Формулы определяющие орбитальные элементы, с точностью до второй степени включительно малых величин e_i , i_i – как исходные допущения, имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{\Lambda_i} e_i \cos \pi_i, \quad \eta_i = -\sqrt{\Lambda_i} e_i \sin \pi_i, \quad \Lambda_i e_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2, \quad \operatorname{tg} \pi_i = -\eta_i / \xi_i, \\ p_i &= \sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \cos \Omega_i, \quad q_i = -\sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \sin \Omega_i, \quad \Lambda_i \sin^2 i_i = p_i^2 + q_i^2, \quad \operatorname{tg} \Omega_i = -q_i / p_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналитические соотношения (17), (16) и (11) полностью описывают изменение со временем орбитальных элементов $e_i(t)$, $\pi_i(t)$, $i_i(t)$, $\Omega_i(t)$ при произвольных законах изменений масс (1). Они дают возможность полностью анализировать динамическую эволюцию рассматриваемой задачи трех тел с переменными массами. В частности, из них следует

$$\Lambda_1 \sin^2 i_1 + \Lambda_2 \sin^2 i_2 = (M_1^*)^2 + (M_2^*)^2 = \text{const}. \quad (18)$$

Это является аналогом теоремы Лапласа об устойчивости системы в нашей задаче. В классической двухпланетной задаче трех тел (с постоянными массами) теорема Лапласа об устойчивости системы широко известна [10].

Заключение. С помощью системы аналитических вычислений *Mathematica*, вычислено полное выражение возмущающей функции в задаче трех тел с массами изменяющимися изотропно в различных темпах, в котором только выражение $m_1 m_2 / r_{12}$ состоит из 684 слагаемых. На основе полученной возмущающей функции, впервые получены эволюционные уравнения рассматриваемой задачи – канонические неавтономные уравнения вековых возмущений и аналитическое решение этих уравнений. Получены в символьном виде вековые возмущения задачи трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах. Подробный анализ полученных решений будет рассмотрен в отдельной работе. Результаты настоящей работы можно эффективно использовать в анализе динамической эволюции нестационарных тройных гравитирующих иерархических систем, в первую очередь, в двухпланетной (двухпротопланетной) задаче трех тел с переменными массами.

Список литературы

- [1] Резонансные вращения небесных тел. / Белецкий В.В., Хентов А.А. Нижний Новгород: НИР-ФИ, 1985 - 430 с.
- [2] Крупномасштабный хаос и маргинальная устойчивость в Солнечной системе. В кн.: Резонансы в небесной механике. / Ласкар Ж. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006 - 247-305 с.
- [3] Четыре конечных положения оси вращения Венеры. В кн.: Резонансы в небесной механике. / Коррейя А., Ласкар Ж. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006 - 305-316 с.

- [4] Динамика гравитирующих систем Метагалактики./Омаров Т.Б. Алматы:Наука, 1975-143 с.
- [5] Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. / Omarov T.B. (Editor). New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002-248 с.
- [6] The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems. Bekov A.A., Omarov T.B. // Astron. and Astrophys. Transactions. 2003. - №22 с. 145.
- [7] Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. / Минглибаев М.Дж. Германия: Lambert Academic Publishing, 2012-229 с.
- [8] Evolutionary processes in binary and multiple stars. / Eggleton P. UK: Cambridge University Press, 2006 - 332 p.
- [9] Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс. Лукьянов Л. Г. // Астрон. ж. 2008. - № 8 с.755-768.
- [10] Небесная механика. / Шарлье К. Москва, 1966 - 628 с.
- [11] Secular perturbations in the three-body problem with variable masses. Minglibayev M., Mayemerova G. // The Sixth International Workshop. Computer algebra systems in teaching and research, Poland, Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia. 2011. - pp. 198-204.
- [12] Решение физических задач с использованием системы MATHEMATICA. / Прокопеня А.Н. Брест: Издательство БГТУ, 2005 - 260 с.

УДК 532.517.4; 532.526; 533; 533.6.011.5

СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОЗДУХА С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ВДУВОМ ВОДОРОДА

Е.С. Моисеева¹, А.Ж. Найманова²

¹Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, ²Институт Математики и Математического
Моделирования МОН РК

Abstract. Spatial supersonic turbulent flow of air with a transverse injection of hydrogen from a circular orifice is numerically simulated. Reynolds-averaged Navier-Stokes equations are solved by using ENO-schemes of third order accuracy. Eddy viscosity is determined by using the algebraic turbulence model of Baldwin-Lomax. The influence of the Mach number of the flow to the depth of penetration of the injected jet and the expansion of the mixing layer is investigated.

Keywords: Supersonic flow, Navier-Stokes equations, Mach number, numerical simulation.

Аңдатпа. Кеңістіктегі дыбыс жылдамдығынан жоғары турбулентті ауа ағынына көлденең үрленген жіңішке сутегінің домалақ ағыншасымен байланысының сандық моделі құрылды. Рейнольдс бойынша орташаланған Навье-Стокс есебінің шешімі үшінші ретті дәлдіктегі ENO сұлбасына негізделген. Турбулентті тұтқырлық коэффициенті Болдуин-Ломакс алгебралық

моделі арқылы анықталған. Үрленген ағынның ағынға ену тереңдігі мен араластыру қабаттының кеңейуіне Мах санының әсері зерттелген.

Кілттік сөздер: Дыбыс жылдамдығы жоғары ағындар, Навье-Стокс теңдеуі, Мах саны, сандық модельдеу.

Аннотация. Численно моделируется пространственное сверхзвуковое турбулентное течение воздуха с поперечным вдувом круглой струи водорода. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса осуществляется на основе ENO-схемы третьего порядка точности. Коэффициент турбулентной вязкости определяется с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина-Ломакса. Исследовано влияние числа Маха потока на глубину проникновения вдуваемой струи и расширение слоя смешения.

Ключевые слова: Сверхзвуковой поток, уравнения Навье-Стокса, число Маха, численное моделирование.

Основной трудностью численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса при моделировании сверхзвуковых течений является возникновение осцилляций и разрывов в решении. На данный момент эту проблему можно преодолеть, используя схемы, удовлетворяющие условию квазимонотонности, таких как MUSCL-схема, TVD-схема, CESE-метод.

Так, например, в работе [1] исходная система уравнений решалась MUSCL-схемой Ван Лира против потока. Была представлена достаточно подробно сложная структура течения в зоне перед струей. Также изучалось влияние значения числа Маха набегающего потока. Показано, что в дозвуковом режиме реактивная тяга становится крайне мала под действием вдуваемой струи, в то время как в сверхзвуковом режиме тяга, развиваемая струей, может быть увеличена почти вдвое.

Также MUSCL-схема была использована в работе [2], где изучалась ударно-волновая структура, возникающая при истечении струи в сверхзвуковой поток, с применением LES-методологии. В работе было показано, что взаимодействие ударных волн и сдвигового слоя приводит к усилению турбулентного режима, что в свою очередь может значительно повысить скорость перемешивания и сгорания топлива в окислителе. Исследовались три случая комбинаций числа Маха потока и параметра нерасчетности. Получено, что увеличение числа Маха потока ведет к более низкой степени проникновения ударной волны в струю.

Однако следует заметить, что монотонным и TVD-схемам присущ недостаток, который состоит в том, что в окрестности точек, где первая производная решения равна нулю, их порядок аппроксимации снижается до первого. ENO-схемы (essentially non-oscillatory), свободные от указанного выше недостатка, изложены в ряде работ [3]. В работе [4] авторы развили ENO-схему на основе метода Годунова и показали применимость этой схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси в плоском канале с вдувом поперечной струи.

Целью данной работы является численное моделирование вдува круглой звуковой струи водорода перпендикулярно сверхзвуковому турбулентному потоку воздуха в трехмерном канале. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки (рисунок 1). Для решения поставленной задачи применяется разработанная авторами в работе [4] численная методика, которая была адаптирована к трехмерному случаю. Дополнительно вводится эффективный показатель адиабаты газовой смеси, который позволяет вычислить производные от давления по независимым переменным при определении матриц Якоби, и таким образом построить эффективный неявный алгоритм решения. Выбор диапазона рассматриваемых параметров определяется имеющимися экспериментальными данными процессов горения водорода в рассматриваемом диа-

пазоне параметров, что позволит в будущем производить сравнение с опытными данными других авторов.

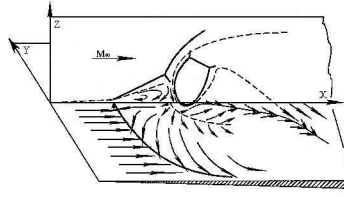


Рисунок 1 Схема течения

Постановка задачи. Рассматривается перпендикулярный вдув круглой струи водорода в воздушный сверхзвуковой турбулентный поток в трехмерном канале. Исходными уравнениями для рассматриваемой задачи является система трехмерных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

компоненты векторов $\vec{U}, \vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T, \vec{E} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E_t + p)u, \rho u Y_k)^T, \\ \vec{F} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (E_t + p)v, \rho v Y_k)^T, \vec{G} = (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (E_t + p)w, \rho w Y_k)^T, \end{aligned}$$

а компоненты $\vec{E}_v, \vec{F}_v, \vec{G}_v$ связаны с вязкими напряжениями:

$$\begin{aligned} \vec{E}_v &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x, J_{kx})^T, \\ \vec{F}_v &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y, J_{ky})^T, \\ \vec{G}_v &= (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{kz})^T \end{aligned}$$

Тензоры вязких напряжений и тепловые и диффузионные потоки имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2\mu}{3Re}(2u_x - v_y - w_z), \tau_{yy} = \frac{2\mu}{3Re}(2v_y - u_x - w_z), \tau_{zz} = \frac{2\mu}{3Re}(2w_z - u_x - v_y), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{\mu}{Re}(u_y + v_x), \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re}(u_z + w_x), \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{Re}(v_z + w_y), \\ q_x &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{kx}, q_y = \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{ky}, \\ q_z &= \frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{kz}, \\ J_{kx} &= -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, J_{ky} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial y}, J_{kz} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial z} \end{aligned}$$

Для давления и полной энергии запишутся следующие выражения:

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k}, E_t = \frac{\rho}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \sum_{k=1}^N Y_k h_k - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2)$$

Удельная энтальпия k -ой компоненты $h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT$, удельная теплоемкость $c_{pk} = C_{pk} \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k}$, молярная теплоемкость записывается в полиномиальной форме $C_{pk} = \sum_{i=1}^5 \bar{a}_{ki} T^{(i-1)}$, где коэффициенты $\bar{a}_{ki}$ определяются из термодинамических таблиц JANAF [5].

Здесь t - время, u, v, w - компоненты скорости потока в продольном и поперечных направлениях, ρ - плотность, p - давление, E_t полная энергия, T - температура, c_v - теплоемкость при постоянном объеме, γ - показатель адиабаты, M_0 и M_{∞} - числа Маха струи и потока, Re - число Рейнольдса, Pr - число Прандтля, индекс 0 - отнесен к параметрам струи, индекс ∞ - к параметрам потока. Y_k - массовая концентрация k -ой компоненты ($\sum_{k=1}^N Y_k = 1$), W_k - молекулярный вес k -ой компоненты, индекс массовой концентрации соответствует компонентам O_2, H_2, N_2 . Коэффициент вязкости определяется как сумма коэффициентов ламинарной и турбулентной вязкости: $\mu = \mu_l + \mu_t$. μ_t определяется с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина-Ломакса, μ_l - из формулы Уилке.

Система (1) записана в безразмерной форме в общепринятых обозначениях. В качестве определяющих параметров приняты параметры потока на входе $u_{\infty}, \rho_{\infty}, T_{\infty}, W_{\infty}$; давление p и полная энергия E_t отнесены к значению $\rho_{\infty} u_{\infty}^2$, удельная энтальпия h_k - к $R_0 T_{\infty} / W_{\infty}$, молярные удельные теплоемкости C_{pk} - к R_0 , характерным размером длины является диаметр круглого отверстия D .

Граничные условия имеют следующий вид:

на входе задаются параметры потока $p = p_{\infty}, T = T_{\infty}, u = M_{\infty} \sqrt{\frac{\gamma_{\infty} R_0 T_{\infty}}{W_{\infty}}}, v = 0, w = 0, Y_k = Y_{k\infty}, W_k = W_{k\infty}, x = 0, 0 \leq y \leq H_y, 0 \leq z \leq H_z$; Во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, продольная составляющая скорости аппроксимируется степенным законом.

в струе $p = p_{\infty}, T = T_0, u = 0, v = 0, w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R_0 T_0}{W_0}}, Y_k = Y_{k0}, W_k = W_{k0}, z = 0, |x^2 + y^2| \leq R$, где p - параметр нерасчетности; на нижней стенке задается условия прилипания и теплоизоляции; на верхней и на боковых границах выполняется условие симметрии, на выходной границе задается условие неотражения [6].

Здесь H_x - длина, H_y - ширина, H_z - высота расчетной области, R - радиус круглого отверстия.

Метод решения. Численное решение системы (1) производится в два этапа. На первом этапе вычисляются термодинамические параметры, на втором определяются массовые концентрации. Аппроксимация конвективных слагаемых производится с помощью ENO-схемы с третьим порядком точности. Члены, содержащие вторые производные, представляются в виде суммы двух векторов: векторов вторых производных и векторов диссипативных членов, а векторы потоков со смешанными производными аппроксимируются явным образом со вторым порядком точности. Полученная система разностных уравнений решается относительно вектора термодинамических параметров матричной прогонкой, а массовых концентраций - скалярной прогонкой.

Анализ результатов. Численные расчеты проводились на разнесенной сетке, размер минимальной сетки был принят $81 \times 61 \times 61$ с шагами по пространственным координатам $\Delta x = 0.14 \div 0.6$, $\Delta y = 0.07 \div 0.4$, $\Delta z = 0.03 \div 0.2$, шаг по времени $\Delta t = 0.01$, при следующих значениях характерных параметров: $Pr = 0.9, Re = 10^4, n = 10, M_0 = 1$, число Маха потока изменялось в диапазоне $2 \leq M_{\infty} \leq 4$, $H_x = 23, H_y = 10, H_z = 7$ калибров, $x_0 = 11.5$ - расстояние от входной границы до центра струи в калибрах.

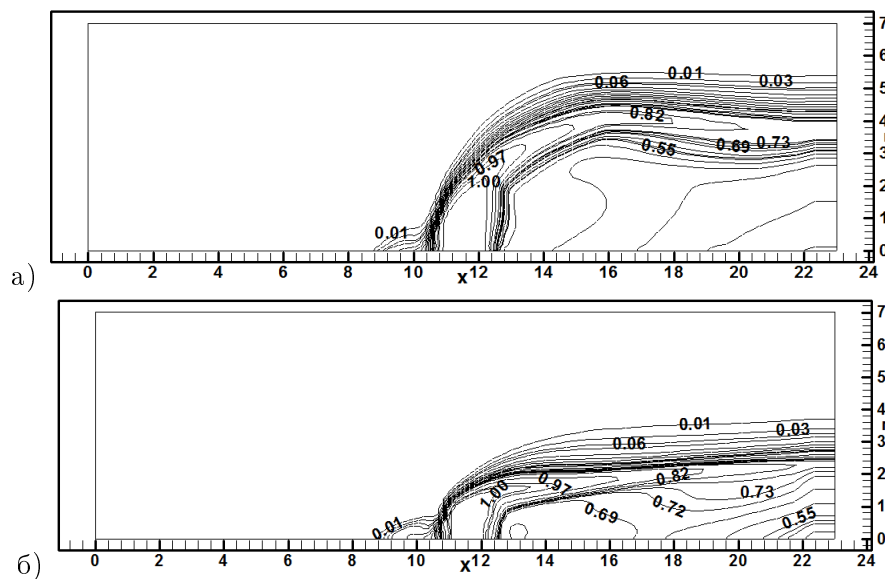
Для апробации численного метода в двумерной постановке была решена тестовая задача с условиями симметрии на границах. Было рассмотрено обтекание щелевой струи газа шириной 0.0559 см, $M_0 = 1$, $T = 217K$, $p = 1.24\text{мПа}$ поперечным потоком воздуха $M_\infty = 2.9$, $T = 108K$, $p = 0.0663\text{мПа}$ в канале прямоугольного сечения. Высота канала 7.62 см, длина 15 см. Полученные расчеты полей скорости и давления на стенке удовлетворительно согласуются с экспериментом [7, 8] и изложены авторами в [9].

Влияние числа Маха потока на характер взаимодействия струи водорода с набегающим потоком воздуха показано на примере линий постоянных массовых концентраций водорода в продольном и в поперечном сечениях (рисунки 2-3). Картина полей массовых концентраций позволяет изучить динамику расширения струи вдуваемого газа и роста слоя смешения.

Из графиков видно, что с ростом M_∞ высота препятствия (струи) уменьшается, что приводит к уменьшению глубины проникновения расширяющейся струи. При числе Маха потока линия 1%-концентрации водорода находится на высоте 5,5 калибров от нижней стенки, тогда как увеличение числа Маха потока до уменьшает дальнобойность вдуваемого водорода до 4 калибров (рисунок 2).

На рисунке 3 приведена картина полей массовых концентраций водорода для чисел Маха потока $M_\infty = 2$ слева и $M_\infty = 4$ справа. Сравнение рисунков 2 и 3 показывает, что расширение струи в плоскости XZ существенно меньше, чем в плоскости YZ, что объясняется значительным сносом вдуваемого газа натекающим потоком воздуха. Заметное в центре вдува (рисунок 3а-б) боковое расширение струи очевидно обусловлено наличием боковых вихрей, приводящих к уменьшению скорости натекающего потока.

Рисунок 3в-г показывает, что проникновение водорода в область перед струей незначительно распространяется вблизи стенки, то есть в дозвуковой зоне. Однако в области за струей (рисунок 3д-з) происходит заметно его накопление, с последующим уменьшением вниз по потоку (рисунок 3ж-з).



а) $M_\infty = 2$, б) $M_\infty = 4$

$$Pr = 0.9, Re = 10^4, n = 10, M_0 = 1$$

Рисунок 2 Распределение массовой концентрации водорода в плоскости симметрии XZ

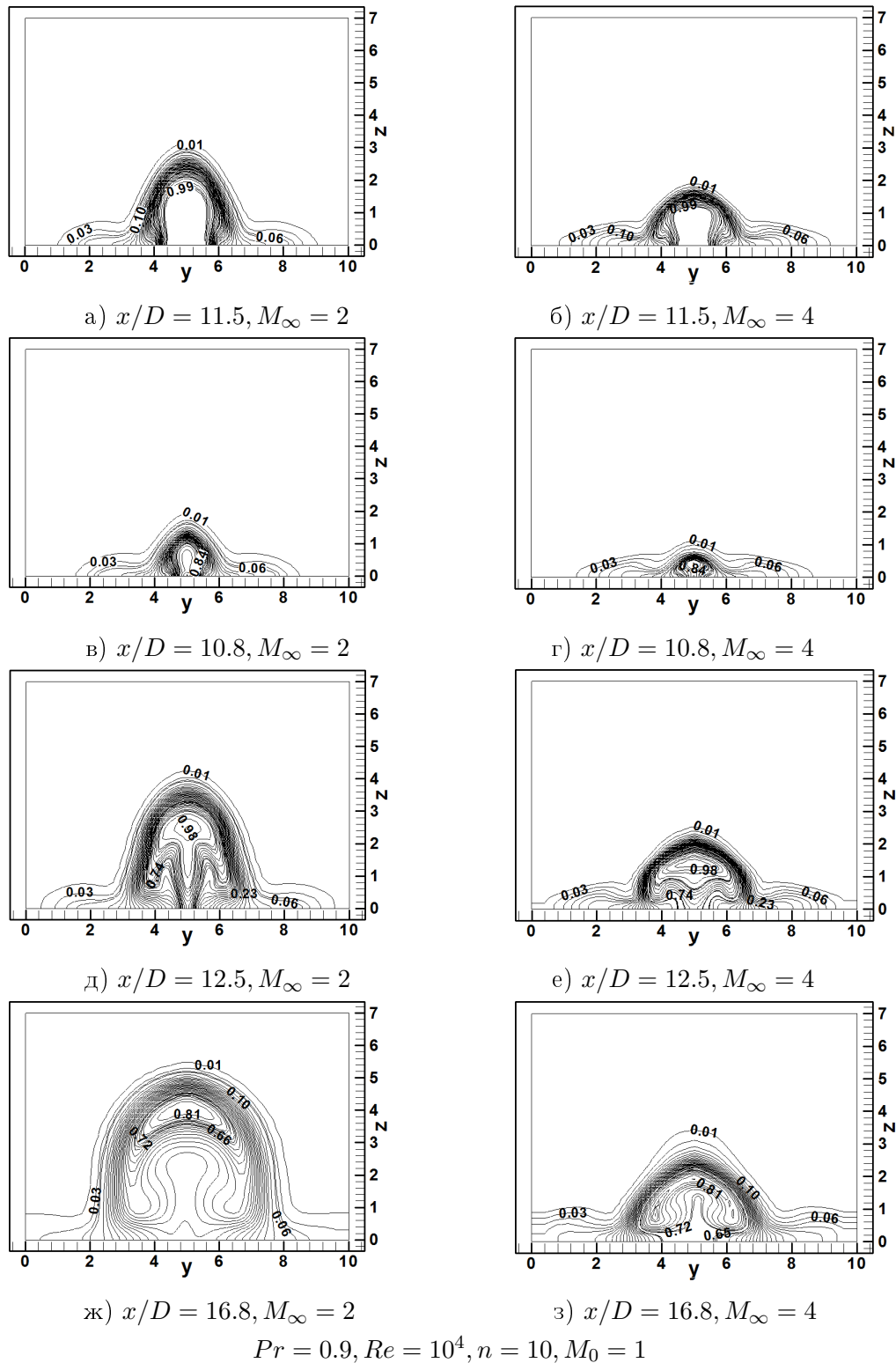


Рисунок 3 Распределение массовой концентрации водорода в различных сечениях плоскости YZ

Заклучение. На основе предложенной численной методики расчета осредненных по Рейнольдсу трехмерных уравнений Навье-Стокса для совершенного газа решена задача сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси с поперечным вдувом круглых струй. Исследована глубина проникновения струи в зависимости от числа Маха потока. Полученные численные результаты распределения полей скорости на поверхности пластины качественно согласуются с известными экспериментальными данными [7, 9].

Список литературы

- [1] Dickmann D.A. and Lu F.K. "Shock/Boundary Layer Interaction Effects on Transverse Jets in Crossflow Over a Flat Plate" // 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit 23 - 26 June 2008, Seattle, Washington, AIAA 2008-3723
- [2] Genin F. "Study of compressible turbulent flows in supersonic environment by Large-Eddy Simulation" // Ph.D. Dissertation, Georgia Institute of Technology, 2009
- [3] Harten A. and. Osher S. Uniformly High-Order Nonoscillatory Schemes I // SIAM J. Numer. Anal., 24 (1987), pp. 279-309
- [4] Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Применение ENO (Essentially non-oscillatory) схемы для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, №4. С. 17-25
- [5] Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A. CHEMKIN-II: a Fortran chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics // SANDIA Report SAND89-8009. – 1989
- [6] Poinso T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // Journal of Computational Physics. 1992. № 101. P.104-129.
- [7] Драммонд Д.Ф., Вайднер Э.Х. Численный метод расчета в канале ПВРД // Аэрокосмическая техника. 1983. Т.1, № 4. С.42-49.
- [8] Шунь Дж.Ш., Юнь С. Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU- факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // Аэрокосмическая техника. 1990. № 10. С.102-113.
- [9] Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т.45, №3. С.72-80

УДК 551.509

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО ПОТОКА В ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЕ

Р.У. Мукашева, Ж.Т. Рахметулина

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. In the given work the way of calculation of unilateral radiating streams in a cloudy atmosphere is considered, numerical realization of analytical formulas of streams of ascending and descending infra-red radiation is offered, for them formulas easily sold on the COMPUTER are received. The algorithm is developed for realization of these formulas, the program in language Fortran is made and numerical calculations are received.

Keywords: The one-sided flow, the integral the function of passage, the cloudy atmosphere.

Аңдатпа. Бұл жұмыста бұлтты атмосферада біржақты радиациялық ағындарды есептеу әдістерінің бірі қарастырылады, инфрақызыл сәуле шығарудың жоғарылаушы және бәсеңдеуші ағындарының аналитикалық формулаларының сандық есептелуі ұсынылады, олар үшін ЭЕМ қолдануға тиімді есептеу формулалары алынған. Бұл формулаларды жүзеге асыру үшін алгоритм жасалып, Fortran алгоритмдік тілінде бағдарлама құрастырылып және сандық есептеулерді алынды.

Кілттік сөздер: біржақты ағындар, тартудың интегралды атқаратын қызметі, бұлтты атмосфера.

Аннотация. В данной работе рассматривается способ расчета односторонних радиационных потоков в облачной атмосфере, предлагается численная реализация аналитических формул потоков восходящего и нисходящего инфракрасного излучения, для них получены легко реализуемые на ЭВМ формулы. Для реализации этих формул разработан алгоритм, составлена программа на языке Fortran и получены численные расчеты.

Ключевые слова: односторонние потоки, интегральная функция пропускания, облачная атмосфера.

Радиационные процессы играют центральную роль в атмосферном тепло-энергообмене и, следовательно, в формировании климата Земли. Наличие облаков в атмосфере оказывает большое влияние на тепловой баланс земной поверхности, так как облака способствуют рассеиванию падающих на них солнечных лучей, ослаблению их или отражению собственного излучения подстилающей поверхности.

Радиационные свойства облаков (альбедо, оптическая толщина) в основном определяются их микрофизической структурой, водностью, вертикальной мощностью и также их диэлектрическими характеристиками.

Если не вводить априорные предположения об излучении с границ, следует рассматривать облачную атмосферу как среду с дополнительными поглощающими и рассеивающими субстанциями - водой в капельном и кристаллическом состояниях. При расчете нами рассматриваются поглощающиеся свойства капельных облаков, так как для них имеются необходимые сведения.

Стремясь получить достаточно простое средство расчета радиационного притока в тропосфере, сравнимое по точности с точностью учета других факторов в общей задаче описания неадиабатических крупномасштабных процессов, авторы [1] допустили следующие упрощения:

1. Пренебрегли рассеянием длинноволновой радиации на каплях воды;
2. Ввели интегральную функцию пропускания, учитывающую поглощение водяным паром (масса m_1), углекислым газом (m_2) и капельной водой (m_3).

При нескольких поглощающих субстанциях расчет радиационного притока осуществляется по формуле

$$R(z) = -\frac{d}{dz} \{ B_s D(m_1(z), m_2(z), m_3(z)) - B_H D(m_1^* - m_1(z), m_2^* - m_2(z), m_3^* - m_3(z)) + \int_0^H B(z') \frac{dD(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z'))}{dz'} dz' \} \quad (1)$$

Здесь $B_s = \pi \int_0^\infty \bar{I}_\nu(0) d\nu$, $B_H = \pi \int_0^\infty \bar{I}_\nu(H) d\nu$ - потоки излучения, проходящего внутрь слоя через границы: $z=0$ и $z=H$

$$B(z) = \pi \int_0^{\infty} B_{\nu}(T(z)) d\nu = \sigma T^4(z)$$

Обычно полагают $B_s = f\sigma T_s^4$, где T_s - температура земной поверхности, f - так называемый коэффициент серости. Ниже предполагается $f = 1$, потому что описание реальной излучательной способности подстилающего слоя с помощью этого коэффициента есть весьма грубое приближение, которое при большой погрешности определения T_s делает мало оправданным уточнение величины f . При $z = H$ пренебрегая потоком нисходящего излучения из запредельных слоев $z > H$, полагают $B_s = 0$. Это предположение оказывается слишком грубым, как указано в [2], при рассмотрении радиационного выхолаживания надоблачной атмосферы в случае высоких облаков. Если H - уровень тропопаузы, то, также нет оснований считать пренебрежимо малым поток $B_H = F_{\downarrow}(H)$.

$D(m_1, m_2, m_3)$ - функция пропускания диффузного излучения.

При этом односторонние потоки определяются по формулам:

$$F_{\uparrow}(z) = B_s D(m_1(z), m_2(z), m_3(z)) + \int_0^z \sigma T^4(z') \times \\ \times \frac{dD(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z'))}{dz'} dz' \quad (2)$$

$$F_{\downarrow}(z) = B_H D(m_1^*(z) - m_1(z), m_2^*(z) - m_2(z), m_3^*(z) - m_3(z)) + \\ + \int_z^H \sigma T^4(z') \frac{dD(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z))}{dz'} dz' \quad (3)$$

Среднее по спектру значение α коэффициента поглощения капельной воды определяется из соотношения

$$-\alpha(m_3) = \frac{1}{m_3} \ln \frac{\overline{P(m_1, m_2, m_3)}}{P(m_1, m_2)} \quad (4)$$

где $P(m_1, m_2, m_3)$ - интегральная функция пропускания, которая может быть представлена в виде

$$P(m_1, m_2, m_3) = \int_0^{\infty} \gamma_{\nu} \prod_{j=1}^3 P_{\nu}^{(j)}(m_j) d\nu \quad (5)$$

Здесь m_3 масса капельной (кристаллической) воды:

$$m_3 = \int_0^z \omega(z) dz \quad (6)$$

$P_{\nu}^{(3)}(m_3)$ - монохроматическая функция пропускания капельной воды.

$$\gamma_{\nu} = \frac{2h\Delta\nu_i^3}{c^2(e^{\frac{h\Delta\nu_i}{kT}} - 1)} \frac{1}{\sigma T^4}$$

здесь $h = 6,6262 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, $k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж · k^{-1} , $T = 250K$, $c = 2,9979 \cdot 10^8$ м/с
 $\Delta\nu = 25$ см $^{-1}$ -шаг,

$\Delta\nu_i$ - ый интервал частоты. При расчетах в качестве значения величины, мы взяли одно из рекомендуемых значений $\alpha = 500$ см 2 /г

Для вычисления $P(m_1, m_2, m_3)$ аппроксимируем ее формулой

$$P(m_1, m_2, m_3) = \sum_{i=1}^{110} \gamma_{\Delta\nu_i}(T) \cdot P_{\Delta\nu_i}^{(1)}(m_1) \cdot P_{\Delta\nu_i}^{(2)}(m_2) \cdot P_{\Delta\nu_i}^{(3)}(m_3) \cdot \Delta\nu_i$$

Тогда функция пропускания диффузного излучения $D(m_1, m_2, m_3)$ аппроксимируется формулой вида

$$D(m_1, m_2, m_3) = \sum_{i=1}^{110} \gamma_{\Delta\nu_i}(T) \cdot P_{\Delta\nu_i}^{(1)}(\beta \cdot m_1) \cdot P_{\Delta\nu_i}^{(2)}(\beta \cdot m_2) \cdot P_{\Delta\nu_i}^{(3)}(\beta \cdot m_3) \cdot \Delta\nu_i$$

где $\beta = 1,66$ - параметр учитывающий диффузность излучения.

Используя экспериментальные и теоретические данные П. Девис и В. Виезе [3] выполнили аппроксимацию спектральных функций пропускания $P_{\Delta\nu_i}^{(1)}(m_1), P_{\Delta\nu_i}^{(2)}(m_2), P_{\Delta\nu_i}^{(3)}(m_3)$ формулами, удобными для расчетов на ЭВМ. Эти формулы для водяного пара в диапазоне частот 2150-25 см⁻¹ и для углекислого газа в диапазоне 800-550 см⁻¹ с шагом $\Delta\nu_i = 25$ см⁻¹ приводятся ниже в зависимости от давления, выраженного через эффективную массу, но без учета зависимости от температуры.

В области спектра 2150-1200 см⁻¹ ($i = \overline{48, 111}$) рассчитывается

$$P_{\Delta\nu}(m_1) = \exp \left\{ -\frac{2,54L_{\Delta\nu}^* m_1}{(1 + 12,45L_{\Delta\nu}^* m_1)^{0,5}} \right\} \quad (7)$$

Для области спектра 1200-800 см⁻¹ ($i = \overline{32, 47}$)

$$P_{\Delta\nu}(m_1) = \exp \{ -(k_{\Delta\nu} m_1) \alpha_{\Delta\nu} \} \quad (8)$$

Для водяного пара в области спектра 800-25 см⁻¹ ($i = \overline{1, 31}$) рассчитывается

$$P_{\Delta\nu}(m_1) = \exp \left\{ -\frac{1,79L_{\Delta\nu} m_1}{(1 + 5,67L_{\Delta\nu} m_1)^{0,5}} \right\} \quad (9)$$

наконец, для углекислого газа в интервале 800-550 см⁻¹ ($i = \overline{22, 31}$)

$$P_{\Delta\nu}(m_1) = \exp \left\{ -0,4 \left(\sqrt{1,87K_{\Delta\nu} m_2 + 1} - 1 \right) \right\} \quad (10)$$

В формулах (7)- (10) m_1 -масса водяного пара, m_2 -масса CO_2 .

Значения постоянных $L_{\Delta\nu}^*, L_{\Delta\nu}, k_{\Delta\nu}, K_{\Delta\nu}$ даны в табл. III.2.1 [4].

Теперь формулы (2),(3) приведем к виду удобному для реализации на ЭВМ. Проинтегрируем по частям интеграл в формулах (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} F_{\uparrow}(z) &= \sigma T^4 \cdot D(m_1(z), m_2(z), m_3(z)) + \int_0^z \sigma T^4(z') \times \\ &\times \frac{dD(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z'))}{dz'} dz' = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \sigma T^4(z') du = 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' dv = \frac{D(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z'))}{dz'} dz' \\ V = D(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z')) \end{array} \right| = \\ &= \sigma T^4 \cdot D(m_1(z), m_2(z), m_3(z)) + \sigma T^4(z') \cdot D(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z')) \Big|_0^z - \\ &- \int_0^z D(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z')) \cdot 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' = \\ &= \sigma T^4 \cdot D(m_1(z), m_2(z), m_3(z)) + \sigma T^4(z) \cdot D(0, 0, 0) - \sigma T^4 \cdot D(m_1(z), m_2(z), m_3(z)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^z D(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z')) \cdot 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' = \\
& = \sigma T^4 \cdot D(0, 0, 0) - \int_0^z D(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z')) \cdot 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' \\
& \quad F_{\downarrow}(z) = B_H D(m_1^*(z) - m_1(z), m_2^*(z) - m_2(z), m_3^*(z) - m_3(z)) + \\
& \quad + \int_z^H \sigma T^4(z') \frac{dD(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z))}{dz'} dz' = \\
& \quad = \left[\begin{array}{l} u = \sigma T^4(z') \\ du = 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' \\ dv = \frac{dD(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z))}{dz'} dz' \\ v = D(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z)) \end{array} \right] = \\
& \quad = B_H D(m_1^*(z) - m_1(z), m_2^*(z) - m_2(z), m_3^*(z) - m_3(z)) + \\
& \quad + \sigma T^4(z') \cdot D(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z)) \Big|_z^H - \\
& \quad - \int_z^H D(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z)) \cdot 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' = \\
& \quad = B_H D(m_1^*(z) - m_1(z), m_2^*(z) - m_2(z), m_3^*(z) - m_3(z)) + \\
& \quad + \sigma T^4(H) \cdot D(m_1(H) - m_1(z), m_2(H) - m_2(z), m_3(H) - m_3(z)) - \\
& \quad - \sigma T^4 \cdot D(0, 0, 0) - \int_z^H D(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z)) \cdot 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz'
\end{aligned}$$

Для вычисления интегралов в формулах (11) и (12) применив численное интегрирование, основанное на методе Симпсона, в результате получим:

$$\begin{aligned}
SUM &= \int_0^z D(m_1(z) - m_1(z'), m_2(z) - m_2(z'), m_3(z) - m_3(z')) \cdot 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' = \\
&= 4\sigma \sum_{i=1}^{k-1} (fp(i) \cdot T^3(i) \cdot dT(i) + fp(i+1) \cdot T^3(i+1) \cdot dT(i+1)) \cdot (h(i+1) - h(i))/2 \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SUM1 &= \int_z^H D(m_1(z') - m_1(z), m_2(z') - m_2(z), m_3(z') - m_3(z)) \cdot 4\sigma T^3(z') \frac{dT(z')}{dz'} dz' = \\
&= 4\sigma \sum_{i=k}^{20} (fp(i) T^3(i) \cdot dT(i) + fp(i+1) \cdot T^3(i+1) dT(i+1) \cdot (h(i+1) - h(i))/2 \quad (12)
\end{aligned}$$

Окончательно получаем следующие формулы, по которым в программе рассчитаны односторонние потоки

$$\begin{aligned}
F_{\uparrow}(z) &= \sigma \cdot T^4(nz) \cdot Df(nz) - SUM \\
F_{\downarrow}(z) &= 697,7 \cdot Bh \cdot Df(nk) + \sigma T^4(nz) \cdot Df(nz) - \sigma T^4(nk) \cdot Df(nk) + SUM1
\end{aligned}$$

Эти формулы реализуются в цикле. Здесь nk - значение порядкового номера, того уровня, на котором рассчитываются односторонние потоки. Для получения численных результатов была составлена программа на языке Fortran.

Здесь в статье мы остановились лишь на основных моментах, показали какие формулы и как нами использовались, не вдаваясь в подробности, однако много времени и работы было затрачено на отыскание и получение формул, касающихся свойств поглощающихся масс водяного пара, углекислого газа и капельной воды, на перевод одних единиц измерений в другие, т.е. приведение к единой системе измерений, также не приведены данные с которыми мы работали, это заняло бы не одну страницу.

Список литературы

- [1] Градус Л. М. Интегральная функция пропускания для облачных условий / Л. М. Градус, Х. Ю. Нийлиск, Е. М. Фейгельсон. –Известие Ан СССР «Физика атмосферы и океана», 1968.-№4.
- [2] Фейгельсон Е. М. Радиационные процессы в слоистообразных облаках.-М. Наука, 1964
- [3] Davis P. A., Vizee W.A. A model For computing infrared transmission throught atmospheric water vapor and carbon dioxide. J. Geophys Res. V. 69, No 18,1964
- [4] Фейгельсон Е. М. Лучистый теплообмен и облака / Е. М. Фейгельсон. -Л: Гидрометеиздат, 1983.-490 с.
- [5] Лиоу К. Основы радиационных процессов в атмосфере / К. Лиоу.-Л.:1984.- Гидрометеиздат, 1984.-486 с.
- [6] Кондратьев К. Я. Актинометрия / К.Я. Кондратьев.- Л.: Гидрометеиздат, 1975.-692 с
- [7] Зуев В. Е. Оптические модели атмосферы / В. Е. Зуев.- 1986 г.
- [8] Гуди Р. Атмосферная радиация / Р. Гуди.- М.: Мир, 1976 г.
- [9] Зуев В. Е. Статистические модели температуры и газовых компонент атмосферы / В. Е. Зуев, В. С. Комаров.- 1988 г.

УДК 517.956

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕФТЕДОБЫЧЕ

М.Ж. Мукимбеков, М.Т. Накибаева

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Abstract. In this work the three-dimensional nonisothermal problem of three-phase filtration in terms of injected and operating oil wells interference is considered. Like problems arise on different stages of oil and gas fields analysis by secondary methods. For solving this problem computational

algorithm is proposed.

Keywords: three-phase filtration, oil, gas, three-dimensional nonisothermal problem, pressure.

Аңдатпа. Жұмыста изотермиялық емес үшөлшемді, айдау және өндіру ұңғымаларының интерференциясы ескерілген, үш фазалық фильтрлеу есебі зерттелген. Мұндай есептер қайталама әдістерін қолданғанда, газ-мұнай кен орындарын өңдеудің әртүрлі талдау кезеңдерінде пайда болады. Бұл есепті шешу үшін төменде есептеу алгоритмі ұсынылған.

Кілттік сөздер: үш фазалық фильтрлеу, мұнай, газ, изотермиялық емес үшөлшемді есеп, қысым.

Аннотация. В данной работе исследуется трехмерная неізотермическая задача трехфазной фильтрации с учетом интерференции нагнетательных и добывающих скважин. Подобные задачи возникают на различных стадиях анализа разработки нефтегазовых месторождений вторичными методами. Для решения данной задачи предлагается вычислительный алгоритм.

Ключевые слова: трехфазная фильтрация, нефть, газ, трехмерная неізотермическая задача, давление.

Постановка задачи. На сегодняшний момент времени нефтегазодобывающая отрасль ставит новые задачи рационального освоения нефтегазовых месторождений, связанные с адекватным математическим моделированием прикладных задач нефтедобычи, выбором эффективных вычислительных средств по их решению, проведением расчетов технологических показателей для данных нефтяных объектов [1-4]. В данной работе рассматривается трехмерная задача трехфазной неізотермической фильтрации с учетом капиллярных сил в системе скважин, описывающий процесс нагнетания воды в нефтяной пласт. Трехмерная математическая модель процесса воздействия на нефтяной пласт посредством закачки воды с учетом произвольного расположения фонда нагнетательных и добывающих скважин, основанная на неізотермической трехфазной фильтрации Маскета-Левеверетта, имеет следующий вид в области $G \times (0, T]$:

$$m \frac{\partial(\rho_B s_B)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_B \bar{W}_B) = \sum_{i=1}^{N_1} Q_{B,ni} \delta(x - x_{ni}, y - y_{ni}, z - z_{ni}) - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{B,di} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}), \quad (1)$$

$$m \frac{\partial(\rho_H s_H)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_H \bar{W}_H) = - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{Hi} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}), \quad (2)$$

$$m \frac{\partial(\rho_G s_G + \rho_B s_B R_B + \rho_H s_H R_H)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_G \bar{W}_G + \rho_B \bar{W}_B R_B + \rho_H \bar{W}_H R_H) = - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{Gi} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}), \quad (3)$$

$$\bar{W}_B = -k \frac{f_B}{\mu_B} (\nabla p_B - \rho_B g), \bar{W}_H = -k \frac{f_H}{\mu_H} (\nabla p_H - \rho_H g), \bar{W}_G = -k \frac{f_G}{\mu_G} (\nabla p_G - \rho_G g), \quad (4)$$

$$p_H - p_B = p_{\text{kap}, HB}(s_B, s_G), \quad (5)$$

$$p_G - p_H = p_{\text{kap}, GH}(s_B, s_G), \quad (6)$$

$$s_B + s_H + s_G = 1, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [m(c_{vB} \rho_B s_B + c_{vH} \rho_H s_H + c_{vG} \rho_G s_G) T + (1 - m) \rho_P c_P T] + \\ & + \nabla((c_{pB} \rho_B \bar{W}_B + c_{pH} \rho_H \bar{W}_H + c_{pG} \rho_G \bar{W}_G + c_{pB} \rho_B \bar{W}_B R_B + c_{pH} \rho_H \bar{W}_H R_H) T) = \end{aligned}$$

$$= \text{div}((m(s_B\lambda_B + s_H\lambda_H + s_G\lambda_G) + (1-m)\lambda_P)\nabla T) + \\ + \sum_{i=1}^{N_1} Q_{\text{тепло},ni} \delta(x - x_{ni}, y - y_{ni}, z - z_{ni}) - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{\text{тепло},di} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}). \quad (8)$$

Здесь s_B, s_H, s_G - насыщенность воды, нефти и газа соответственно; p_B, p_H, p_G - давление воды, нефти и газа соответственно; T - температура пласта; k - абсолютная проницаемость пласта; m - пористость пласта; ρ_B, ρ_H, ρ_G - плотность воды, нефти и газа соответственно; f_B, f_H, f_G - относительные фазовые проницаемости воды, нефти и газа соответственно; μ_B, μ_H, μ_G - вязкость воды, нефти и газа соответственно; $Q_{B,ni}, Q_{B,di}$ - приведенные дебиты воды на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно; Q_{Hi}, Q_{Gi} - приведенные дебиты нефти и газа на добывающих скважинах; (x_{ni}, y_{ni}, z_{ni}) - координаты i -ой нагнетательной скважины; (x_{di}, y_{di}, z_{di}) - координаты i -ой добывающей скважины; N_1, N_2 - количество нагнетательных скважин и добывающих скважин соответственно.

В качестве начальных условий берутся начальные распределения давлений фаз, температуры пласта и насыщенностей фаз в начальный момент времени:

$$(p_H, p_B, p_G, T)|_{t=0} = (p_H^0, p_B^0, p_G^0, T^0), \\ (s_B, s_H, s_G)|_{t=0} = (s_B^0, s_H^0, s_G^0). \quad (9)$$

На границах области течения задаются следующие условия:

$$(\overline{W_B n}; \overline{W_H n}; \overline{W_G n})| = 0, \left(\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right) \Big| = \alpha T_\infty. \quad (10)$$

Вычислительный алгоритм

Для решения данной задачи преобразуем нашу систему, т.е. сложим уравнения (1)- (3), учитывая что:

$$\rho_B = \rho_B^0 e^{(\beta_{PB}(p_B - p^0) - \beta_{TB}(T - T^0))}, \\ \rho_H = \rho_H^0 e^{(\beta_{PH}(p_H - p^0) - \beta_{TH}(T - T^0))}, \\ \rho_G = \rho_G^0 e^{(\beta_{PG}(p_G - p^0) - \beta_{TG}(T - T^0))}, \quad (11)$$

где ρ_B^0 - начальная плотность воды, ρ_H^0 - начальная плотность нефти, ρ_G^0 - начальная плотность газа, $\beta_{PB}, \beta_{PH}, \beta_{PG}$ - коэффициент сжимаемости воды, нефти и газа соответственно, $\beta_{TB}, \beta_{TH}, \beta_{TG}$ - коэффициент термического расширения воды, нефти и газа соответственно, p^0, T^0 - начальное давление и начальная температура пласта соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$b_X = -\left(\frac{1}{\rho_B} k_x \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial x} + \frac{1}{\rho_H} k_x \frac{f_H}{\mu_H} \frac{\partial \rho_H}{\partial x} + \frac{1}{\rho_G} k_x \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial x} \right), \\ b_Y = -\left(\frac{1}{\rho_B} k_y \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial y} + \frac{1}{\rho_H} k_y \frac{f_H}{\mu_H} \frac{\partial \rho_H}{\partial y} + \frac{1}{\rho_G} k_y \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial y} \right), \\ b_z = -\left(\frac{1}{\rho_B} k_z \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial z} + \frac{1}{\rho_H} k_z \frac{f_H}{\mu_H} \frac{\partial \rho_H}{\partial z} + \frac{1}{\rho_G} k_z \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial z} \right) \\ e_X = \frac{1}{\rho_B} k_x \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial x} \frac{\partial p_{кар,HB}}{\partial s_B} - \frac{1}{\rho_G} k_x \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial x} \frac{\partial p_{кар,GH}}{\partial s_B},$$

$$\begin{aligned}
e_Y &= \frac{1}{\rho_B} k_y \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial y} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{1}{\rho_G} k_y \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial y} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}, \\
e_z &= \frac{1}{\rho_B} k_z \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial z} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{1}{\rho_G} k_z \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial z} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}, \\
m_X &= \frac{1}{\rho_B} k_x \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial x} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H} - \frac{1}{\rho_G} k_x \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial x} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H}, \\
m_Y &= \frac{1}{\rho_B} k_y \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial y} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H} - \frac{1}{\rho_G} k_y \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial y} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H}, \\
m_z &= \frac{1}{\rho_B} k_z \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial z} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H} - \frac{1}{\rho_G} k_z \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial z} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H}, \\
n_X &= \frac{1}{\rho_B} k_x \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial x} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{1}{\rho_G} k_x \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial x} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}, \\
n_Y &= \frac{1}{\rho_B} k_y \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial y} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{1}{\rho_G} k_y \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial y} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}, \\
n_z &= \frac{1}{\rho_B} k_z \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial z} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{1}{\rho_G} k_z \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial \rho_G}{\partial z} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}, \\
d_{Z,B} &= k_z \frac{f_B}{\mu_B} g, d_{Z,H} = k_z \frac{f_H}{\mu_H} g, d_{Z,G} = k_z \frac{f_G}{\mu_G} g.
\end{aligned} \tag{12}$$

В результате преобразований с использованием соотношения $s_B + s_H + s_G = 1$, раскладывая по компонентам, получаем следующее уравнение для давления нефти:

$$\begin{aligned}
&m(\beta_{PB}s_B + \beta_{PH}s_H + \beta_{PG}s_G) \frac{\partial p_H}{\partial t} + m(\beta_{PG}s_G \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B} - \beta_{PB}s_B \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B}) \frac{\partial s_B}{\partial t} + \\
&+ m(\beta_{PG}s_G \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H} - \beta_{PB}s_B \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H}) \frac{\partial s_H}{\partial t} + m(\beta_{PG}s_G \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T} - \beta_{PB}s_B \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T}) \frac{\partial T}{\partial t} + \\
&+ m \frac{\partial(\rho_B s_B R_B)}{\partial t} + m \frac{\partial(\rho_H s_H R_H)}{\partial t} + \\
&+ b_X \frac{\partial p_H}{\partial x} + b_Y \frac{\partial p_H}{\partial y} + b_Z \frac{\partial p_H}{\partial z} + e_X \frac{\partial s_B}{\partial x} + e_Y \frac{\partial s_B}{\partial y} + e_Z \frac{\partial s_B}{\partial z} + \\
&+ n_X \frac{\partial T}{\partial x} + n_Y \frac{\partial T}{\partial y} + n_Z \frac{\partial T}{\partial z} + m_X \frac{\partial s_H}{\partial x} + m_Y \frac{\partial s_H}{\partial y} + m_Z \frac{\partial s_H}{\partial z} + \\
&+ d_{Z,B} \frac{\partial \rho_B}{\partial z} + d_{Z,H} \frac{\partial \rho_H}{\partial z} + d_{Z,G} \frac{\partial \rho_G}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(d_{Z,B} \rho_B) + \frac{\partial}{\partial z}(d_{Z,H} \rho_H) + \frac{\partial}{\partial z}(d_{Z,G} \rho_G) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (k_x (\frac{f_B}{\mu_B} + \frac{f_H}{\mu_H} + \frac{f_G}{\mu_G}) \frac{\partial p_H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y (\frac{f_B}{\mu_B} + \frac{f_H}{\mu_H} + \frac{f_G}{\mu_G}) \frac{\partial p_H}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z (\frac{f_B}{\mu_B} + \frac{f_H}{\mu_H} + \frac{f_G}{\mu_G}) \frac{\partial p_H}{\partial z}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} (-k_x (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}) \frac{\partial s_B}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-k_y (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}) \frac{\partial s_B}{\partial y}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} (-k_z (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}) \frac{\partial s_B}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} (-k_x (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H}) \frac{\partial s_H}{\partial x}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} (-k_y (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H}) \frac{\partial s_H}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (-k_z (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H}) \frac{\partial s_H}{\partial z}) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} (-k_x (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}) \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (-k_y (\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}) \frac{\partial T}{\partial y}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k_z \left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_B R_B k_x \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_B}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_B R_B k_y \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_B}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_B R_B k_z \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_B}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_H R_H k_x \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_H}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_H R_H k_y \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_H}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_H R_H k_z \frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_H}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k_z \frac{f_B}{\mu_B} \rho_B g_z \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k_z \frac{f_H}{\mu_H} \rho_H g_z \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k_z \frac{f_G}{\mu_G} \rho_G g_z \right) + \\
& + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho_B R_B k_z \frac{f_B}{\mu_B} \rho_B g_z \right) + \frac{1}{\rho_G} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho_H R_H k_z \frac{f_H}{\mu_H} \rho_H g_z \right) + \\
& + \frac{1}{\rho_B} \sum_{i=1}^{N_1} Q_{B,ni} \delta(x - x_{ni}, y - y_{ni}, z - z_{ni}) - \frac{1}{\rho_G} \sum_{i=1}^{N_2} Q_{B,di} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}) - \\
& - \frac{1}{\rho_H} \sum_{i=1}^{N_2} Q_{H,di} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}) - \frac{1}{\rho_B} \sum_{i=1}^{N_2} Q_{B,di} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}). \quad (13)
\end{aligned}$$

В области $0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$, $0 \leq z \leq l_z$, $0 < t \leq T$ введем следующую разностную сетку. Где $x_{i+1} = x_i + h_x$, $y_{j+1} = y_j + h_y$, $z_{k+1} = z_k + h_z$, $t^0 = 0$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, ($i=0 \dots N_X$, $j=0 \dots N_Y$, $k=0 \dots N_Z$, $n=0 \dots M$).

Уравнение (13) является нелинейным относительно давления нефти, будем ее решать схемой расщепления по пространственным переменным.

Неявная схема для уравнения давления нефти по направлению x будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
& h_x h_y h_z m_{ijk} (\beta_{PB} s_{B,ijk}^n + \beta_{PH} s_{H,ijk}^n + \beta_{PG} s_{G,ijk}^n) \frac{p_{H,ijk}^{n+1/3} - p_{H,ijk}^n}{\tau} + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (\beta_{PG} s_{G,ijk}^n \left(\frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B} \right)_{ijk}^n - \beta_{PB} s_{B,ijk}^n \left(\frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} \right)_{ijk}^n) \frac{s_{B,ijk}^{n+1/2} - s_{B,ijk}^n}{\tau} + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (\beta_{PG} s_{G,ijk}^n \left(\frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_H} \right)_{ijk}^n - \beta_{PB} s_{B,ijk}^n \left(\frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_H} \right)_{ijk}^n) \frac{s_{H,ijk}^{n+1/2} - s_{H,ijk}^n}{\tau} + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (\beta_{PG} s_{G,ijk}^n \left(\frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T} \right)_{ijk}^n - \beta_{PB} s_{B,ijk}^n \left(\frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} \right)_{ijk}^n) \frac{T_{ijk}^{n+1/2} - T_{ijk}^n}{\tau} + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} \frac{(\rho_B s_B R_B)_{ijk}^{n+1/2} - (\rho_B s_B R_B)_{ijk}^n}{\tau} + h_x h_y h_z m_{ijk} \frac{(\rho_H s_H R_H)_{ijk}^{n+1/2} - (\rho_H s_H R_H)_{ijk}^n}{\tau} + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (b_X)_{ijk}^n \left(\frac{\partial p_H}{\partial x} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (b_Y)_{ijk}^n \left(\frac{\partial p_H}{\partial y} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (b_Z)_{ijk}^n \left(\frac{\partial p_H}{\partial z} \right)_{ijk}^n + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (e_X)_{ijk}^n \left(\frac{\partial s_B}{\partial x} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (e_Y)_{ijk}^n \left(\frac{\partial s_B}{\partial y} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (e_Z)_{ijk}^n \left(\frac{\partial s_B}{\partial z} \right)_{ijk}^n + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (n_X)_{ijk}^n \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (n_Y)_{ijk}^n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (n_Z)_{ijk}^n \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ijk}^n + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (m_X)_{ijk}^n \left(\frac{\partial s_H}{\partial x} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (m_Y)_{ijk}^n \left(\frac{\partial s_H}{\partial y} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (m_Z)_{ijk}^n \left(\frac{\partial s_H}{\partial z} \right)_{ijk}^n + \\
& + h_x h_y h_z m_{ijk} (d_{Z,B})_{ijk}^n \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial z} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (d_{Z,H})_{ijk}^n \left(\frac{\partial \rho_H}{\partial z} \right)_{ijk}^n + h_x h_y h_z m_{ijk} (d_{Z,G})_{ijk}^n \left(\frac{\partial \rho_G}{\partial z} \right)_{ijk}^n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +hx_ihy_jhz_k\left(\frac{\partial}{\partial z}(d_{z,B}\rho_B)\right)_{ijk}^n + hx_ihy_jhz_k\left(\frac{\partial}{\partial z}(d_{z,H}\rho_H)\right)_{ijk}^n + hx_ihy_jhz_k\left(\frac{\partial}{\partial z}(d_{z,G}\rho_G)\right)_{ijk}^n = \\
& = hy_jhz_k\left((k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} + \frac{f_H}{\mu_H} + \frac{f_G}{\mu_G}\right))_{i+1/2jk}^{n+1/3} \frac{(p_{H,i+1jk}^{n+1/3} - p_{H,ijk}^{n+1/3})}{hx_i} - \right. \\
& \quad \left. - (k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} + \frac{f_H}{\mu_H} + \frac{f_G}{\mu_G}\right))_{i-1/2jk}^{n+1/3} \frac{(p_{H,ijk}^{n+1/3} - p_{H,i-1jk}^{n+1/3})}{hx_{i-1}}\right) + \\
& + hy_jhz_k\left((-k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}\right))_{i+1/2jk}^n \frac{s_{B,i+1jk}^n - s_{B,ijk}^n}{hx_i} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}\right))_{i-1/2jk}^n \frac{s_{B,ijk}^n - s_{B,i-1jk}^n}{hx_{i-1}}\right) + \\
& + hx_ihz_k\left((-k_y\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}\right))_{ij+1/2k}^n \frac{s_{B,ij+1k}^n - s_{B,ijk}^n}{hy_j} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_y\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}\right))_{ij-1/2k}^n \frac{s_{B,ijk}^n - s_{B,ij-1k}^n}{hy_{j-1}}\right) + \\
& + hx_ihy_j\left((-k_z\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}\right))_{ijk+1/2}^n \frac{s_{B,ijk+1}^n - s_{B,ijk}^n}{hz_k} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_z\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_B} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_B}\right))_{ijk-1/2}^n \frac{s_{B,ijk}^n - s_{B,ijk-1}^n}{hz_{k-1}}\right) + \\
& + hy_jhz_k\left((-k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_G} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_G}\right))_{i+1/2jk}^n \frac{s_{G,i+1jk}^n - s_{G,ijk}^n}{hx_i} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_G} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_G}\right))_{i-1/2jk}^n \frac{s_{G,ijk}^n - s_{G,i-1jk}^n}{hx_{i-1}}\right) + \\
& + hx_ihz_k\left((-k_y\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_G} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_G}\right))_{ij+1/2k}^n \frac{s_{G,ij+1k}^n - s_{G,ijk}^n}{hy_j} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_y\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial s_G} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial s_G}\right))_{ij-1/2k}^n \frac{s_{G,ijk}^n - s_{G,ij-1k}^n}{hy_{j-1}}\right) + \\
& + hy_jhz_k\left((-k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}\right))_{i+1/2jk}^n \frac{T_{i+1jk}^n - T_{ijk}^n}{hx_i} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_x\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}\right))_{i-1/2jk}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{i-1jk}^n}{hx_{i-1}}\right) + \\
& + hx_ihz_k\left((-k_y\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}\right))_{ij+1/2k}^n \frac{T_{ij+1k}^n - T_{ijk}^n}{hy_j} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_y\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}\right))_{ij-1/2k}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{ij-1k}^n}{hy_{j-1}}\right) + \\
& + hx_ihy_j\left((-k_z\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}\right))_{ijk+1/2}^n \frac{T_{ijk+1}^n - T_{ijk}^n}{hz_k} - \right. \\
& \quad \left. - (-k_z\left(\frac{f_B}{\mu_B} \frac{\partial p_{kap,HB}}{\partial T} - \frac{f_G}{\mu_G} \frac{\partial p_{kap,GH}}{\partial T}\right))_{ijk-1/2}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{ijk-1}^n}{hz_{k-1}}\right) + \\
& + hx_ihy_jhz_k\left(\frac{\partial}{\partial z}(-k_z\left(\frac{f_B}{\mu_B}\rho_B + \frac{f_H}{\mu_H}\rho_H + \frac{f_G}{\mu_G}\rho_G\right)g_z)\right)_{ijk}^n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +hx_ihy_jhz_k\left(\frac{1}{\rho_G}\frac{\partial}{\partial z}(-k_z(\rho_BR_B\frac{f_B}{\mu_B}\rho_B+\rho_HR_H\frac{f_H}{\mu_H}\rho_H)g_z)\right)_{ijk}^n+ \\
& +\left(\frac{1}{\rho_G}\right)_{ijk}^n\sum_{l=1}^{N_1}(Q_{G,nl})^n\omega_{ijk}^{nagn}-\sum_{l=1}^{N_2}\left(\left(\frac{1}{\rho_G}\right)_{ijk}^n(Q_{B,dl})^n+\left(\frac{1}{\rho_G}\right)_{ijk}^n(Q_{H,dl})^n+\left(\frac{1}{\rho_G}\right)_{ijk}^n(Q_{G,dl})^n\right)\omega_{ijk}^{dob}.
\end{aligned}$$

Аналогично записывается неявная схема для уравнения давления нефти по направлениям y и z .

Будем решать данные уравнения последовательным применением метода прогонки. Условие устойчивости и сходимости метода выполняется.

После этого, аналогично решается уравнение для нефтенасыщенности, затем находится значение газонасыщенности. В конце, по вычисленным давлениям, насыщенности воды, нефти, газа и их плотностям находятся интегральные показатели разработки месторождения: нефтеотдача, газоотдача, обводненность, накопленная добыча нефти, газа и другие показатели на задаваемый момент времени разработки.

Список литературы

- [1] Математическое моделирование пластовых систем. Азиз Х., Сеттари Э. - М.: Недра, 1982. - 407 с.
- [2] Моделирование плановой задачи в освоении месторождений вторичным методом. Мукимбеков М.Ж. // Труды 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". – Самара, 2009. - Ч.2. - С. 120-122.
- [3] Моделирование пластового течения при добыче нефти. Мукимбеков М.Ж., Шеркешбаева Б.К. // Известия НАН РК, серия физико-математическая. - 2010. - №3. - С. 133-139.
- [4] Upon one objective for reservoir development process. Mukimbekov M.Zh., Sherkeshbayeva B.K. // Science and technology. - 2010. - В.6. - Р. 8-14.

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В РАЗРАБОТКЕ ПЛАСТА

М.Ж. Мукимбеков, М.Т. Накибаева

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Abstract. In this work three-dimensional nonisothermal problem of two-phase mixture filtration, consisting of three components, one of them is dioxide carbon, is considered. The problem describes process of dioxide carbon injection to oil stratum in a system of injected and operation oil wells. Effective and computational algorithm for solving this problem is proposed.

Keywords: dioxide carbon, oil stratum, three-dimensional nonisothermal problem of two-phase mixture filtration, multi-component filtration.

Аңдатпа. Жұмыста изотермиялық емес үшөлшемді, үш компоненттен тұратын, компоненттердің біреуі көмірқышқыл газ, екіфазалық қоспаны фильтрлеу есебі зерттелген. Есеп айдау және өндіру ұңғымалар жүйесіндегі көмірқышқыл газын мұнай қабатына айдау процесін бейнелейді. Бұл есепті шешу үшін тиімді есептеу алгоритмі ұсынылған.

Кілттік сөздер: көмірқышқыл газ, мұнай қабаты, үшөлшемді изотермиялық емес үш компонентті екіфазалық қоспаны фильтрлеу, көпкомпонентті фильтрлеу.

Аннотация. В работе рассматривается трехмерная неізотермическая задача фильтрации двухфазной смеси, состоящая из трех компонент, одна из которых углекислый газ. Задача описывает процесс нагнетания углекислого газа в нефтяной пласт в системе нагнетательных и добывающих скважин. Предлагается эффективный, вычислительный алгоритм для решения данной задачи.

Ключевые слова: углекислый газ, нефтяной пласт, трехмерная неізотермическая задача фильтрации двухфазной смеси, многокомпонентная фильтрация.

Постановка задачи

В условиях бурного развития новых технологий в нефтяной отрасли встает вопрос о использовании современных методов математического моделирования и вычислительного аппарата для более качественного анализа эффективности разработки нефтяных месторождений и изучения пластовых процессов. Для увеличения нефтеотдачи применяют вторичные и третичные методы, которые позволяют улучшить физические, фильтрационно-емкостные характеристики нефтяного пласта [1-3]. К таким методам относится нагнетание углекислого газа в пласт в системе скважин.

Рассмотрим неізотермическую фильтрацию двухфазной смеси (нефть, газ), состоящий из трех компонент, а именно светлые компоненты нефти, тяжелые компоненты нефти и двуокись углерода (CO_2), описываемой 3D – трехмерной математической моделью воздействия углекислого газа на нефтяной пласт с учетом произвольного расположения фонда нагнетательных и добывающих скважин с учетом капиллярных сил.

Математическая модель имеет следующий вид в области $G \times (0, T]$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(x_{1,o}\xi_o s_o + x_{1,g}\xi_g s_g)) + \text{div}(x_{1,o}\xi_o w_o + x_{1,g}\xi_g w_g) = - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{1,i} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(x_{2,o}\xi_o s_o + x_{2,g}\xi_g s_g)) + \text{div}(x_{2,o}\xi_o w_o + x_{2,g}\xi_g w_g) = - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{2,i} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m(x_{3,o}\xi_o s_o + x_{3,g}\xi_g s_g)) + \text{div}(x_{3,o}\xi_o w_o + x_{3,g}\xi_g w_g) = & \text{div}(D_{3,o} \nabla(\xi_o x_{3,o}) + D_{3,g} \nabla(\xi_g x_{3,g})) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_1} Q_{3,i}^{nagn} \delta(x - x_{ni}, y - y_{ni}, z - z_{ni}) - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{3,i}^{dob} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$w_o = -k \frac{f_o}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla z), \quad (4)$$

$$w_g = -k \frac{f_g}{\mu_g} (\nabla p_g - \rho_g g \nabla z), \quad (5)$$

$$p_g - p_o = p_{cap}(s_o, T), \quad (6)$$

$$x_{1,o} + x_{2,o} + x_{3,o} = 1, \quad (7)$$

$$x_{1,g} + x_{2,g} + x_{3,g} = 1, \quad (8)$$

$$s_o + s_g = 1, \quad (9)$$

$$f_{j,0} = f_{j,g}, j = \overline{1, 3}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [m(\rho_o s_o c_{vo} + \rho_g s_g c_{vg})T + (1-m)\rho_r c_r T] + \nabla((\rho_o c_{po} w_o + \rho_g c_{pg} w_g)T) = \\ & = \text{div}((m(s_o \lambda_o + s_g \lambda_g) + (1-m)\lambda_r) \nabla T) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_1} Q_{heat,i}^{nagn} \delta(x - x_{ni}, y - y_{ni}, z - z_{ni}) - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{heat,i}^{dob} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь s_o, s_g - насыщенность нефти и газа соответственно; T - температура пласта; x_1, x_2, x_3 - светлые компоненты нефти, тяжелые компоненты нефти и двуокись углерода соответственно; $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}$ - мольные фракции светлых компонент нефти, тяжелых компонент нефти и двуокиси углерода в нефтяной фазе соответственно; $x_{1,g}, x_{2,g}, x_{3,g}$ - мольные фракции светлых компонент нефти, тяжелых компонент нефти и двуокиси углерода в газовой фазе соответственно; p_o, p_g - давление нефти и газа соответственно; p_{cap} - капиллярное давление; k - абсолютная проницаемость пласта; m - пористость пласта; ξ_o, ξ_g - молярная плотность нефти и газа соответственно; ρ_o, ρ_g - плотность нефти и газа соответственно; f_o, f_g - относительные фазовые проницаемости нефти и газа соответственно; μ_o, μ_g - вязкость нефти и газа соответственно; $Q_{3,i}^{nagn}, Q_{3,i}^{dob}$ - приведенные дебиты двуокиси углерода на нагнетательных и добывающих скважинах соответственно; $Q_{1,i}, Q_{2,i}$ - приведенные дебиты светлых и тяжелых компонент нефти на добывающих скважинах соответственно; (x_{ni}, y_{ni}, z_{ni}) - координаты i -ой нагнетательной скважины; (x_{di}, y_{di}, z_{di}) - координаты i -ой добывающей скважины; N_1, N_2 - количество нагнетательных скважин и добывающих скважин соответственно.

В качестве начальных условий берутся начальные распределения давлений и насыщенностей нефти, газа соответственно; температуры пласта, мольных фракций светлых компонент нефти, тяжелых компонент нефти и двуокиси углерода в нефтяной и газовой фазе соответственно:

$$(p_o, p_g, T)|_{t=0} = (p_o^0, p_g^0, T^0),$$

$$(s_o, s_g)|_{t=0} = (s_o^0, s_g^0), \quad (11)$$

$$(x_{1,o}, x_{2,o}, x_{3,o})|_{t=0} = (x_{1,o}^0, x_{2,o}^0, x_{3,o}^0) \quad (12)$$

$$(x_{1,g}, x_{2,g}, x_{3,g})|_{t=0} = (x_{1,g}^0, x_{2,g}^0, x_{3,g}^0).$$

На границах области течения задаются следующие условия:

$$(w_o \bar{n}; w_g \bar{n})|_{\partial G} = 0, \left(\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right) \Big|_{\partial G} = \alpha T_\infty, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial x_{3,o}}{\partial n}; \frac{\partial x_{3,g}}{\partial n} \right) \Big|_{\partial G} = 0. \quad (14)$$

Вычислительный алгоритм

Для решения данной задачи преобразуем нашу систему, т.е. сложим уравнения (1)-(3) с использованием соотношений (7), (8) в вид для удобной численной реализации.

Так как $\zeta_o = \xi_o(p_o, x_{1,o}, x_{2,o}, T)$, $\zeta_g = \xi_g(p_g, x_{1,g}, x_{2,g}, T)$ и с учетом (4), (5) получаем следующее уравнение:

$$m \left(\frac{\partial \zeta_o}{\partial p_o} s_o + \frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g} (1 - s_o) \right) \frac{\partial p_o}{\partial t} + m \left(\frac{\partial \zeta_o}{\partial x_{1,o}} \frac{\partial x_{1,o}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_o}{\partial x_{2,o}} \frac{\partial x_{2,o}}{\partial t} \right) s_o + m (\xi_o - \xi_g) \frac{\partial s_o}{\partial t} +$$

$$\begin{aligned}
& +m(\frac{\partial \zeta_o}{\partial T} s_o + \frac{\partial \zeta_g}{\partial T} (1 - s_o)) \frac{\partial T}{\partial t} + \\
& +m(\frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o} \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_g}{\partial x_{1,g}} \frac{\partial x_{1,g}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_g}{\partial x_{2,g}} \frac{\partial x_{2,g}}{\partial t})(1 - s_o) = \\
& = \operatorname{div}(k(\xi_o \frac{f_o}{\mu_o} + \xi_g \frac{f_g}{\mu_g}) \nabla p_o) - \operatorname{div}(k(\xi_o \frac{f_o}{\mu_o} \rho_o + \xi_g \frac{f_g}{\mu_g} \rho_g) g \nabla z) + \operatorname{div}(\xi_g k \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o} \nabla s_o) + \\
& + \operatorname{div}(\xi_g k \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T} \nabla T) + \operatorname{div}(D_{3,o} \nabla(\xi_o x_{3,o}) + D_{3,g} \nabla(\xi_g x_{3,g})) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_1} Q_{3,i}^{nagn} \delta(x - x_{ni}, y - y_{ni}, z - z_{ni}) - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{3,i}^{dob} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}) - \\
& - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{1,i} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}) - \sum_{i=1}^{N_2} Q_{2,i} \delta(x - x_{di}, y - y_{di}, z - z_{di}), \quad (15)
\end{aligned}$$

В области $0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$, $0 \leq z \leq l_z$, $0 < t \leq T$ введем следующую разностную сетку. Где $x_{i+1} = x_i + h x_i$, $y_{j+1} = y_j + h y_j$, $z_{k+1} = z_k + h z_k$, $t^0 = 0$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, ($i = 0 \dots N_X, j = 0 \dots N_Y, k = 0 \dots N_Z, n = 0 \dots M$).

Уравнение (15) является нелинейным относительно давления нефти, будем ее решать схемой расщепления по локальным переменным.

Неявная схема расщепления для уравнения давления нефти по направлению x будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
& h x_i h y_j h z_k m_{ijk} ((\frac{\partial \zeta_o}{\partial p_o})_{ijk}^n s_{o,ijk}^n + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n (1 - s_{o,ijk}^n)) \frac{p_{o,ijk}^{n+1/3} - p_{o,ijk}^n}{\tau} + \\
& + h x_i h y_j h z_k m_{ijk} s_{o,ijk}^n ((\frac{\partial \zeta_o}{\partial x_{1,o}})_{ijk}^n \frac{x_{1,o,ijk}^{n+1/2} - x_{1,o,ijk}^n}{\tau} + (\frac{\partial \zeta_o}{\partial x_{2,o}})_{ijk}^n \frac{x_{2,o,ijk}^{n+1/2} - x_{2,o,ijk}^n}{\tau}) + \\
& + h x_i h y_j h z_k m_{ijk} (\xi_{o,ijk}^n - \xi_{g,ijk}^n) \frac{s_{o,ijk}^{n+1/2} - s_{o,ijk}^n}{\tau} + \\
& + h x_i h y_j h z_k m_{ijk} ((\frac{\partial \zeta_o}{\partial T})_{ijk}^n s_{o,ijk}^n + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial T})_{ijk}^n (1 - s_{o,ijk}^n)) \frac{T_{ijk}^{n+1/2} - T_{ijk}^n}{\tau} + \\
& + h x_i h y_j h z_k m_{ijk} ((\frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n (\frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk}^n \frac{s_{o,ijk}^{n+1/2} - s_{o,ijk}^n}{\tau} + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial x_{1,g}})_{ijk}^n \frac{x_{1,g,ijk}^{n+1/2} - x_{1,g,ijk}^n}{\tau} + \\
& + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n (\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk}^n \frac{T_{ijk}^{n+1/2} - T_{ijk}^n}{\tau} + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial x_{2,g}})_{ijk}^n \frac{x_{2,g,ijk}^{n+1/2} - x_{2,g,ijk}^n}{\tau} (1 - s_{o,ijk}^n) = \\
& = h y_j h z_k ((k_x (\xi_o \frac{f_o}{\mu_o} + \xi_g \frac{f_g}{\mu_g}))_{i+1/2jk}^{n+1/3} \frac{(p_{o,i+1jk}^{n+1/3}) - (p_{o,ijk}^{n+1/3})}{h x_i} - \\
& - (k_x (\xi_o \frac{f_o}{\mu_o} + \xi_g \frac{f_g}{\mu_g}))_{i-1/2jk}^{n+1/3} \frac{(p_{o,ijk}^{n+1/3}) - (p_{o,i-1jk}^{n+1/3})}{h x_{i-1}}) + \\
& + h y_j h z_k ((\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{i+1/2jk}^n \frac{s_{o,i+1jk}^n - s_{o,ijk}^n}{h x_i} - (\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{i-1/2jk}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,i-1jk}^n}{h x_{i-1}}) + \\
& + h x_i h z_k ((\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ij+1/2k}^n \frac{s_{o,ij+1k}^n - s_{o,ijk}^n}{h y_j} - (\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ij-1/2k}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,ij-1k}^n}{h y_{j-1}}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +hx_ihy_j((\xi_gk_z\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk+1/2}^n\frac{s_{o,ijk+1}^n-s_{o,ijk}^n}{hz_k}-(\xi_gk_z\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk-1/2}^n\frac{s_{o,ijk}^n-s_{o,ijk-1}^n}{hz_{k-1}})+ \\
& +hy_jhz_k((\xi_gk_x\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{i+1/2jk}^n\frac{T_{i+1jk}^n-T_{ijk}^n}{hx_i}-(\xi_gk_x\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{i-1/2jk}^n\frac{T_{ijk}^n-T_{i-1jk}^n}{hx_{i-1}})+ \\
& +hx_ihz_k((\xi_gk_y\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ij+1/2k}^n\frac{T_{ij+1k}^n-T_{ijk}^n}{hy_j}-(\xi_gk_y\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ij-1/2k}^n\frac{T_{ijk}^n-T_{ij-1k}^n}{hy_{j-1}})+ \\
& +hx_ihy_j((\xi_gk_z\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk+1/2}^n\frac{T_{ijk+1}^n-T_{ijk}^n}{hz_k}-(\xi_gk_z\frac{f_g}{\mu_g}\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk-1/2}^n\frac{T_{ijk}^n-T_{ijk-1}^n}{hz_{k-1}})+ \\
& +hy_jhz_k((D_{3x,o})_{i+1/2jk}^n\frac{\xi_{o,i+1jk}^nx_{3,o,i+1jk}^n-\xi_{o,ijk}^nx_{3,o,ijk}^n}{hx_i}-(D_{3x,o})_{i-1/2jk}^n\frac{\xi_{o,ijk}^nx_{3,o,ijk}^n-\xi_{o,i-1jk}^nx_{3,o,i-1jk}^n}{hx_{i-1}})+ \\
& +hx_ihz_k((D_{3y,o})_{ij+1/2k}^n\frac{\xi_{o,ij+1k}^nx_{3,o,ij+1k}^n-\xi_{o,ijk}^nx_{3,o,ijk}^n}{hy_j}-(D_{3y,o})_{ij-1/2k}^n\frac{\xi_{o,ijk}^nx_{3,o,ijk}^n-\xi_{o,ij-1k}^nx_{3,o,ij-1k}^n}{hy_{j-1}})+ \\
& +hx_ihy_j((D_{3z,o})_{ijk+1/2}^n\frac{\xi_{o,ijk+1}^nx_{3,o,ijk+1}^n-\xi_{o,ijk}^nx_{3,o,ijk}^n}{hz_k}-(D_{3z,o})_{ijk-1/2}^n\frac{\xi_{o,ijk}^nx_{3,o,ijk}^n-\xi_{o,ijk-1}^nx_{3,o,ijk-1}^n}{hz_{k-1}})+ \\
& +hy_jhz_k((D_{3x,g})_{i+1/2jk}^n\frac{\xi_{g,i+1jk}^nx_{3,g,i+1jk}^n-\xi_{g,ijk}^nx_{3,g,ijk}^n}{hx_i}-(D_{3x,g})_{i-1/2jk}^n\frac{\xi_{g,ijk}^nx_{3,g,ijk}^n-\xi_{g,i-1jk}^nx_{3,g,i-1jk}^n}{hx_{i-1}})+ \\
& +hx_ihz_k((D_{3y,g})_{ij+1/2k}^n\frac{\xi_{g,ij+1k}^nx_{3,g,ij+1k}^n-\xi_{g,ijk}^nx_{3,g,ijk}^n}{hy_j}-(D_{3y,g})_{ij-1/2k}^n\frac{\xi_{g,ijk}^nx_{3,g,ijk}^n-\xi_{g,ij-1k}^nx_{3,g,ij-1k}^n}{hy_{j-1}})+ \\
& +hx_ihy_j((D_{3z,g})_{ijk+1/2}^n\frac{\xi_{g,ijk+1}^nx_{3,g,ijk+1}^n-\xi_{g,ijk}^nx_{3,g,ijk}^n}{hz_k}-(D_{3z,g})_{ijk-1/2}^n\frac{\xi_{g,ijk}^nx_{3,g,ijk}^n-\xi_{g,ijk-1}^nx_{3,g,ijk-1}^n}{hz_{k-1}})+ \\
& +\sum_{l=1}^{N_1}(Q_{3,l}^{nagn})^n\omega_{ijk}^{nagn}-\sum_{l=1}^{N_2}((Q_{1,l}^{dob})^n+(Q_{2,l}^{dob})^n+(Q_{3,l}^{dob})^n)\omega_{ijk}^{dob}.
\end{aligned}$$

Неявная схема расщепления для уравнения давления нефти по направлению y будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
& hx_ihy_jhz_km_{ijk}((\frac{\partial\zeta_o}{\partial p_o})_{ikj}^ns_{o,ijk}^n+(\frac{\partial\zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n(1-s_{o,ijk}^n))\frac{p_{o,ijk}^{n+2/3}-p_{o,ijk}^{n+1/3}}{\tau}+ \\
& +hx_ihy_jhz_km_{ijk}s_{o,ijk}^n((\frac{\partial\zeta_o}{\partial x_{1,o}})_{ijk}^n\frac{x_{1,o,ijk}^{n+1/2}-x_{1,o,ijk}^n}{\tau}+(\frac{\partial\zeta_o}{\partial x_{2,o}})_{ijk}^n\frac{x_{2,o,ijk}^{n+1/2}-x_{2,o,ijk}^n}{\tau})+ \\
& +hx_ihy_jhz_km_{ijk}(\xi_{o,ijk}^n-\xi_{g,ijk}^n)\frac{s_{o,ijk}^{n+1/2}-s_{o,ijk}^n}{\tau}+ \\
& +hx_ihy_jhz_km_{ijk}((\frac{\partial\zeta_o}{\partial T})_{ikj}^ns_{o,ijk}^n+(\frac{\partial\zeta_g}{\partial T})_{ijk}^n(1-s_{o,ijk}^n))\frac{T_{ijk}^{n+1/2}-T_{ijk}^n}{\tau}+ \\
& +hx_ihy_jhz_km_{ijk}((\frac{\partial\zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n(\frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk}^n\frac{s_{o,ijk}^{n+1/2}-s_{o,ijk}^n}{\tau}+(\frac{\partial\zeta_g}{\partial x_{1,g}})_{ijk}^n\frac{x_{1,g,ijk}^{n+1/2}-x_{1,g,ijk}^n}{\tau}+ \\
& +(\frac{\partial\zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n(\frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk}^n\frac{T_{ijk}^{n+1/2}-T_{ijk}^n}{\tau}+(\frac{\partial\zeta_g}{\partial x_{2,g}})_{ijk}^n\frac{x_{2,g,ijk}^{n+1/2}-x_{2,g,ijk}^n}{\tau})(1-s_{o,ijk}^n)= \\
& = hx_ihz_k((k_y(\xi_o\frac{f_o}{\mu_o}+\xi_g\frac{f_g}{\mu_g}))_{ij+1/2k}^{n+2/3}\frac{(p_{o,ij+1k}^{n+2/3})-(p_{o,ijk}^{n+2/3})}{hy_j}-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (k_y (\xi_o \frac{f_o}{\mu_o} + \xi_g \frac{f_g}{\mu_g}))_{ij-1/2k}^{n+2/3} \frac{(p_{o,ijk}^{n+2/3}) - (p_{o,ij-1k}^{n+2/3})}{hy_{j-1}} + \\
& + \frac{1}{2} hy_j hz_k ((\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{i+1/2jk}^n \frac{s_{o,i+1jk}^n - s_{o,ijk}^n}{hx_i} - (\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{i-1/2jk}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,i-1jk}^n}{hx_{i-1}}) + \\
& + hx_i hz_k ((\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ij+1/2k}^n \frac{s_{o,ij+1k}^n - s_{o,ijk}^n}{hy_j} - (\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ij-1/2k}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,ij-1k}^n}{hy_{j-1}}) + \\
& + hx_i hy_j ((\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk+1/2}^n \frac{s_{o,ijk+1}^n - s_{o,ijk}^n}{hz_k} - (\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk-1/2}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,ijk-1}^n}{hz_{k-1}}) + \\
& + hy_j hz_k ((\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{i+1/2jk}^n \frac{T_{ij+1k}^n - T_{ijk}^n}{hx_i} - (\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{i-1/2jk}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{i-1jk}^n}{hx_{i-1}}) + \\
& + hx_i hz_k ((\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ij+1/2k}^n \frac{T_{ij+1k}^n - T_{ijk}^n}{hy_j} - (\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ij-1/2k}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{ij-1k}^n}{hy_{j-1}}) + \\
& + hx_i hy_j ((\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk+1/2}^n \frac{T_{ijk+1}^n - T_{ijk}^n}{hz_k} - (\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk-1/2}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{ijk-1}^n}{hz_{k-1}}) + \\
& + hy_j hz_k ((D_{3x,o})_{i+1/2jk}^n \frac{\xi_{o,i+1jk}^n x_{3,o,i+1jk}^n - \xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n}{hx_i} - (D_{3x,o})_{i-1/2jk}^n \frac{\xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n - \xi_{o,i-1jk}^n x_{3,o,i-1jk}^n}{hx_{i-1}}) + \\
& + hx_i hz_k ((D_{3y,o})_{ij+1/2k}^n \frac{\xi_{o,ij+1k}^n x_{3,o,ij+1k}^n - \xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n}{hy_j} - (D_{3y,o})_{ij-1/2k}^n \frac{\xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n - \xi_{o,ij-1k}^n x_{3,o,ij-1k}^n}{hy_{j-1}}) + \\
& + hx_i hy_j ((D_{3z,o})_{ijk+1/2}^n \frac{\xi_{o,ijk+1}^n x_{3,o,ijk+1}^n - \xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n}{hz_k} - (D_{3z,o})_{ijk-1/2}^n \frac{\xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n - \xi_{o,ijk-1}^n x_{3,o,ijk-1}^n}{hz_{k-1}}) + \\
& + hy_j hz_k ((D_{3x,g})_{i+1/2jk}^n \frac{\xi_{g,i+1jk}^n x_{3,g,i+1jk}^n - \xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n}{hx_i} - (D_{3x,g})_{i-1/2jk}^n \frac{\xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n - \xi_{g,i-1jk}^n x_{3,g,i-1jk}^n}{hx_{i-1}}) + \\
& + hx_i hz_k ((D_{3y,g})_{ij+1/2k}^n \frac{\xi_{g,ij+1k}^n x_{3,g,ij+1k}^n - \xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n}{hy_j} - (D_{3y,g})_{ij-1/2k}^n \frac{\xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n - \xi_{g,ij-1k}^n x_{3,g,ij-1k}^n}{hy_{j-1}}) + \\
& + hx_i hy_j ((D_{3z,g})_{ijk+1/2}^n \frac{\xi_{g,ijk+1}^n x_{3,g,ijk+1}^n - \xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n}{hz_k} - (D_{3z,g})_{ijk-1/2}^n \frac{\xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n - \xi_{g,ijk-1}^n x_{3,g,ijk-1}^n}{hz_{k-1}}) + \\
& + \sum_{l=1}^{N_1} (Q_{3,l}^{nagn})^n \omega_{ijk}^{nagn} - \sum_{l=1}^{N_2} ((Q_{1,l}^{dob})^n + (Q_{2,l}^{dob})^n + (Q_{3,l}^{dob})^n) \omega_{ijk}^{dob}.
\end{aligned}$$

Неявная схема расщепления для уравнения давления нефти по направлению z будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
& hx_i hy_j hz_k m_{ijk} ((\frac{\partial \zeta_o}{\partial p_o})_{ikj}^n s_{o,ijk}^n + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n (1 - s_{o,ijk}^n)) \frac{p_{o,ijk}^{n+1} - p_{o,ijk}^{n+2/3}}{\tau} + \\
& + hx_i hy_j hz_k m_{ijk} s_{o,ijk}^n ((\frac{\partial \zeta_o}{\partial x_{1,o}})_{ijk}^n \frac{x_{1,o,ijk}^{n+1/2} - x_{1,o,ijk}^n}{\tau} + (\frac{\partial \zeta_o}{\partial x_{2,o}})_{ijk}^n \frac{x_{2,o,ijk}^{n+1/2} - x_{2,o,ijk}^n}{\tau}) + \\
& + hx_i hy_j hz_k m_{ijk} (\xi_{o,ijk}^n - \xi_{g,ijk}^n) \frac{s_{o,ijk}^{n+1/2} - s_{o,ijk}^n}{\tau} + \\
& + hx_i hy_j hz_k m_{ijk} ((\frac{\partial \zeta_o}{\partial T})_{ikj}^n s_{o,ijk}^n + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial T})_{ijk}^n (1 - s_{o,ijk}^n)) \frac{T_{ijk}^{n+1/2} - T_{ijk}^n}{\tau} + \\
& + hx_i hy_j hz_k m_{ijk} ((\frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g})_{ijk}^n (\frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk}^n \frac{s_{o,ijk}^{n+1/2} - s_{o,ijk}^n}{\tau} + (\frac{\partial \zeta_g}{\partial x_{1,g}})_{ijk}^n \frac{x_{1,g,ijk}^{n+1/2} - x_{1,g,ijk}^n}{\tau} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial \zeta_g}{\partial p_g} \right)_{ijk}^n \left(\frac{\partial p_{cap}}{\partial T} \right)_{ijk}^n \frac{T_{ijk}^{n+1/2} - T_{ijk}^n}{\tau} + \left(\frac{\partial \zeta_g}{\partial x_{2,g}} \right)_{ijk}^n \frac{x_{2,g,ijk}^{n+1/2} - x_{2,g,ijk}^n}{\tau} (1 - s_{o,ijk}^n) = \\
& = h x_i h y_j \left((k_z (\xi_o \frac{f_o}{\mu_o} + \xi_g \frac{f_g}{\mu_g}))_{ijk+1/2}^{n+1} \frac{(p_{o,ijk+1}^{n+1}) - (p_{o,ijk}^{n+1})}{h z_k} - \right. \\
& \quad \left. - (k_z (\xi_o \frac{f_o}{\mu_o} + \xi_g \frac{f_g}{\mu_g}))_{ijk-1/2}^{n+1} \frac{(p_{o,ijk}^{n+1}) - (p_{o,ijk-1}^{n+1})}{h z_{k-1}} \right) + \\
& + h y_j h z_k \left((\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{i+1/2jk}^n \frac{s_{o,i+1jk}^n - s_{o,ijk}^n}{h x_i} - (\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{i-1/2jk}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,i-1jk}^n}{h x_{i-1}} \right) + \\
& + h x_i h z_k \left((\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ij+1/2k}^n \frac{s_{o,ij+1k}^n - s_{o,ijk}^n}{h y_j} - (\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ij-1/2k}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,ij-1k}^n}{h y_{j-1}} \right) + \\
& + h x_i h y_j \left((\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk+1/2}^n \frac{s_{o,ijk+1}^n - s_{o,ijk}^n}{h z_k} - (\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial s_o})_{ijk-1/2}^n \frac{s_{o,ijk}^n - s_{o,ijk-1}^n}{h z_{k-1}} \right) + \\
& + h y_j h z_k \left((\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{i+1/2jk}^n \frac{T_{i+1jk}^n - T_{ijk}^n}{h x_i} - (\xi_g k_x \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{i-1/2jk}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{i-1jk}^n}{h x_{i-1}} \right) + \\
& + h x_i h z_k \left((\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ij+1/2k}^n \frac{T_{ij+1k}^n - T_{ijk}^n}{h y_j} - (\xi_g k_y \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ij-1/2k}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{ij-1k}^n}{h y_{j-1}} \right) + \\
& + h x_i h y_j \left((\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk+1/2}^n \frac{T_{ijk+1}^n - T_{ijk}^n}{h z_k} - (\xi_g k_z \frac{f_g}{\mu_g} \frac{\partial p_{cap}}{\partial T})_{ijk-1/2}^n \frac{T_{ijk}^n - T_{ijk-1}^n}{h z_{k-1}} \right) + \\
& + h y_j h z_k \left((D_{3x,o})_{i+1/2jk}^n \frac{\xi_{o,i+1jk}^n x_{3,o,i+1jk}^n - \xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n}{h x_i} - (D_{3x,o})_{i-1/2jk}^n \frac{\xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n - \xi_{o,i-1jk}^n x_{3,o,i-1jk}^n}{h x_{i-1}} \right) + \\
& + h x_i h z_k \left((D_{3y,o})_{ij+1/2k}^n \frac{\xi_{o,ij+1k}^n x_{3,o,ij+1k}^n - \xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n}{h y_j} - (D_{3y,o})_{ij-1/2k}^n \frac{\xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n - \xi_{o,ij-1k}^n x_{3,o,ij-1k}^n}{h y_{j-1}} \right) + \\
& + h x_i h y_j \left((D_{3z,o})_{ijk+1/2}^n \frac{\xi_{o,ijk+1}^n x_{3,o,ijk+1}^n - \xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n}{h z_k} - (D_{3z,o})_{ijk-1/2}^n \frac{\xi_{o,ijk}^n x_{3,o,ijk}^n - \xi_{o,ijk-1}^n x_{3,o,ijk-1}^n}{h z_{k-1}} \right) + \\
& + h y_j h z_k \left((D_{3x,g})_{i+1/2jk}^n \frac{\xi_{g,i+1jk}^n x_{3,g,i+1jk}^n - \xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n}{h x_i} - (D_{3x,g})_{i-1/2jk}^n \frac{\xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n - \xi_{g,i-1jk}^n x_{3,g,i-1jk}^n}{h x_{i-1}} \right) + \\
& + h x_i h z_k \left((D_{3y,g})_{ij+1/2k}^n \frac{\xi_{g,ij+1k}^n x_{3,g,ij+1k}^n - \xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n}{h y_j} - (D_{3y,g})_{ij-1/2k}^n \frac{\xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n - \xi_{g,ij-1k}^n x_{3,g,ij-1k}^n}{h y_{j-1}} \right) + \\
& + h x_i h y_j \left((D_{3z,g})_{ijk+1/2}^n \frac{\xi_{g,ijk+1}^n x_{3,g,ijk+1}^n - \xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n}{h z_k} - (D_{3z,g})_{ijk-1/2}^n \frac{\xi_{g,ijk}^n x_{3,g,ijk}^n - \xi_{g,ijk-1}^n x_{3,g,ijk-1}^n}{h z_{k-1}} \right) + \\
& + \sum_{l=1}^{N_1} (Q_{3,l}^{nagn})^n \omega_{ijk}^{nagn} - \sum_{l=1}^{N_2} ((Q_{1,l}^{dob})^n + (Q_{2,l}^{dob})^n + (Q_{3,l}^{dob})^n) \omega_{ijk}^{dob}.
\end{aligned}$$

Будем решать данные уравнения последовательным применением метода прогонки. Условие устойчивости и сходимости метода выполняется.

После находятся светлые и тяжелые компоненты нефти. Затем, по вычисленным давлениям, двуокиси углерода, светлым и тяжелым компонентам нефти, насыщенности воды, нефти, и их плотности находятся интегральные показатели разработки месторождения: нефтеотдача, обводненность, накопленная добыча нефти и другие показатели на задаваемый момент времени разработки.

Список литературы

- [1] Математическое моделирование пластовых систем. Азиз Х., Сеттари Э. - М.: Недра, 1982. - 407 с.
- [2] Upon one objective for reservoir development process. Mukimbekov M.Zh., Sherkeshbayeva B.K. // Science and technology. - 2010. - В.6. - Р. 8-14.
- [3] Моделирование плановой задачи в освоении месторождений вторичным методом. Мукимбеков М.Ж. // Труды 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". – Самара, 2009. - Ч.2. - С. 120-122.

УДК 517.977.55

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА ЗА КОНЕЧНЫЙ ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

З.Н. Мурзабеков, Ш.А. Айпанов

НИИ Математики и механики КазНУ им. аль-Фараби

Abstract. The optimal control problem for linear systems with free right endpoints of trajectories and quadratic cost functional is considered. The method for designing feedback control taking into account restrictions on control values, based on using Lagrange multipliers of a special type, is suggested. As an example the problem of optimal control of the plane lateral motion within the finite time interval is considered.

Keywords: linear systems, quadratic functional, restricted control, lateral motion of the plane.

Аңдатпа. Жолсызықтарының оң жақ ұштары еркін болғанда және квадраттық мақсаттық функционал берілген жағдайда сызықтық жүйелерді тиімді басқару есебі қарастырылған. Басқарым мәндеріне қойылған шектеулерді ескере отырып кері байланысты басқарым құру әдісі ұсынылған, ол арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштерін қолдануға негізделген. Мысал ретінде ұшақтың бүйірлік қозғалысын ақырлы уақыт аралығында тиімді басқару есебі қарастырылған.

Кілттік сөздер: сызықтық жүйелер, квадраттық функционал, шектеулі басқарым, ұшақтың бүйірлік қозғалысы.

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления линейными системами со свободными правыми концами траекторий и квадратичным целевым функционалом. Предлагается метод построения управления с обратной связью с учетом ограничений на значения управления, основанный на использовании множителей Лагранжа специального вида. В качестве примера рассмотрена задача оптимального управления боковым движением самолета за конечный интервал времени.

Ключевые слова: линейные системы, квадратичный функционал, ограниченное управление, боковое движение самолета.

Введение. Задачи оптимального управления (ЗОУ) часто встречаются в различных отраслях науки и техники [1-2]. Это, например, задачи управления космическими аппаратами и самолетами, радиотехническими устройствами, электроэнергетическими системами, химическими и ядерными реакторами, экономическими и экологическими системами и др. В простейших системах автоматического управления рассматриваются так называемые линейно-квадратичные задачи (LQ-задачи) с линейным объектом управления и с квадратичным целевым функционалом. Впервые аналитическое решение LQ-задачи для систем со свободными правыми концами траекторий было получено в работах А.М. Летова [3] и Р.Е. Калмана [4]. Для решения ЗОУ могут быть использованы принцип максимума Понтрягина [5] и метод динамического программирования Беллмана [6].

В данной работе для LQ-задачи со свободными правыми концами траекторий и с ограничениями на значения входного сигнала предлагается алгоритм построения синтезирующего управления на основе метода множителей Лагранжа специального вида [7]. Аналогичный подход был использован в [8] для решения LQ-задачи при закрепленных концах траекторий системы.

Постановка задачи оптимального управления. Рассматривается следующая LQ-задача:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

$$u(t) \in U(t) = \{u \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}, \quad (t_0 \leq t \leq T), \quad (2)$$

$$J(u) = \frac{1}{2}x'(T)Fx(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)] dt \rightarrow \inf_u, \quad (3)$$

где $x(t)$ — n -вектор состояния объекта; $u(t)$ — m -вектор кусочно-непрерывных управляющих воздействий; $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$ соответственно; $Q(t)$ — положительно полуопределенная $(n \times n)$ -матрица; $R(t)$ — положительно определенная $(m \times m)$ -матрица; F — положительно полуопределенная $(n \times n)$ -матрица; $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — кусочно-непрерывные функции. Штрих означает операцию транспонирования.

Ставится задача: найти синтезирующее управление $u(t) = u(x(t), t)$ такое, что соответствующая ему пара $(x(t), u(t))$ минимизирует функционал (3), где $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (1) при начальном условии $x(t_0) = x_0$ и управлении $u(t)$, $(t_0 \leq t \leq T)$, удовлетворяющим ограничению (2).

Алгоритм построения синтезирующего управления. С использованием метода, основанного на использовании множителей Лагранжа специального вида [7], можно получить алгоритм решения ЗОУ (1)-(3), состоящий из двух этапов.

1 этап. Проинтегрировать следующую систему дифференциальных уравнений в обратном направлении изменения времени в интервале $[t_0, T]$:

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), & K(T) &= K_T, \\ \dot{N}(t) &= -\bar{A}'(t)N(t) - N(t)\bar{A}(t), & N(T) &= F - K_T, \\ \dot{W}(t, T) &= \bar{A}(t)W(t, T) + W(t, T)\bar{A}'(t) - S(t), & W(T, T) &= O_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где $K(t)$, $N(t)$, $W(t, T)$ — симметрические матрицы размерности $(n \times n)$; K_T — положительно полуопределенная $(n \times n)$ -матрица; O_n — нулевая $(n \times n)$ -матрица; $S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$; $\bar{A}(t) = A(t) - S(t)K(t)$. В результате интегрирования системы (4) определяются матрицы $K(t_0) = K_0$, $N(t_0) = N_0$, $W(t_0, T) = W_0$ и вычисляется вектор $q_0 = [E + N_0W_0]^{-1}N_0x_0$.

2 этап. Проинтегрировать следующую систему дифференциальных уравнений в прямом направлении изменения времени в интервале $[t_0, T]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) - S(t)q(t) + B(t)\varphi(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{q}(t) &= -\bar{A}'(t)q(t) + [E + N(t)W(t, T)]^{-1}N(t)B(t)\varphi(x, t), \quad q(t_0) = q_0, \\ \dot{K}(t) &= -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_0) = K_0, \\ \dot{N}(t) &= -\bar{A}'(t)N(t) - N(t)\bar{A}(t), \quad N(t_0) = N_0, \\ \dot{W}(t, T) &= \bar{A}(t)W(t, T) + W(t, T)\bar{A}'(t) - S(t), \quad W(t_0, T) = W_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение $x(t)$, $(t \in [t_0, T])$, получаемое из (5), соответствует искомой оптимальной траектории системы, а оптимальное управление $u(t)$ вычисляется по формуле

$$u(t) = u(x(t), t) = \omega(x(t), t) + \varphi(x(t), t),$$

где

$$\begin{aligned} \omega(x(t), t) &= -R^{-1}(t)B'(t)[K(t)x(t) + q(t)], \\ \varphi(x(t), t) &= \max\{0; \alpha(t) - \omega(x(t), t)\} - \max\{0; \omega(x(t), t) - \beta(t)\}. \end{aligned}$$

Управление боковым движением самолета. Уравнения возмущенного движения самолета относительно невозмущенной траектории полета записывают обычно в системе координат $OX_1Y_1Z_1$, связанной с летательным аппаратом. Начало координат O совпадает с центром тяжести самолета; ось OX_1 (продольная ось) проводится параллельно хорде крыла самолета; ось OY_1 перпендикулярна оси OX_1 и расположена в плоскости симметрии самолета; ось OZ_1 (поперечная ось) перпендикулярна к осям OX_1 и OY_1 , и, следовательно, к плоскости симметрии самолета (рисунки 1, 2).

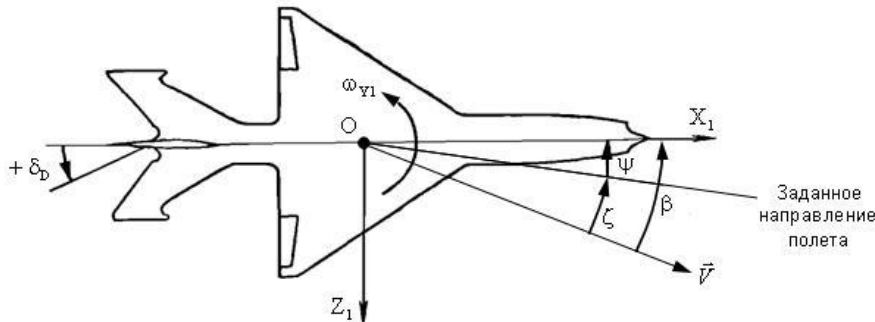


Рисунок 1 Боковое движение самолета (вид сверху)

Движения самолета по крену, рысканию и скольжению образуют в совокупности так называемое боковое движение. Пусть самолет набрал требуемую высоту и его невозмущенное движение происходит в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью в заданном направлении полета. Для записи уравнений возмущенного бокового движения самолета введем следующие обозначения [9]: $\beta(t)$ – угол скольжения (угол между вектором скорости самолета и осью OX_1); $\omega_{X1}(t)$ – угловая скорость крена (угловая скорость поворота вокруг оси OX_1); $\omega_{Y1}(t)$ – угловая скорость рыскания (угловая скорость поворота вокруг оси OY_1); $\gamma(t)$ – угол крена (угол между горизонтом и осью OZ_1); $\psi(t)$ – угол рыскания (угол между заданным направлением полета и осью OX_1);

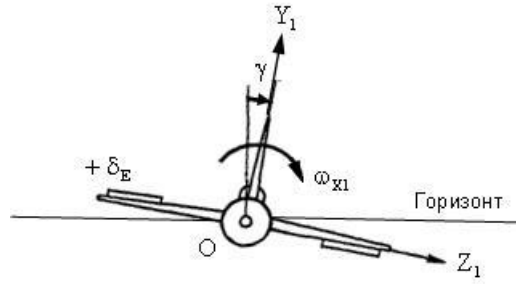


Рисунок 2 Боковое движение самолета (вид сзади)

$\zeta(t) = \beta(t) - \psi(t)$ – угол отклонения от курса (угол между вектором скорости самолета $\vec{V}$ и заданным направлением полета). Управление боковым движением самолета осуществляется за счет $\delta_E(t)$ – угла отклонения элеронов и $\delta_D(t)$ – угла отклонения руля направления.

Возмущенное боковое движение самолета относительно установившегося горизонтального полета описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

где через $x(t)$ обозначен вектор состояния объекта управления (самолета):

$x(t) = (\beta(t), \omega_{x1}(t), \omega_{y1}(t), \gamma(t), \psi(t))'$; вектор управляющих воздействий равен $u(t) = (\delta_E(t), \delta_D(t))'$.

В [9] рассмотрен пример самолета, имеющего вес $G = 441\,450$ н, летящего на высоте $h = 9\,000$ м, со скоростью $V = 222$ м/с, для которого матрицы A и B в уравнении (6) имеют следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} -0.0297 & 0 & 1 & 0.0438 & 0 \\ -1.2156 & -0.7922 & 0.1306 & 0 & 0 \\ 0.4304 & 0.02101 & -0.01512 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1.5871 & 0.04035 \\ 0.06714 & -0.3807 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от [9], где рассмотрена задача оптимальной стабилизации на бесконечном интервале времени $t \in [t_0, \infty]$, мы исследуем динамику объекта управления на конечном интервале $[t_0, T]$. Кроме того, предполагается, что имеются ограничения на значения управлений: $|\delta_E(t)| \leq \Delta_E$, $|\delta_D(t)| \leq \Delta_D$, $(t_0 \leq t \leq T)$, т.е. множество допустимых управлений U образуют прямоугольник

$$u(t) \in U = \{u = (\delta_E, \delta_D) \mid -\Delta_E \leq \delta_E \leq \Delta_E, \quad -\Delta_D \leq \delta_D \leq \Delta_D\}, \quad (t_0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Целевой функционал выберем в виде

$$J(\delta_E, \delta_D) = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta^2(T)}{F_1^2} + \frac{\omega_{x1}^2(T)}{F_2^2} + \frac{\omega_{y1}^2(T)}{F_3^2} + \frac{\gamma^2(T)}{F_4^2} + \frac{\psi^2(T)}{F_5^2} \right] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left\{ \frac{\gamma^2(t)}{Q_1^2} + \frac{[\beta(t) - \psi(t)]^2}{Q_2^2} + \frac{\delta_E^2(t)}{R_1^2} + \frac{\delta_D^2(t)}{R_2^2} \right\} dt \rightarrow \inf_{(\delta_E, \delta_D)}, \quad (8)$$

где $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ – заданные константы. Здесь за счет терминальных сла-

гаемых в функционале мы добиваемся, чтобы фазовые координаты в конечный момент времени принимали близкие к нулю значения, т.е. объект управления был близок к положению равновесия. А подинтегральная функция выбрана таким образом, чтобы стабилизировать $\gamma(t)$ – угол крена и $\zeta(t) = \beta(t) - \psi(t)$ – угол отклонения от курса, а также минимизировать затраты на управление $u(t) = (\delta_E(t), \delta_D(t))'$.

В численных расчетах были приняты следующие значения параметров:

$$\Delta_E = 1, \quad \Delta_D = 0.5, \quad F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 0.1, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = 0.1, \quad R_1 = R_2 = 1,$$

а начальные условия взяты в виде

$$\beta(t_0) = 0.3, \quad \omega_{X1}(t_0) = \omega_{Y1}(t_0) = \gamma(t_0) = 0.1, \quad \psi(t_0) = 0.2,$$

динамика объекта управления исследуется на конечном интервале времени $[t_0, T]$, где $t_0 = 0$, $T = 10$ с. На рис. 3 и 4 показаны результаты численных расчетов на компьютере для $\gamma(t)$ – угла крена и $\zeta(t) = \beta(t) - \psi(t)$ – угла отклонения от курса. На рис. 5 оптимальное управление $u(t) = (\delta_E(t), \delta_D(t))'$, ($t_0 \leq t \leq T$) изображено в системе координат $O\delta_E\delta_D$, где наглядно видно, что в интервале времени $t \in [t_0, t_1]$ управление принимает значения, расположенные на границе множества (7), затем в интервале $[t_1, T]$ принимает значения, соответствующие внутренним точкам множества допустимых управлений. Переключение управления происходит в момент времени $t_1 = 3.03$.

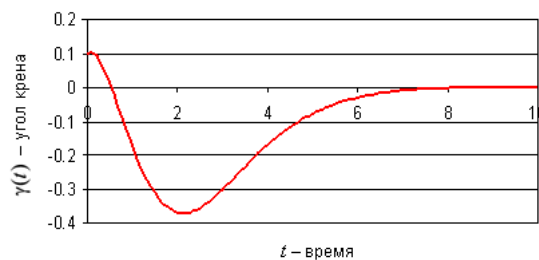


Рисунок 3 График изменения угла крена $\gamma(t)$

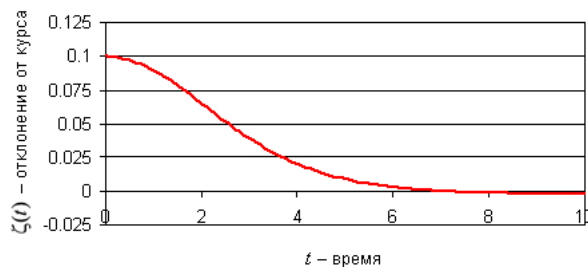


Рисунок 4 График угла отклонения от курса $\zeta(t)$

Как видно из результатов вычислений на компьютере, найденное оптимальное управление достаточно эффективно производит стабилизацию системы за конечный интервал времени. В

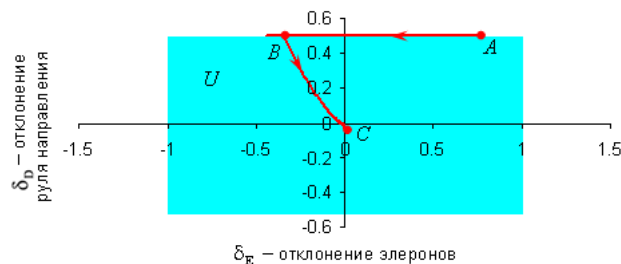


Рисунок 5 Оптимальное управление $u = (\delta_E, \delta_D) \in U$ (точка A соответствует начальному моменту t_0 ; B – моменту переключения управления t_1 ; C – конечному моменту T)

численных расчетах были получены следующие конечные значения фазовых переменных:

$$\begin{aligned}\beta(T) &= -0.3141 \cdot 10^{-3}, & \omega_{X1}(T) &= -0.3184 \cdot 10^{-4}, & \omega_{Y1}(T) &= -0.8114 \cdot 10^{-3}, \\ \gamma(T) &= -0.2104 \cdot 10^{-4}, & \psi(T) &= 0.7896 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Заключение. В работе приводится решение LQ-задачи со свободными правыми концами траекторий. Особенностью рассматриваемой ЗОУ является то, что динамика объекта управления исследуется в конечном интервале времени и имеются ограничения на значения входного сигнала. Предлагаемый метод решения задачи представлен в виде алгоритма, удобного для реализации на компьютере. Рассмотрена ЗОУ боковым движением самолета для стабилизации направления полета и угла крена. Найденное оптимальное управление достаточно эффективно производит стабилизацию системы за конечный интервал времени.

Отметим, что в качестве примера мы рассматриваем здесь ЗОУ со свободными правыми концами траекторий системы, поэтому не ставится цель достижения фазовыми координатами нулевых конечных значений, соответствующих состоянию равновесия системы. Если требуется обеспечить точный перевод системы в нулевое положение равновесия за конечный интервал времени, то надо рассмотреть ЗОУ с закрепленными концами траекторий [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (грант № 0704 / ГФ2).

Список литературы

- [1] Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – В 5-ти томах. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
- [2] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.
- [3] Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 1960. – Т. 21, № 4. – С. 436-441.
- [4] Kalman R.E. Contributions to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 1960. – Vol. 5, Segunda serie, No. 1. – P. 102-119.

- [5] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
- [6] Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1968. – 446 с.
- [7] Мурзабеков З.Н. Оптимизация управляемых систем. – Алматы: Изд-во АТУ, 2009. – 216 с.
- [8] Мурзабеков З.Н. Конструктивный метод решения краевых задач оптимального управления для линейных нестационарных управляемых систем при наличии внешних воздействий и ограничений на управления // Доклады НАН РК, сер. физ.-матем. – 2009. – № 3. – С. 16-21.
- [9] Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления: оптимизация, оценка и управление. – М.: Мир, 1972. – 544 с.

УДК 517.977.55

ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

З.Н. Мурзабеков, А.З. Мурзабеков

НИИ Математики и механики КазНУ им. аль-Фараби

Abstract. The optimization problem with constraints in the form of equalities and inequalities is considered. The problem's variables are divided into control variables and object's state variables. We propose a constructive method for determining the steady-state values of the control and object's state in the presence of bilateral restrictions. For solving the optimization problems under consideration the Lagrange multipliers of special form are used.

Keywords: optimization problem, Lagrange multipliers, equality and inequality constraints, objective function.

Аңдатпа. Теңдіктер мен теңсіздіктер түріндегі шектеулері бар тиімділеу есебі қарастырылған. Есептің айнымалылары басқарым айнымалылары мен объект жағдайының айнымалыларына бөлінген. Екі жақты шектеулер қойылғанда басқарым мен объект жағдайының тұрлаулы мәндерін анықтаудың сындарлы әдісі ұсынылған. Қарастырылып отырылған тиімділеу есептерін шешу үшін арнайы түрдегі Лагранж көбейткіштері қолданылған.

Кілттік сөздер: тиімділеу есебі, Лагранж көбейткіштері, теңдіктер мен теңсіздіктер түріндегі шектеулер, мақсаттық функция.

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств. Переменные задачи разделены на переменные управления и переменные состояния объекта. Предложен конструктивный метод для определения стационарных значений управления и состояния объекта при наличии двусторонних ограничений. Для решения рассматриваемых задач оптимизации использованы множители Лагранжа специального вида.

Ключевые слова: задача оптимизации, множители Лагранжа, ограничения типа равенств и неравенств, целевая функция.

Введение. На современном этапе развития экстремальные задачи заняли доминирующее положение, прежде всего вследствие ограниченности природных и материальных ресурсов, необходимости жесткой экономии энергии и материалов, роста народонаселения и других причин. Существенный прогресс при исследовании и практическом применении экстремальных задач связан также с развитием вычислительной техники и информационных технологий. Возникшие первоначально из нужд экономики и механики современные экстремальные задачи находят все возрастающую сферу применений в таких областях, как ядерная энергетика, биология, медицина, различные технологические процессы.

В настоящее время теория оптимизации, успешному применению которой способствует бурный прогресс в развитии средств вычислительной техники, вносит заметный вклад в ускорение научно-технического прогресса. Трудно назвать такую отрасль инженерной деятельности, где бы ни возникали задачи оптимизационного характера. Это, например, задачи определения наиболее эффективного режима работы различных технических систем, задачи организации производства, дающего наибольшую возможную прибыль при заданных ограниченных ресурсах, транспортные задачи и множество других.

Постановка каждой задачи оптимизации включает в себя два объекта: множество допустимых решений и целевую функцию, которую следует минимизировать или максимизировать на указанном множестве. С этой общей точки зрения и рассматриваются различные классы экстремальных задач, составляющие предмет линейного, нелинейного, динамического программирования, вариационного исчисления и теории оптимального управления. Обычно наши действия в условиях неоднозначности выбора определяются некоторой целью, которую мы стремимся достичь наилучшим образом. Тем самым человеческая деятельность связана с постоянным решением оптимизационных задач.

Наиболее простая задача безусловной минимизации функции многих переменных привлекла внимание математиков во времена, когда закладывались основы математического анализа. Она во многом стимулировала создание дифференциального исчисления, а необходимое условие существования экстремума, полученное Ферма в 1629 г., явилось одним из первых крупнейших результатов анализа. Позже в работах Ньютона и Лейбница были по существу сформулированы условия экстремума второго порядка (т.е. в терминах вторых производных) для этой задачи.

Важным этапом в истории естествознания явилась сочинение Ж.Л. Лагранжа «Аналитическая механика», опубликованное в 1788 г. Тракта́т Лагранжа сыграл исключительную роль и в развитии вариационного исчисления. Именно там была поставлена задача на условный экстремум. Для решения поставленной задачи Лагранж использовал основной прием, который стал знаменитым правилом множителей Лагранжа.

Условия экстремума первого порядка в вариационном исчислении были получены Эйлером (уравнения Эйлера), а второго порядка – Лежандром и Якоби. Важный вопрос о существовании решения в вариационном исчислении был впервые поставлен Вейерштрассом во второй половине XIX в.

Первые работы по экстремальным задачам при наличии ограничений общего вида (в виде равенств и неравенств) относятся к концу 30-х началу 40-х годов XX в. Здесь необходимо упомянуть имена американских ученых Чикагской школы: Блисс, Больца, Макшейн, Грейвс и др.

Независимо от исследований американских ученых оптимизационная тематика развивалась и в СССР. Пионером в этой области был Л.В. Канторович, опубликовавший в 1939 г. книгу, содержащую математические постановки ряда экономических задач. Но работы Канторовича,

как и результаты американских ученых, не привлекли внимание математиков и остались, по существу, незамеченными.

Время для этих задач созрело несколько позже: в конце 40-х годов прошлого века. Под влиянием прикладной тематики, которой приходилось заниматься в годы второй мировой войны, Данциг в США стал изучать задачи минимизации при линейных ограничениях, получившие название задач линейного программирования. Под влиянием работ фон Неймана по теории игр, Данциг, Гейл, Кун и Таккер создали теорию двойственных задач в линейном программировании – специфическую формулировку условий существования экстремума.

Существенный прогресс в теории оптимизации при изучении так называемых задач оптимального управления. Необходимые условия оптимальности для этих задач были сформулированы и доказаны Понтрягиным, Болтянским, Мищенко и Гамкрелидзе в 1956-1958 гг. в форме «принципа максимума». В иной форме условия оптимальности для подобных задач были получены Беллманом на основе идей динамического программирования. Работы Л.С. Понтрягина и Р. Беллмана составили математическую основу теории оптимального управления, послужили мощным толчком, как в развитии современной теории экстремальных задач, так и в создании численных методов решения таких задач. Эти методы были применены для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных и т.д.

С необходимостью решения задач оптимизации столкнулись и специалисты по теории автоматического управления. Трудami многих ученых XX столетия была создана теория автоматического регулирования и предложены специальные математические модели объектов, действующих в реальном масштабе времени.

К середине 60-х годов прошлого столетия в рамках вычислительной математики сложилось самостоятельное направление, связанное с численными методами. С тех пор непрерывно шло интенсивное развитие этого направления как вширь (разработка новых методов, исследование новых классов задач), так и вглубь (выработка единого аппарата для анализа сходимости и скорости сходимости, классификации методов). В настоящее время эта область вычислительной математики может считаться окончательно сформировавшейся, хотя существуют проблемы построения эффективных методов для некоторых специальных типов задач и отдельных специфических ситуаций [1-4].

Постановка задачи оптимизации. Для того, чтобы использовать математические результаты и численные методы теории оптимизации для решения конкретных задач, необходимо:

- а) построить математическую модель системы;
- б) составить целевую функцию;
- в) определить критерий оптимальности (требование экстремума целевой функции по управляющим воздействиям при наличии ограничений);
- г) построить оптимизационный алгоритм и решить экстремальную задачу.

Общий класс задач оптимизации с ограничениями связан с определением значений вектора управления $u = (u_1, \dots, u_m)$, минимизирующего скалярный критерий качества, который зависит от $m + n$ переменных:

$$\min z(x, u), \quad (1)$$

причем координаты вектора состояния $x = (x_1, \dots, x_n)$ связаны с координатами вектора управления следующими ограничениями

$$f_1(x, u) = 0, \quad (2)$$

$$f_2(x, u) \leq 0, \quad (3)$$

$$u \in D, \quad (4)$$

где x – вектор состояния объекта управления размерности $(n \times 1)$; u – вектор управляющих воздействий размерности $(n \times 1)$; векторные функции $f_1(x, u)$, $f_2(x, u)$ размерностей $(n \times 1)$, $(p \times 1)$ соответственно; множество D ограничено. Будем предполагать, что множество ограничений (2)-(4) не пусто.

Отметим, что для каждой конкретной задачи оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств, выбор среди переменных задачи и переменных управления не является единственным. Разделение на переменные управления и переменные состояния проводится для удобства определения управлений. Однако это разделение должно быть таким, чтобы с помощью соотношений (2) по известным значениям вектора управлений можно было определить значения вектора состояний системы.

Функция $z(x, u)$ называется целевой функцией (функцией качества, критерием оптимальности), а условия (2)-(4) – ограничениями задачи.

Ставится задача: найти управление u , минимизирующее значение целевой функции (1) при ограничениях (2)-(4).

Если функции $z(x, u)$, $f_1(x, u)$, $f_2(x, u)$ линейны по x и u , то такие задачи называются задачами линейного программирования.

Будем считать, что функции $z(x, u)$, $f_1(x, u)$, $f_2(x, u)$ дважды непрерывно дифференцируемы на множестве R^{n+m} . Задача со смешанными ограничениями (1)-(4) преобразуется в задачу с ограничениями типа равенств, если отсутствует условие (3). При отсутствии (2) имеем задачу с ограничениями типа неравенств.

Корректная постановка задачи служит ключом к успеху оптимизационного исследования. Искусство постановки задачи постигается в практической деятельности на примерах успешно реализованных алгоритмов и основывается на четком представлении преимуществ, недостатков и специфических особенностей различных методов оптимизации.

Значительный интерес представляет деление задач оптимизации по виду целевой функции, количеству переменных, числу и характеру ограничений, поскольку специфические особенности тех или иных задач играют важную роль при разработке методов и их решений. Многие практически важные задачи условной оптимизации имеют вид:

$$\min z(x, u), \quad (5)$$

$$f_1(x, u) = 0, \quad (6)$$

$$f_2(x, u) \leq 0, \quad (7)$$

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2, \quad \alpha_1 \leq u \leq \alpha_2, \quad (8)$$

т.е. компоненты векторов (x, u) ограничены сверху и снизу.

Для решения различных оптимизационных задач будем использовать множители Лагранжа специального вида. Метод множителей Лагранжа дает возможность выписать необходимое условие оптимальности и приводит к уравнениям специального вида для определения множителей Лагранжа. Если известно, что в поставленной задаче множество всех допустимых управлений и соответствующих состояний $x(u)$ системы ограничений (6)-(8) имеет множество решений, то

соответствующая задача с применением метода множителей Лагранжа выделяет оптимальное решение. Этим путем решены многие практически важные задачи определения эффективного режима работы различных технических систем, задачи организации производства при заданных ограниченных ресурсах и множество задач оптимального управления. Следует отметить, что практическое решение задач типа (5)-(8) часто связано с большими трудностями и требует разработки специальных алгоритмов.

Задача с ограничениями в виде равенств. Рассматривается оптимизационная задача: найти вектор управления u , минимизирующий значение целевой функции

$$z(x, u), \quad (9)$$

где вектор состояния x связан с вектором управления u с помощью соотношений

$$f(x, u) = 0, \quad (n \text{ уравнений}), \quad (10)$$

где x – вектор состояния объекта управления размерности $(n \times 1)$; u – вектор управляющих воздействий размерности $(m \times 1)$; векторная функция $f(x, u)$ размерности $(n \times 1)$. Разделение на переменные управления и переменные состояния должно быть таким, чтобы по значениям управлений с помощью соотношений (10) можно было определить значения состояний объекта управления.

Необходимые условия существования стационарной точки можно получить с использованием метода множителей Лагранжа. Составим вспомогательную функцию, используя множители $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$L(x, u, \lambda) = z(x, u) + \lambda^T f(x, u). \quad (11)$$

Необходимые условия стационарности (x, u, λ) для функции Лагранжа (11) имеют вид

$$L_x = 0, \quad L_u = 0, \quad L_\lambda = f(x, u) = 0. \quad (12)$$

Отсюда находим

$$z_u - z_x f_x^{-1} f_u = 0, \quad (m \text{ уравнений}). \quad (13)$$

Уравнения (10) и (13) определяют значения x и u в стационарной точке.

Используя приращения функций

$$\begin{aligned} dL &= (L_x, L_y) \begin{pmatrix} dx \\ du \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (dx^T, du^T) \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xu} \\ L_{ux} & L_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ du \end{pmatrix}, \\ df &= (f_x, f_y) \begin{pmatrix} dx \\ du \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (dx^T, du^T) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xu} \\ f_{ux} & f_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ du \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и соотношение $dx = -f_x^{-1} f_u du$, если матрица f_x не вырождена (по предположению, это условие выполняется), получаем достаточные условия оптимальности функции Лагранжа в следующем виде:

$$(-f_x^{-1} f_u, E)^T \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xu} \\ L_{ux} & L_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_x^{-1} f_u \\ E \end{pmatrix} = L_{uu} - (f_x^{-1} f_u)^T L_{xu} - L_{ux} f_x^{-1} f_u + (f_x^{-1} f_u)^T L_{xx} f_x^{-1} f_u > 0, \quad (14)$$

где

$$L_{xx} = z_{xx} + \lambda^T f_{xx}, \quad L_{xu} = z_{xu} + \lambda^T f_{xu}, \quad L_{ux} = z_{ux} + \lambda^T f_{ux}, \quad L_{uu} = z_{uu} + \lambda^T f_{uu}, \quad \lambda^T = -z_x f_x^{-1}.$$

Таким образом, достаточные условия локального минимума состоят из необходимых условий стационарности (12) и требования положительной определенности матрицы (14). Очевидно, необходимое условие локального минимума второго порядка состоит в том, что матрица в (14) должна быть положительно полуопределенной, т.е.

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xu} \\ L_{ux} & L_{uu} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Условия (12) представляют собой систему $(2n + m)$ уравнений для определения $(2n + m)$ неизвестных величин. Заметим, что часто непосредственное применение необходимых условий оптимальности функции Лагранжа (12) оказывается проще использования необходимых условий стационарности в виде уравнений (10) и (13).

Пример 1. Найти значение скалярной переменной u , при котором функция

$$z(x, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right) \quad (15)$$

принимает стационарное значение при линейном ограничении в виде равенства

$$f(x, u) = x + mu - c = 0.$$

Здесь x – скалярный параметр; a, b, m, c – постоянные величины. Линиями уровня функции $z(x, u)$ являются эллипсы, причем с увеличением значения функции размеры эллипса возрастают.

Для решения поставленной задачи можно использовать классическую функцию Лагранжа

$$L(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right) + \lambda(x + mu - c).$$

Из условия оптимальности функции Лагранжа (12), находим решение для поставленной задачи в следующем виде:

$$\lambda = -\frac{x}{a^2}, \quad x = \frac{ca^2}{a^2 + b^2m^2}, \quad u = \frac{cmb^2}{a^2 + b^2m^2}, \quad z = \frac{c^2}{2(a^2 + b^2m^2)}.$$

Если составим функцию Лагранжа специального вида

$$L(x, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right) + (kx + q)(x + mu - c).$$

то необходимые условия стационарности записываются в виде:

$$L_x = \frac{x}{a^2} + k(x + mu - c) + (kx + q) = 0, \quad L_u = \frac{u}{b^2} + (kx + q)m = 0, \quad L_\lambda = x + mu - c = 0.$$

Отсюда находим

$$k = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 m^2}}{b^2 m^2 a}, \quad q = \frac{kc}{1 - kb^2 m^2}, \quad x = \frac{ca^2}{a^2 + b^2 m^2}, \quad u = \frac{cmb^2}{a^2 + b^2 m^2}, \quad z = \frac{c^2}{2(a^2 + b^2 m^2)}.$$

Отметим, что построение функции Лагранжа двух различных видов привело к одному и тому же единственному решению. Минимальное значение целевой функции при удовлетворении заданного ограничения достигается на эллипсе в единственной стационарной точке.

Задача оптимизации при смешанных ограничениях типа равенств и неравенств.

Будем считать, что целевая функция $z(x, u)$ и функции $f_1(x, u)$, $f_2(x, u)$ в ограничениях типа равенств и неравенств являются дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве R^{n+m} . Задачу со смешанными ограничениями (5)-(8) можно преобразовать в задачу оптимизации следующего вида:

$$\min z(x, u), \quad (16)$$

$$f(x, u) = 0, \quad (17)$$

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2, \quad \alpha_1 \leq u \leq \alpha_2, \quad (18)$$

где x – вектор состояния объекта управления размерности $(n \times 1)$; u – вектор управляющих воздействий размерности $(m \times 1)$; векторная функция $f(x, u)$ размерности $(n \times 1)$; компоненты векторов (x, u) ограничены сверху и снизу. Будем предполагать, что множество ограничений (17) и (18) непусто.

Для решения рассматриваемой задачи составим функцию Лагранжа специального вида

$$L(x, u) = z(x, u) + (Kx + q)^T f(x, u) + \lambda_1^T (u - \alpha_2) + \lambda_2^T (\alpha_1 - u) + \lambda_3^T (x - \beta_2) + \lambda_4^T (\beta_1 - x). \quad (19)$$

Далее находим значения (x, u) с использованием необходимых и достаточных условий минимума первого и второго порядка при смешанных ограничениях (порядок условий определяется порядком используемых производных) и вычисляем значения функции $z(x, u)$ в найденных точках локального экстремума.

Утверждение 1 (необходимые условия минимума первого порядка). Пусть (x, u) – точка локального минимума в задаче (16)-(18). Тогда найдется матрица K и векторы q , λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 , не равные нулю одновременно и такие, что выполняются следующие условия:

а) условие стационарности функции Лагранжа по (x, u) :

$$L_x(x, u) = 0, \quad L_u(x, u) = 0; \quad (20)$$

б) условия допустимости решения:

$$f(x, u) = 0; \quad (21)$$

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2, \quad \alpha_1 \leq u \leq \alpha_2; \quad (22)$$

в) условия неотрицательности множителей Лагранжа для условного минимума:

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0; \quad (23)$$

г) условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1^T(u - \alpha_2) = 0, \quad \lambda_2^T(\alpha_1 - u) = 0, \quad \lambda_3^T(x - \beta_2) = 0, \quad \lambda_4^T(\beta_1 - x) = 0. \quad (24)$$

Следует отметить, что условия дополняющей нежесткости вида (24) и знакоопределенность множителей Лагранжа (23) записываются только для ограничений типа неравенств (18).

Утверждение 2 (достаточные условия минимума второго порядка). Пусть имеется точка (x, u) , удовлетворяющая необходимым условиям минимума первого порядка (20)-(24) в задаче (16)-(18). Если в этой точке $d^2L(x, u) > 0$ для всех ненулевых $dx \in R^n$, $du \in R^m$ таких, что выполняется соотношение $dx = -f_x^{-1}f_u du$ (матрица f_x невырождена по предположению), получаем достаточные условия оптимальности функции Лагранжа в следующем виде:

$$L_{uu} - (f_x^{-1}f_u)^T L_{xu} - L_{ux} f_x^{-1} f_u + (f_x^{-1}f_u)^T L_{xx} f_x^{-1} f_u > 0. \quad (25)$$

Точка (x, u) является точкой локального минимума в задаче (16)-(18).

Задача квадратичного программирования при наличии двусторонних ограничений. Пусть требуется найти вектор управления u , минимизирующий значение целевой функции

$$z(x, u) = \frac{1}{2}(x - c_1)^T Q(x - c_1) + (x - c_1)^T D(u - c_2) + \frac{1}{2}(u - c_2)^T R(u - c_2), \quad (26)$$

где x связан с вектором управления u с помощью соотношений

$$f(x, u) = Ax + Bu - b = 0, \quad (n \text{ уравнений}), \quad (27)$$

$$\beta_1 \leq x \leq \beta_2, \quad \alpha_1 \leq u \leq \alpha_2, \quad (28)$$

где x – вектор состояния объекта управления размерности $n \times 1$; u – вектор управляющих воздействий размерности $m \times 1$; $Q, D, R, A, B, b, c_1, c_2, \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ – заданные матрицы и векторы соответствующих размерностей. Отметим, что Q, R – симметрические матрицы, причем $\begin{pmatrix} R & D^T \\ D & Q \end{pmatrix} \geq 0$; Q является неотрицательно определенной, R – положительно определенной. Матрица A невырождена (это условие выполняется по предположению, т.к. соотношение (27) связывает состояния x с вектором управления u).

Обозначим через Δ множество всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию (28), и соответствующих состояний $x(u)$ системы уравнений (27), удовлетворяющих условию (28), т.е. множество всех допустимых пар (x, u) :

$$\Delta = \{(x, u) \mid \beta_1 \leq x \leq \beta_2, \quad \alpha_1 \leq u \leq \alpha_2, \quad Ax + Bu - b = 0\}.$$

Будем предполагать, что множество всех допустимых пар $(x, u) \in \Delta$ непусто.

Задачи вида (26)-(28) в которых на некоторые переменные наложены двусторонние ограничения, то есть, указаны верхние и нижние границы их допустимого изменения, часто встречаются на практике. Наиболее прямолинейный способ работы с такими задачами состоит в том, чтобы преобразовать ограничения (28) в равенство с помощью дополнительных переменных. Эти равенства могут рассматриваться совместно с равенствами (26) и можно использовать метод решения оптимизационных задач с ограничениями в виде равенств (9)-(10). Однако этот прием увеличивает размер базисной матрицы и число переменных. Так как часто число переменных

намного больше числа ограничений вида (27), то это представляет собой серьезную опасность с вычислительной точки зрения.

Наиболее привлекательной альтернативой является использование специальной методики, предлагаемой для таких задач [5-7]. Это применение множителей Лагранжа специального вида, которые позволяют решать задачи с учетом ограничений (27)-(28).

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: Найти синтезирующее управление $u(x)$ такое, что соответствующая ему пара (x, u) доставляет минимальное значение целевой функции (26), где x является решением алгебраического уравнения (27) при $u = u(x)$, удовлетворяющие условиям (28).

Для решения поставленной задачи образуем вспомогательную функцию с применением множителей Лагранжа специального вида. Для этого прибавим к выражению (26) систему алгебраических уравнений (27) с множителем $\lambda_0 = Kx + q$ и дополнительно следующее выражение

$$\lambda_1^T(u - \alpha_2) + \lambda_2^T(\alpha_1 - u) + \lambda_3^T(x - \beta_2) + \lambda_4^T(\beta_1 - x),$$

где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$, $\lambda_4 \geq 0$. В результате получим следующую функцию:

$$L(x, u) = \frac{1}{2}(x - c_1)^T Q(x - c_1) + (x - c_1)^T D(u - c_2) + \frac{1}{2}(u - c_2)^T R(u - c_2) + (Kx + q)^T(Ax + Bu - b) + \lambda_1^T(u - \alpha_2) + \lambda_2^T(\alpha_1 - u) + \lambda_3^T(x - \beta_2) + \lambda_4^T(\beta_1 - x), \quad (29)$$

где q – вектор размерности $(n \times 1)$; K – симметрическая положительно определенная матрица размерности $(n \times n)$.

Множитель $\lambda_0 = Kx + q$ снимает ограничения, налагаемые на допустимые пары $(x, u) \in \Delta$ в виде системы уравнений (27), а множители λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 – соответствующие ограничения, налагаемые на управления и состояния объекта управления вида (28).

Для функции Лагранжа (29) условия стационарности по (x, u) имеют вид (20):

$$\begin{aligned} L_u &= D^T(x - c_1) + R(u - c_2) + B^T(Kx + q) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ L_x &= Q(x - c_1) + D(u - c_2) + K(Ax + Bu - b) + A^T(Kx + q) + \lambda_3 - \lambda_4 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Из второго уравнения (30) находим

$$KA + A^T K - (D + KB)R^{-1}(D + KB)^T + Q = 0, \quad (31)$$

$$Kc_1 + q = -(A_1^T)^{-1}[K(Ac_1 + Bc_2 - b) - (D + KB)R^{-1}B^T(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_3 - \lambda_4], \quad (32)$$

где $A_1 = A - BR^{-1}(D + KB)^T$. Далее из первого уравнения (30) находим

$$R_1(u - w_2) - B^T(A_1^T)^{-1}[\lambda_3 - \lambda_4 - (D + KB)R^{-1}B^T(\lambda_1 - \lambda_2)] + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad (33)$$

где $w_2 = c_2 + R_1^{-1}[(D + KB)^T A^{-1} + B^T(A_1^T)^{-1}K](Ac_1 + Bc_2 - b)$, $R_1 = R - (D + KB)^T A^{-1}B$.

Уравнение (27) с учетом (33) запишем в виде

$$A(x - w_1) + BR_1^{-1}B^T(A_1^T)^{-1}[\lambda_3 - \lambda_4 - (D + KB)R^{-1}B^T(\lambda_1 - \lambda_2)] + BR_1^{-1}(\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \quad (34)$$

где $w_1 = c_1 - A^{-1}\{BR_1^{-1}[(D + KB)^T A^{-1} + B^T(A_1^T)^{-1}K] + E\}(Ac_1 + Bc_2 - b)$.

Для определения множителей λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 , удовлетворяющих условиям дополняющей нежест-

кости

$$\lambda_1^T(u - \alpha_2) = 0, \quad \lambda_2^T(\alpha_1 - u) = 0, \quad \lambda_3^T(x - \beta_2) = 0, \quad \lambda_4^T(\beta_1 - x) = 0,$$

вычислим значения следующих выражений

$$\lambda_1^0 = -\inf\{0; \alpha_2 - w_2\}, \quad \lambda_2^0 = -\inf\{0; w_2 - \alpha_1\}, \quad \lambda_3^0 = -\inf\{0; \beta_2 - w_1\}, \quad \lambda_4^0 = -\inf\{0; w_1 - \beta_1\}. \quad (35)$$

Используя (35), находим значения u_i , ($i = \overline{1, m}$) следующим образом:

- если $\lambda_{1i}^0 = 0$, $\lambda_{2i}^0 = 0$, то принимаем $\lambda_{1i} = 0$ и $\lambda_{2i} = 0$, а значения u_i определяем из уравнения (33);

- если $\lambda_{1i}^0 > 0$, то принимаем $u_i = \alpha_{2i}$ и $\lambda_{2i} = 0$, а значения λ_{1i} определяем из уравнения (33);

- если $\lambda_{2i}^0 > 0$, то принимаем $u_i = \alpha_{1i}$ и $\lambda_{1i} = 0$, а значения λ_{2i} определяем из уравнения (33).

Используя (35), находим значения x_i , ($i = \overline{1, n}$) следующим образом:

- если $\lambda_{3i}^0 = 0$, $\lambda_{4i}^0 = 0$, то принимаем $\lambda_{3i} = 0$ и $\lambda_{4i} = 0$, а значения x_i определяем из уравнения (34);

- если $\lambda_{3i}^0 > 0$, то принимаем $x_i = \beta_{2i}$ и $\lambda_{4i} = 0$, а значения λ_{3i} определяем из уравнения (34);

- если $\lambda_{4i}^0 > 0$, то принимаем $x_i = \beta_{1i}$ и $\lambda_{3i} = 0$, а значения λ_{4i} определяем из уравнения (34).

В результате находим стационарные точки $(x, u) \in \Delta$. В каждом случае следует начинать с рассмотрения вариантов удовлетворения условий дополняющей нежесткости, а затем уравнений (33) и (34).

Для проверки достаточных условий второго порядка следует использовать выражение для второго дифференциала функции Лагранжа (25)

$$\begin{aligned} & L_{uu} - (f_x^{-1} f_u)^T L_{xu} - L_{ux} f_x^{-1} f_u + (f_x^{-1} f_u)^T L_{xx} f_x^{-1} f_u = \\ & = [R - (D + KB)^T A^{-1} B]^T R^{-1} [R - (D + KB)^T A^{-1} B] = R_1^T R^{-1} R_1 > 0. \end{aligned}$$

Необходимое условие локального минимума второго порядка состоит в том, чтобы следующая матрица была положительно полуопределенной:

$$\begin{pmatrix} R & (D + KB)^T \\ D + KB & Q + KA + A^T K \end{pmatrix} \geq 0.$$

Если выполнены достаточные условия минимума, то следует вычислить значения целевой функции в точках условного минимума.

Пример 2. Найти значение состояния и управления (x, u) , при котором функция

$$z(x, u) = \frac{3}{2}(x - 6)^2 - (x - 6)(u - 4) + \frac{1}{2}(u - 4)^2$$

принимает минимальное значение при наличии линейного ограничения типа равенства

$$f(x, u) = x + 2u - 6 = 0$$

и ограничений типа неравенств, означающих ограниченность сверху и снизу компонент (x, u) :

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 3, \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 2.$$

Линиями уровня функции $z(x, u)$ являются эллипсы, причем с увеличением значения функ-

ции размеры эллипса возрастают.

Для решения поставленной задачи используем изложенный выше метод решения задач квадратичного программирования при наличии двусторонних ограничений с использованием функции Лагранжа специального вида

$$L(x, u) = \frac{3}{2}(x-6)^2 - (x-6)(u-4) + \frac{1}{2}(u-4)^2 + (Kx+q)(x+2u-6) + \lambda_1(u-2) + \lambda_2(\frac{1}{2}-u) + \lambda_3(x-3) + \lambda_4(\frac{1}{2}-x). \quad (36)$$

Используя условия оптимальности функции Лагранжа (36), находим решение рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 27/4, \lambda_4 = 0, k = (3 + \sqrt{17})/4, q = -(10 + \sqrt{17})/4, x = 3, u = 3/2, z = 73/8.$$

Минимальное значение целевой функции при удовлетворении заданных ограничений достигается на эллипсе в единственной стационарной точке.

Заключение. В работе для решения задач оптимизации использованы множители Лагранжа специального вида. Получены необходимые и достаточные условия минимума первого и второго порядков для задач со смешанными ограничениями в виде равенств и неравенств. Метод множителей Лагранжа специального вида применен для решения задачи квадратичного программирования при наличии двусторонних ограничений. Этот подход дает возможность для определения множителей Лагранжа из необходимых условий оптимальности. Особенностью предлагаемого алгоритма решения задачи является то, что в нем рассмотрены варианты, удовлетворяющие условиям дополняющей нежесткости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (грант № 1625 / ГФЗ).

Список литературы

- [1] Мицель А.А., Шелестов А.А. Методы оптимизации. – Учебное пособие. – Ч. 1. – Томск, 2002. – 192 с.
- [2] Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления: оптимизация, оценка и управление. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
- [3] Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.
- [4] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 2002. – 520 с.
- [5] Мурзабеков З.Н. Достаточные условия оптимальности динамических систем управления с закрепленными концами // Математический журнал. – 2004. – Т. 4, № 2(12). – С. 52-59.
- [6] Мурзабеков З.Н. Конструктивный метод решения краевых задач оптимального управления для линейных нестационарных управляемых систем при наличии внешних воздействий и ограничений на управления // Доклады НАН РК, сер. физ.-матем. – 2009. – № 3. – С. 16-21.
- [7] Мурзабеков З.Н. Оптимизация управляемых систем. – Алматы: Изд-во АТУ, 2009. – 216 с.

УДК 519.216.3

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА

Г.Б. Мусипова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. The article examined the mathematical model for predicting the region as a whole. The development of agriculture in the region and the regional economy as a whole is influenced by many factors: the natural environment and natural resources, demographic factor, the current economic structure of the complex, well-developed financial and banking system and the sale of finished products. To plan the development of the region to determine the influence of these factors on the region's economy in the future. But determining the precise quantitative relationships between indicators and the factors influencing them is not possible, so make forecasts.

Keywords: mathematical model, region, forecast.

Аңдатпа. Бұл мақалада аймақтың жалпы болжамына математикалық үлгі қарастырылған. Аймағымыздағы ауыл шаруашылығының, жалпы аймақтық экономиканың дамуына көптеген факторлар әсер етеді: табиғат жағдайы және табиғат ресурстары, демографиялық фактор, шаруашылық құрылыстағы құрылған комплекс, қаржы-банктік жүйенің дамытылғаны және дайын өнімнің өзі де ықтимал етеді. Аймақтың жоспарлы түрде дамуына осы сияқты әсер етуші факторлардың аймақ экономикасының көрсеткіштерін шығару керек. Бірақ дәлірек көрсеткіштердің арасындағы байланыстар және оған әсер етуші факторларды айқындауға мүмкіндік болмағандықтан, болжамдар жасалады.

Кілттік сөздер: математикалық үлгі, аймақ, болжам.

Аннотация. В статье рассмотрена математическая модель для прогнозирования региона в целом. На развитие сельского хозяйства в регионе и региональной экономики в целом оказывают влияние множество факторов: природные условия и природные ресурсы, демографический фактор, сложившаяся структура хозяйственного комплекса, развитость финансово-банковской системы и сбыт готовой продукции. Для составления плана развития региона необходимо выявить влияние таких факторов на показатели экономики региона в будущем. Но определить точные количественные зависимости между показателями и влияющими на них факторами не представляется возможным, поэтому составляют прогнозы.

Ключевые слова: математическая модель, регион, прогноз.

Научно обоснованные прогнозы дают возможность региональным органам управления формулировать сценарии развития отраслей, технического прогресса, размещения производительных сил, народонаселения, рабочей силы, расширения сырьевой базы, совершенствования инфраструктуры.

В разработке прогнозов используют данные за прошедшие периоды и некоторые гипотезы на будущее.

Пусть в простейшем случае значение y_t показателя y в t -м году (например, объемы промышленного или сельскохозяйственного производства) зависит только от значений этого показателя в предыдущие годы. Тогда можно записать зависимость

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_k y_{t-k} \quad (1)$$

где, y_t -теоретическое значение показателя y в t -м году; $y_{t-1}, \dots, y_{t-k}$ -фактические значения показателя y за предыдущие годы $t-1, t-2, \dots, t-k$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ -неизвестные коэффициенты, определяемые по методу наименьших квадратов на основании данных за прошлые годы. Для определения коэффициентов составляют сумму квадратов отклонений за m лет $m > 2k$

$$L = \sum_{t=k+1}^m (\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_k y_{t-k} - y_t)^2 \quad (2)$$

в систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 2 \sum_{t=k+1}^m (\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_k y_{t-k} - y_t) y_{t-i} (i = \overline{1, k}) \quad (3)$$

которая после элементарных преобразований превращается в систему нормальных уравнений

$$\alpha_1 = \sum_{t=k+1}^m y_{t-1} y_{t-i} + \alpha_2 \sum_{t=k+1}^m y_{t-2} y_{t-i} + \dots + \alpha_k \sum_{t=k+1}^m y_{t-k} y_{t-i} = \sum_{t=k+1}^m y_t y_{t-i} (i = \overline{1, k}) \quad (4)$$

решаемую относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ известными методами.

Если значения показателя y_t в t -м году зависят от значения показателя y_{t-1} в предыдущем году и факторов $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}$ в t -м году, то эту зависимость можно записать в виде

$$y_t = y_{t-1} + f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \quad (5)$$

где функцию f считают известной, а параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ вычисляют по методу наименьших квадратов.

Определим далее значение $y_{t-1} = y_{t-2} + f(x_{1t-1}, x_{2t-2}, \dots, x_{nt-n}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ или

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) = \\ &= y(t-1) + f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = y(t-2) + f(x_{1t-1}, x_{2t-2}, \dots, x_{nt-n}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \\ &\quad + f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \\ &= y(t-2) + \sum_{j=t-1}^t f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \end{aligned}$$

Поступая аналогично r раз, получим рекуррентное соотношение

$$y_r(t) = y(t) = y(t-r-1) + \sum_{j=t-1}^t f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \quad (6)$$

При $r = t-1$ из последней формулы следует:

$$y(t) = y(0) + \sum_{j=t-1}^t f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \quad (7)$$

где $y(0)$ - начальное значение при $t = 0$.

Формулы (1)-(3) целесообразно использовать, когда наиболее важным является предплановое значение показателя y_{t-1} .

В целях повышения региональной и экономического развития регионов, приоритеты будут связаны с формированием и развитием инфраструктуры для региональных проектов индустриализации, агропромышленного комплекса (в том числе по созданию продовольственного кольца

вокруг городов и агломераций путем реализации конкретных проектов в сфере животноводства и растениеводства, в том числе овощеводства, с использованием современных технологий, направленных на рост производства сельскохозяйственной продукции, организацию ее заготовки и хранения, в том числе через социально-предпринимательские корпорации в регионах) в сфере туризма и стимулированием инновационной деятельности и предпринимательства в регионах.

Учитывая, что агропромышленный комплекс является одним из основных звеньев экономики области, который обеспечивает продовольственную безопасность региона, его развитию уделяется повышенное внимание со стороны исполнительных органов всех уровней. Для его развития проводится постоянная работа по привлечению финансовых средств, которые из года в год увеличиваются.

Для улучшения финансирования аграрного сектора и доступности сельхозформирований и сельского населения к кредитным ресурсам в области открыто 2 филиала и 2 представительства АО «НУХ «КазАгро», 17 сельских кредитных товариществ и 5 микрокредитных организаций.

Анализ современного состояния отраслей сельского хозяйства показывает, что ведущий его отраслью было и остается животноводство с его многоотраслевым характером, на долю которого в общем объеме валовой продукции сельского хозяйства приходится до 65%. При этом в отрасли отмечается динамичное наращивание производства продукции, которому способствовала работа по увеличению численности поголовья крупного скота, целенаправленная работа по созданию молочно-товарных ферм и откормочных площадок, убойных пунктов, племенных хозяйств, укреплению кормовой базы и государственной поддержки отрасли. На сегодня в области создано и функционирует 52 молочно-товарных фермы, 245 откормочных площадок, 320 убойных пунктов, 179 племенных хозяйств и 182 пункта искусственного осеменения. Учитывая важность животноводства и имеющийся здесь потенциал, намечены и принимаются следующие меры по его дальнейшему развитию:

- В молочном скотоводстве в течение 2011–2015 годов предусмотрено создать 23 новых и реконструированных молочно-товарных ферм;
- Дальнейшее улучшение селекционно-племенной работы;
- Укрепление кормовой базы.

Для увеличения производства мяса основной упор будет сделан на реализацию проекта «Развития экспортного потенциала мяса КРС», в реализации которого будут задействованы все сельхозформирования, крестьянские хозяйства, занимающиеся скотоводством, а также домашние хозяйства населения.

Дальнейшее развитие получит овцеводство области, которое сосредоточено в регионах сухостепной и полупустынной зон.

Для его развития предусмотрено:

- Укрепление кормовой базы путем вовлечения дополнительных площадей пастбищных угодий за счет их обводнения и увеличение удельного веса кормовых культур в структуре посевов;
- Для обводнения пастбищ поданы заявки на строительство и реконструкцию 330 скважин на сумму 773,6 тыс. тенге по программе «Акбулак»;

- Повышение рентабельности овцеводства за счет организации закупки шерсти сельскими потребительскими кооперативами и сервисно-заготовительными центрами, которых в области создано 30 единиц.

Дальнейшее развитие получит птицеводство и в первую очередь мясное. На сегодня в области производством мяса птицы занимаются 2 крупнейшие птицефабрики не только в области, но и в республике, которые производят 26,3 тыс. тонн птицы, что составляет 12,6% от всего объема производства всех видов мяса.

В области в последние три года начата и ведется целенаправленная работа по возрождению пчеловодства, как отрасли. Увеличивается число крупных пчело- хозяйств, количество пчелосемей, создаются племенные хозяйства, ведение пчеловодства переводится на промышленную основу, совершенствуются технологии содержания пчел и переработки продукции пчеловодства, совершенствуется научное обеспечение отрасли, ведется ее субсидирование за счет средств областного бюджета.

Анализ развития растениеводства показывает, что характерной особенностью данной отрасли является то, что в целом по области оно ведется в условиях жесткого богарного земледелия и результаты его работы в значительной степени находятся в зависимости от складывающихся погодных условий того или иного года. Поэтому вся организаторская и практическая работа исполнительных органов и сельхозтоваропроизводителей направлена на снижение отрицательной зависимости растениеводства от погодных условий.

Для достижения поставленной задачи в области предусмотрены и принимаются следующие меры:

1. Расширение площадей орошаемых земель и внедрение прогрессивных ирригационных технологий;
2. Развитие семеноводства и его субсидирование;
3. Обновление машинно-тракторного парка сельхозформирований и на этой основе внедрение влагоресурсосберегающих технологий возделывания сельскохозяйственных культур;
4. повышение плодородия пашни;
5. расширение посевных площадей сельскохозяйственных культур, за счет вовлечения в оборот пахотно-пригодных земель.

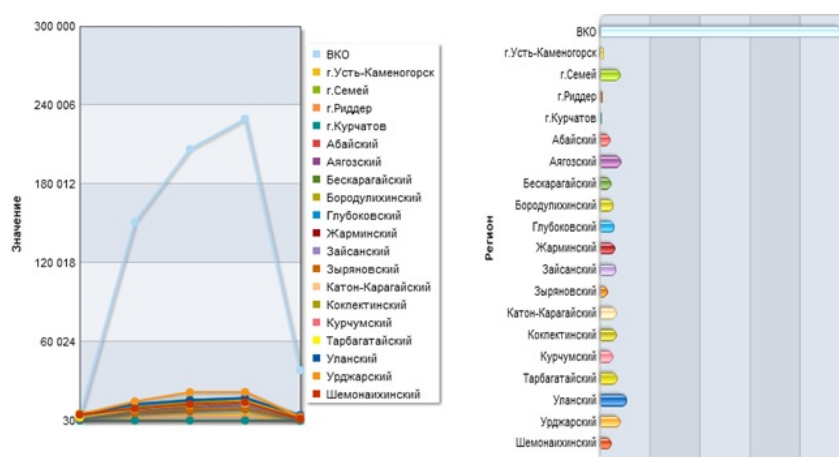


Рисунок 1 Динамика сельскохозяйственного объема на 2015-2018 гг.

Таблица 1 Прогноз объема валовой продукции сельского хозяйства по региону, млн.т

2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010	2009	
151133,6	3701	206549,10	151133,6	3701	38490,5	229634,7	206549,9	151133,5	3700	ВКО
3538,2	1034,5	5031,9	3538,2	1034,5	381,2	5253,6	5031,8	3538,1	1034,4	г.Усть-Каменогорск
12053,7	3417,4	16199,8	12053,7	3417,4	3113,1	16895,5	16199,7	12053,6	3417,3	г.Семей
1315,9	471,10	2117,4	1315,9	471,10	195,9	2319,5	2117,3	1315,8	471,9	г.Риддер
178,2	50,7	248,7	178,2	50,7	33,6	269,8	248,6	178,1	50,6	г.Курчатов
5411,9	1707,10	7067,3	5411,9	1707,10	1464,6	8698,8	7067,2	5411,8	1707,9	Абайский
8208,10	2535,5	11201,5	8208,10	2535,5	3243,6	12642,7	11201,4	8208,9	2535,4	Аягоский
5739,8	2267,10	7929,6	5739,8	2267,10	1641,6	8675,9	7929,5	5739,7	2267,9	Бескарагайский
9276,8	5672,10	13396,3	9276,8	5672,10	2033	15667,9	13396,2	9276,7	5672,9	Бородулихинский
11226,4	4837,4	15818,7	11226,4	4837,4	2149,8	17167,4	15818,6	11226,3	4837,3	Глубоковский
7672,9	3088,4	9908,8	7672,9	3088,4	2234,5	10934,9	9908,7	7672,8	3088,3	Жарминский
6717,9	2377,2	9157,9	6717,9	2377,2	2451,1	10737,2	9157,8	6717,8	2377,1	Зайсанский
6332,7	2989,9	9821,6	6332,7	2989,9	1056,4	9462,7	9821,5	6332,6	2989,8	Зыряновский
8793,9	3974,9	12320,9	8793,9	3974,9	2521,9	13157,1	12320,8	8793,8	3974,8	Катон-Карагайский
9970,6	4829,7	13996,3	9970,6	4829,7	2503,6	15807,5	13996,2	9970,5	4829,6	Компектинский
9100,6	2949,3	11982,8	9100,6	2949,3	1891,9	14100	11982,7	9100,5	2949,2	Курчумский
9076,7	2665,3	11971,5	9076,7	2665,3	2639,9	14657,1	11971,4	9076,6	2665,2	Тарбагатайский
12714,8	4650,7	15494,5	12714,8	4650,7	4177	17413	15494,4	12714,7	4650,6	Уланский
14632,5	4852,5	21567,8	14632,5	4852,5	3055,9	21729,8	21567,7	14632,4	4852,4	Урджарский
9173,6	4645,4	12318,5	9173,6	4645,4	1697,9	14054,3	12318,4	9173,5	4645,3	Шемонахинский

Регион может быть конкурентоспособным только тогда, когда он создает действующим или новым предприятиям такие условия, которые способствуют реализации и повышению их рыночной конкурентоспособности. Причем регион должен быть привлекательным не только для предприятий, но и для населения, являющегося одним из важнейших ресурсов. Одной из ключевых задач местных исполнительных органов, влияющих на деловой и инвестиционный климат в регионе, является прогноз. Выявляя системные проблемы и факторы социально-экономического развития региона и выработка эффективного механизма действий местных исполнительных органов для их устранения с помощью методов математического прогнозирования.

Для улучшения ситуации, для развития региона сложившейся в Восточно-Казахстанской области, целесообразно использовать методами прогнозирования. Практическая значимость полученных результатов предложенная математическая модель служит основой для создания инструментальных средств управления данными, создание автоматическое рабочее место руководителя. Данная разработка выполняется анализируя в Управлениях региона Восточно Казахстанской Области.

Список литературы

- [1] Моделирование социальных процессов: учебник. В.Я. Райцин. 2005, М: Экзамен
- [2] Динамическое моделирование экономики региона. Сиразетдинов Т.К., Родионов В.В., Сиразетдинов Р.Т. Казань: Изд-во «Фэн» Академии наук РТ, 2005 г.

- [3] Моделирование и управление процессами регионального развития. Под ред. С.Н. Васильева.. М.: Физматлит, 2001. – 432 с.

УДК 336 11 (574)

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЕСУРСОВ ХОЗЯЙСТВУЮЩИХ СУБЪЕКТОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ ИХ ФИНАНСОВУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ

В.Ю. Нетесова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. The article presents problem statement of the modeling composition and structure of finance resources of an economic agent, providing the increase of finance stability of economic system. The correlation is determined between criteria of evaluation of finance stability (both absolute and relative) with the structure of finance resources – the correlation of own and borrowed capital and their compounds. The evaluation of borrowed capital influence on the financial result of an economic agent is completed and the expediency of alternative finance sources use with the formation of short term liabilities..

Keywords: model, finance stability, finance resources, structure, composition, evaluation, alternative sources of financing.

Аңдатпа. Мақалада экономика жүйесінің қаржылық тұрақтылығын жоғарлатудың қамтамасыз етуде шаруашылық жүргізуші субъектінің қаржы ресурстардың құрамын және құрылысын модельдеудің мақсаттарын қою көрсетілген. Қаржы тұрақтылығының (абсолютті және салыстырмалы) бағалау белгілерінің қаржы ресурстарының құрылымымен байланыстары - меншікті және қарыз капиталдардың байланысымен және олардың құрайтын бірліктері анықталды. Шаруашылық субъектіге қарыз капиталға ықпалының бағалауы көрсетіліп, қысқа мерзімді құрамын қалыптастырудағы альтернативті қаржылау көздерінің орынды пайдалануы дәлелденген.

Кілттік сөздер: модель, қаржылық тұрақтылық, қаржы ресурстары, құрылым, құрам, бағалау, баламалы қаржыландыру көздері.

Аннотация. В статье представлена постановка задачи моделирования состава и структуры финансовых ресурсов хозяйствующего субъекта, обеспечивающих повышение финансовой устойчивости экономических систем. Установлена взаимосвязь критериев оценки финансовой устойчивости (как абсолютных, так и относительных) с структурой финансовых ресурсов - соотношением собственного и заемного капиталов и их составляющих. Выполнена оценка влияния заемного капитала на финансовый результат хозяйствующего субъекта и обоснована целесообразность использования альтернативных источников финансирования при формировании состава краткосрочных обязательств.

Ключевые слова: модель, финансовая устойчивость, финансовые ресурсы, структура, состав, оценка, альтернативные источники финансирования.

Потребность в финансовых ресурсах хозяйствующих субъектов обусловлена ростом объема продаж, расширением и модернизацией производства, дополнительной потребностью в основных

и оборотных средствах, повышением деловой активности и другими внешними и внутренними факторами.

Формирование финансовых ресурсов может происходить за счет собственного и заемного капитала. При этом увеличение собственного капитала ограничивается размером прироста нераспределенной прибыли, то есть зависит от результата деятельности хозяйствующего субъекта, либо осуществляется за счет привлечением дополнительных вкладов учредителей или привлечением новых инвесторов.

Эффективная финансовая и инвестиционная деятельность хозяйствующего субъекта невозможна без постоянного привлечения заемных средств. Использование заемного капитала позволяет не только существенно расширить объем хозяйственной деятельности и достичь более эффективного использования собственного капитала, но и ускорить реализацию крупных инвестиционных проектов, обеспечить постоянное совершенствование и обновление действующих основных средств, и, в конечном счете, повысить рыночную стоимость.

Разработка модели управления и обоснования структуры, состава заемного и собственного капиталов, посредством оценки их влияния на финансовый результат предприятия и финансовую устойчивость, включает следующие блоки:

- выбор критериев оценки влияния источников инвестиций в основной и оборотный капитал на финансовый результат и финансовую устойчивость;
- определение потребности в краткосрочных и долгосрочных обязательствах хозяйствующего субъекта, а также потребности в увеличении собственного капитала; на основании заданных критериев финансовой устойчивости;
- формирование состава и структуры заемного капитала, обеспечивающей заданную финансовую устойчивость;
- оценка предлагаемых моделей по критерию чистой прибыли.

Основными инструментами финансового менеджера оценки используемых финансовых ресурсов, является уровень издержек, влияющих на финансовый результат (чистую прибыль) и реальная стоимость использования заемного капитала.

Оценка финансовой устойчивости хозяйствующего субъекта осуществляется через систему финансовых коэффициентов ликвидности и финансового рычага.

Задачей исследования при формировании модели стало установление зависимости структуры финансовых ресурсов (соотношение собственного и заемного капиталов) и состава заемного капитала (краткосрочные и долгосрочные обязательства) на показатели финансовой устойчивости.

По поводу степени привлечения заемных средств в зарубежной практике существуют различные, порой противоположные мнения. Наиболее распространенным является мнение, что доля собственного капитала в общей сумме долгосрочных источников финансирования должна быть достаточно велика. Указывают нижний предел этого показателя — 0,6 (или 60%); он был неоднократно подтвержден и эмпирически.

В предприятие с высокой долей собственного капитала кредиторы выкладывают свои средства более охотно, поскольку такое предприятие характеризуется существенной финансовой независимостью и, следовательно, с большей вероятностью может погасить долги за счет собственных средств. Следует отметить, что финансово независимых (от внешних инвесторов и кредиторов) компаний в полном смысле этого слова практически не существует, кроме того, трактовка степени финансовой независимости с позиции той или структуры источников может существенно варьировать в различных странах. [1, с. 237 - 239].

Оценка изменений, которые произошли в структуре капитала, может быть разной: с позиций инвесторов и с позиции хозяйствующих субъектов. Для банков и прочих кредиторов более надежна ситуация, если доля собственного капитала у клиентов высокая. Это исключает финансовый риск. Предприятия же, как правило, заинтересованы в привлечении заемных средств по трем причинам:

- 1) проценты по обслуживанию заемного капитала рассматриваются как расходы и уменьшают налогооблагаемую прибыль;
- 2) расходы на выплату процентов обычно ниже прибыли, полученной от использования заемных средств в обороте предприятия, в результате чего повышается рентабельность собственного капитала;
- 3) в рыночной экономике большая и все увеличивающаяся доля собственного капитала вовсе не означает улучшения положения предприятия, возможности быстрого реагирования на изменение делового климата. Напротив использование заемных средств свидетельствует о гибкости предприятия, его способности находить кредиты и возвращать их, то есть о доверии к нему в деловом мире.

Финансовая устойчивость характеризуется состоянием финансовых ресурсов, их распределением и использованием, обеспечивающим развитие организации на основе роста прибыли и капитала, при сохранении платежеспособности и кредитоспособности в условиях допустимого уровня риска.

Одним из факторов, влияющих на финансовую устойчивость предприятия, является состав и структура финансовых ресурсов. Следовательно, целью моделирования является определение оптимальной структуры финансовых ресурсов предприятия, обеспечивающих при прочих равных условиях максимизацию прибыли.

Единого общепризнанного подхода к решению задачи количественной оценки финансовой устойчивости и построению соответствующих алгоритмов оценки нет. В зависимости от методов решения этой задачи сложилось два основных подхода [1, с. 233 — 234]:

- 1) оценка финансовой устойчивости, основанная на данных об источниках финансирования. В этом случае оценка финансовой устойчивости предприятия производится только на основании данных пассива баланса;
- 2) оценка финансовой устойчивости предприятия, основанная на анализе взаимосвязи актива и пассива баланса, то есть анализируются направления использования средств.

Безусловно, коэффициенты, рассчитанные по данным пассива баланса, являются основными в этом блоке анализа. Однако характеристика финансовой устойчивости с помощью таких показателей вряд ли будет полной — важно только то, откуда привлечены средства, но и куда они вложены, какова структура вложений.

Второй подход является более полным и с экономической точки зрения оправданным. Поэтому оценку финансовой устойчивости предприятия целесообразно проводить с использованием как коэффициентов, рассчитанных по пассиву баланса, так и коэффициентов, отражающих взаимосвязь между источниками формирования средств предприятия и структурой вложений.

Главной целью моделирования является определение структуры финансовых ресурсов, обеспечивающих заданный уровень финансовой устойчивости предприятия и оценка резервов обеспечивающих его долгосрочную платежеспособность.

Поэтому предметом исследования стала система финансовых коэффициентов, оценивающая состояние экономических и финансовых ресурсов предприятия и их потоков, эффективность

процессов ведения операционной, инвестиционной и финансовой деятельности.

Основными задачами оценки финансовой устойчивости являются:

- всесторонняя оценка формирования и использования финансовых ресурсов предприятия;
- оценка уровня обеспеченности предприятия финансовыми ресурсами;
- оценка уровня обеспеченности предприятия собственными средствами;
- обобщение анализируемой информации для формулирования выводов о платежеспособности предприятия;
- прогнозирование потребности в финансовых ресурсах на основе разработки моделей финансовой устойчивости при разнообразных вариантах развития экономической ситуации [2, с. 309 — 310].

Критерием оценки финансовой устойчивости предприятия является система коэффициентов, к которым относятся показатели ликвидности, финансовой устойчивости и финансового рычага.

Одним из основных индикаторов, характеризующих финансовую устойчивость, является платежеспособность. Платежеспособность в международной практике означает достаточность ликвидных активов для погашения в любой момент всех своих краткосрочных обязательств перед кредиторами [3]. Платежеспособность предприятия определяется наличием в его распоряжении ликвидных активов — тех активов, которые в максимально короткие сроки могут «превратиться» в деньги, т. е. быть реализованными, или сами по себе являться средством платежа.

Основными признаками платежеспособности является наличие в достаточном объеме средств на текущем счете и отсутствие просроченной кредиторской задолженности. Отсюда главный признак устойчивости — это наличие чистых ликвидных активов, определяемых как разность между всеми ликвидными активами и всеми краткосрочными обязательствами на определенный момент времени.

В процессе анализа исследуется текущая и перспективная платежеспособность. В процессе анализа текущей платежеспособности сопоставляется наличие суммы платежных средств с суммой срочных обязательств. К платежным средствам относятся денежные средства (на расчетном счете, в кассе), краткосрочные ценные бумаги, которые могут быть быстро обращены в деньги.

К срочным обязательствам относятся текущие пассивы — обязательства и долги, подлежащие погашению: краткосрочные кредиты банка, кредиторская задолженность за товары (работы, услуги), а также задолженность бюджету.

Если у предприятия сумма платежных средств (денежных средств и др.) превышает сумму краткосрочных обязательств, то оно признается платежеспособным. Если у предприятия сумма платежных средств недостаточна для погашения срочных обязательств, т. е. сумма платежных средств меньше суммы срочных обязательств, предприятие является неплатежеспособным. О неплатежеспособности предприятия может сигнализировать отсутствие денег на расчетном, текущем и иных счетах в банке, в кассе предприятия, наличие просроченной задолженности банку, финансовым органам, поставщикам, просрочка с выплатой заработной платы работникам.

Для оценки ликвидности используется система показателей

- собственный оборотный капитал;
- промежуточный коэффициент покрытия;
- коэффициент ликвидности (покрытия);
- коэффициент абсолютной ликвидности (срочности);
- коэффициент обеспеченности собственными оборотными средствами.

Таблица 1 Основные показатели ликвидности

Показатели	Назначение	Расчетная формула	Нормативное значение
Коэффициент текущей ликвидности	Показывает, в какой степени текущие активы покрывают текущие обязательства	Краткосрочные активы / краткосрочные обязательства	>2
Коэффициент быстрой (промежуточной) ликвидности	Показывает, какая часть текущих обязательств может быть погашена за счет денежных средств и ожидаемых поступлений	Денежные средства и их эквиваленты + Дебиторская задолженность) / Текущие обязательства	>1
Коэффициент абсолютной ликвидности	Показывает, какая часть текущих обязательств может быть погашена на дату составления баланса (или другую отчетную дату)	Денежные средства и их эквиваленты / Текущие обязательства	$>0,2$
Коэффициент обеспеченности собственными оборотными средствами	Характеризует наличие собственных оборотных средств организаций, необходимых, по крайней мере, для приобретения запасов	(Собственный капитал - Необоротные активы) / Текущие обязательства	$> 0,1$

Характеристика и целевое использование и формулы расчета выше перечисленных показателей приведены в таблице 1

Собственный оборотный капитал является абсолютным показателем ликвидности и платежеспособности.

Соотношение между собственным и заемным капиталом определяет финансовую устойчивость через следующие коэффициенты (таблица 2).

Рассмотренные в таблице 2 коэффициенты являются показателями характеризующие определенную степень риска, присущую структуре капитала предприятия. Чем выше доля заемных средств, тем больше постоянные издержки на выплату процентов и основной суммы долга, тем выше вероятность неплатежеспособности во время длительных периодов снижения прибыли и прочих неблагоприятных обстоятельств.

Очевидная ценность этих показателей заключается в том, что они служат инструментом выбора управленческого решения при формировании финансовых ресурсов предприятия.

Уровень финансовой зависимости определяется соотношением различных статей и разделов актива и пассива баланса предприятия, а конкретно анализ структуры пассива баланса позволяет установить причины финансовой неустойчивости предприятия, приведшие к его неплатежеспособности. Это может быть как нерациональное использование собственных средств предприятия, так и высокая доля заемных средств, привлекаемых для финансирования хозяйственной деятельности.

Модель формирования финансовых ресурсов предприятия с одной стороны должна обеспе-

Таблица 2 Коэффициенты финансового рычага

Коэффициент концентрации собственного капитала (автономии Кск). Определяет долю средств, инвестированных в деятельность предприятия его владельцами. Чем выше значение этого коэффициента, тем более финансово устойчиво, стабильно и независимо от внешних кредиторов предприятие	$K_{ск} = СК / ВБ$
Коэффициент финансовой зависимости (Кфз). Показывает насколько активы предприятия финансируются за счет заемных средств. Слишком большая доля заемных средств снижает платежеспособность предприятия, подрывает его финансовую устойчивость	$K_{фз} = ВБ / СК$
Коэффициент маневренности собственного капитала (Кмск). Характеризует какая доля источников собственных средств находится в мобильной форме	$K_{мск} = СОС / СК$
Коэффициент концентрации заемного капитала. (Ккзк) Показывает долю, которую составляют долгосрочные обязательства в объёме внеоборотных активов предприятия. Низкое значение - свидетельствовать о невозможности привлечения долгосрочных кредитов и займов, а высокое- либо о возможности предоставления надежных залогов, либо о сильной зависимости от сторонних инвесторов	$K_{кзк} = ЗК / ВБ$

чить финансовую устойчивость предприятия, а с другой стороны минимизацию издержек, обусловленных использованием заемных кредитных ресурсов.

В случае невысокой рентабельности производства и недостаточной финансовой устойчивости, которая может быть характерна для хозяйствующего субъекта, прирост собственного капитала маловероятен. В этом случае увеличение финансовых ресурсов может происходить за счет заемного капитала, увеличение которого, также состав и структура, в свою очередь, оказывают влияние на финансовую устойчивость.

Модель формирования финансовых ресурсов должна обеспечить требуемую финансовую устойчивость и, следовательно, оптимальное соотношение между собственным и заемным капиталом, либо изменение состава заемных обязательств, обеспечивающих снижение издержек, связанных с использованием заемного капитала. В предлагаемой модели формирования финансовых ресурсов, обеспечивающей финансовую устойчивость предприятия, используется общепринятая система показателей финансовой устойчивости, в частности, использованы коэффициент концентрации заемных средств (норматив 0,5) и коэффициент текущей ликвидности (норматив 1-2). Зная прогноз увеличения краткосрочных активов и норматив коэффициента ликвидности, определяется потребность в увеличении краткосрочных обязательств, как произведение размера инвестиции в краткосрочные активы на значение норматива коэффициента ликвидности.

Коэффициент концентрации заемных средств (структуры заемного капитала) показывает удельный вес заемного капитала предприятия в общей стоимости средств, инвестированных в его деятельность.

Используя равенство валюты актива и валюты пассива баланса можно определить потребность в увеличении заемного капитала, необходимого для обеспечения прироста инвестиции в активы предприятия. Размер прогнозируемой потребности в заемном капитале определится как произведение валюты актива с учетом изменений на нормативное значение коэффициента концентрации заемных средств.

Использование заемного капитала для удовлетворения потребности в финансировании инве-

стиции оказывает влияние на финансовый результат предприятия. Размер увеличения издержек, связанных с привлечением заемного капитала, учитываются как расходы на финансирование, в виде расчета издержек по процентам (формула 1).

$$I_{pr} = S \prod k/m \quad (1)$$

где I_{pr} – издержки по процентам;

S – сумма заемного капитала;

k – стоимость заемного капитала;

m – кратность получения кредитных ресурсов в течении года.

Размер издержек отражается в отчете о прибылях и убытках в разделе расходы периода. Управление затратами данной группы возможно в двух случаях:

- использование кредитных ресурсов с меньшей стоимостью, таких как, выпуск коммерческий бумаг и облигаций, факторинг дебиторской задолженности;
- использование краткосрочных обязательств, не влияющих на расходы периода, например, кредиторской задолженности, возникающей в результате отсрочки платежа за приобретенные товары, работы и услуги.

Внешние и внутренние факторы влияют на формирование активов предприятия. Как и в любой модели для расчета прогноза потребности в увеличении средств предприятия можно ввести некоторые допущения и ограничения, в частности, в предлагаемой модели приняты следующие:

- в базовом периоде предприятие полностью использовало краткосрочные и долгосрочные активы;
- при формировании кредиторской задолженности целесообразно определить условия формирования кредиторской задолженности, а именно использовать отсрочку с предоставлением скидки или принять решение отказа от скидки;
- базовая кредиторская задолженность формируется при условии срока отсрочки платежа в среднем 30 дней;
- и другие ограничения.

Алгоритм определения потребности финансовых ресурсов с учетом роста объема продаж включает в себя следующие основные блоки:

- составление баланса с учетом изменения активов, обусловленного внутренними и внешними факторами;
- определение дополнительной потребности в заемном и собственном капитале осуществляется в следующей последовательности;
- расчет издержек производства связанных с увеличением актива баланса и с использованием заемного капитала;
- корректировка пассива баланса с учетом полученной нераспределенной прибыли по данным отчета о прибылях и убытках.

Рассмотрим подробнее содержание каждого блока, данного алгоритма определения потребности финансовых ресурсов, их состава и структуры обеспечивающих заданную финансовую устойчивость.

Составление баланса с учетом изменения активов, обусловленных ростом объемов продаж или потребностью финансирования долгосрочных финансовых инвестиции. При этом в модели могут быть приняты различные допущения и ограничения. С учетом принятых ограничений при увеличении объемов производства возможно увеличение активов баланса, либо в этой же

пропорции, что рост объемов, либо изменение активов с учетом имеющихся излишков запасов по видам краткосрочных и долгосрочных средств.

Определение дополнительной потребности в заемном и собственном капитале осуществляется в следующей последовательности:

- рассчитывается дополнительная потребность в заемном капитале с учетом значение коэффициента концентрации заемных средств;
- определяется дополнительная потребность в долгосрочных обязательствах. Для определения дополнительной потребности в долгосрочных обязательствах рассчитывается разница между общей потребностью в увеличении заемного капитала и дополнительной потребностью в увеличении краткосрочных обязательств;
- определяется количественная оценка влияния краткосрочных и долгосрочных обязательств по видам обязательств на финансовый результат;
- определяется дополнительная потребность в увеличении собственного капитала за счет прироста чистой прибыли, зависящей от роста объемов производства (продаж).

Обоснование покрытия потребности в краткосрочных обязательствах начинается с расчета изменения кредиторской задолженности.

Кредиторская задолженность, как и средства предприятия, изменяется прямо пропорционально росту объема производства и, следовательно, в плановом периоде будет зависеть:

- от роста объема покупок у поставщиков;
- условий отсрочки платежа, предоставляемого поставщиком, то есть условий оплаты за приобретенное сырье.

Дополнительная потребность в краткосрочных финансовых ресурсах через банковский кредит определяется как разница между общей потребностью в краткосрочных обязательствах и кредиторской задолженностью;

- определение плановой нераспределенной прибыли, в составе общей потребности в финансовых ресурсах, осуществляется на основе отчета о прибылях и убытках, отражающих работу предприятия в новых условиях.

Расчет издержек производства связанных с увеличением актива баланса и с использованием заемного капитала. Изменение активов предприятия, связанные с ростом объема продаж, вызывают издержки, связанные с инвестированием в оборотные средства. В частности, в работе рассчитываются дополнительные расходы, связанные с увеличением дебиторской задолженности, которые учитываются в строке «Расходы по реализации» отчета о прибылях и убытках.

Корректировка пассива баланса с учетом полученной нераспределенной прибыли по данным отчета о прибылях и убытках.

Сравнивается прирост собственного капитала (СК) со значением нераспределенной прибыли (I_{pr}) по данным отчета о прибылях и убытках.

Если $I_{pr} > СК$, то разница используется для уменьшения суммы заемного капитала, при этом в окончательном варианте валюта баланса остается неизменной;

Если $I_{pr} < СК$, то разница используется для увеличения суммы заемного капитала.

Модель формирования финансовых ресурсов, ориентированная на изменение состава заемных обязательств и обеспечивающая снижение расходов по выплате вознаграждения кредитору, базируется, прежде всего, на использовании альтернативных источников финансирования инвестиций в основной и оборотный капитал. В модели могут быть использованы следующие альтернативные источники: факторинг дебиторской задолженности; коммерческий кредит; эмиссия ценных

бумаг(коммерческие бумаги и облигации); система овердрафта; финансовой лизинг и другие источники, снижающие, как показала практика уровень издержек от их использования.

Список литературы

- [1] Ковалев В. В. Введение в финансовый менеджмент. — М.: Финансы и статистика, 2010. — 768с.
- [2] Костырко Л. А. Стратегия финансово-экономической деятельности хозяйствующего субъекта: методология и организация: Монография. — Луганск: Изд-во ВНУ им. В. Даля, 2008. - 560 с.
- [3] Новашина Т.С., Карпунин В.И., Волнин В.А. Финансовый менеджмент: — М.: Московская финансово-промышленная академия, 2010 — 255 с.

УДК 302.256

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ

Н.А. Нурбаева, Е.Ю. Ван, А.А. Касперская, М.К. Карибаева

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

Abstract. Mathematical modelling of the surface tension dependence of the concentration is necessary to obtain a linear dependence, we could find approximate value of the surface tension for any number of substances, without conducting experimental calculations.

Keywords: modelling, tension number, of substances

Аңдатпа. Беттік керілудің концентрацияға тәуелділігінің математикалық моделі сызықтық тәуелділік ала отыра, заттың түрлі мөлшерінде тәжірибелік есептеулер жүргізбестен беттік керілуге жақын мән қабылдай алу үшін қажет.

Кілттік сөздер: модельдеу, беттік керілу, зат мөлшері.

Аннотация. Математическое моделирование зависимости поверхностного натяжения от концентрации необходимо для того, что бы получив линейную зависимость, мы могли найти приближенное значение поверхностного натяжения для любого количества вещества, не проводя опытных расчетов.

Ключевые слова: моделирование, натяжение, количество вещества.

Для определения существующей линейной зависимости между полученными расчетными значениями поверхностного натяжения и результатами измерений количества вещества рассчитаем коэффициент корреляции по формуле (1)

$$r = \frac{\sum (C_i - \bar{C})(\delta_i - \bar{\delta})}{\sqrt{\sum (C_i - \bar{C})^2} \sqrt{\sum (\delta_i - \bar{\delta})^2}} \quad (1)$$

где $\bar{C}$, $\bar{\delta}$ - это средние значения соответствующих расчетных величин.

Для расчета коэффициента корреляции вычислим средние значения измерений количества вещества $C = 41.0833$ и значений электропроводности 6531333 и составим таблицу 1

Таблица 1 Данные для расчета коэффициента корреляции

$\bar{C} = 41,0833$ $\bar{\delta} = 65,31333$

Количество вещества C_i , г/л	σ	$(C_i - \bar{C})$	$(\delta_i - \bar{\delta})$	$(C_i - \bar{C})(\delta_i - \bar{\delta})$	$(C_i - \bar{C})^2$	$(\delta_i - \bar{\delta})^2$
125	84,84	83,9917	19,5267	1640,0773	7054,6001	381,2907
62,5	76,76	21,4917	11,4467	246,0079	461,8917	131,0262
31,25	72,72	-9,7583	7,4067	-72,2767	95,2251	54,8587
15,6	52,52	-25,4083	-12,7933	325,0573	645,5834	163,6694
7,8	52,52	-33,2083	-12,7933	424,8453	1102,7934	163,6694
3,9	52,52	-37,1083	-12,7933	474,7393	1377,0284	163,6694

По формуле (1) рассчитываем коэффициент корреляции:

$$r = 0.9014$$

Его значение близко к 1, что показывает существование линейной связи между количеством вещества и значением поверхностного натяжения. Для определения линейной связи используем метод наименьших квадратов. Оценки метода наименьших квадратов рассчитаем по формулам:

$$a^* = \frac{\sum \delta_i C_i - \frac{1}{n} \sum \delta_i \sum C_i}{\sum C_i^2 - \frac{1}{n} (\sum C_i)^2} \quad (2)$$

$$b^* = \frac{\sum \delta_i}{n} \quad (3)$$

Линейная функция, с помощью которой можно прогнозировать и интерполировать зависимость, будет иметь вид

$$\delta^*(C) = a^*(C - \bar{C}) + b^* \quad (4)$$

Для вычисления указанных оценок достаточно найти суммы выражений, представленных во втором, третьем, четвертом столбцах таблицы 2.

Таблица 2 Данные для расчета оценок метода наименьших квадратов

Количество вещества, г/л C_i	C_i^2	δ_i	$\delta_i C_i$
125	15625	84,84	10605
62,5	3906,25	76,76	4797,5
31,25	976,5625	72,72	2272,5
15,6	243,36	52,52	819,312
7,8	60,84	52,52	409,656
3,9	15,21	52,52	204,828

Таким образом, значения оценок составят:

$$a^* = 0,282986$$

$$b^* = 65,31333$$

Линейная зависимость поверхностного натяжения от концентрации вещества будет описываться аналитической формулой:

$$\delta^*(C) = 0,282986 * (C - 41,083333) + 65,31333$$

Получив линейную зависимость, мы можем найти приближенное значение поверхностного натяжения для любого количества вещества C , не проводя опытных расчетов. Значения поверхностного натяжения для количества вещества в пределах от 200 до 500 г/л приведены в таблице 3.

Таблица 3 Приближенные значения поверхностного натяжения по методу наименьших квадратов

Количество вещества, г/л C_i	$\sigma(C)$
200	110,3057
250	124,455
300	138,6042
350	152,7535
400	166,9028
450	181,0521
500	195,2013

На рисунке 1 точками отмечены экспериментальные значения поверхностного натяжения, а на графике изображена линейная функция зависимости, найденная по методу наименьших квадратов. Как видно из рисунка линейная функция достаточно близко аппроксимирует экспериментальные данные. Это же было подтверждено значением коэффициента корреляции, близким к 1.

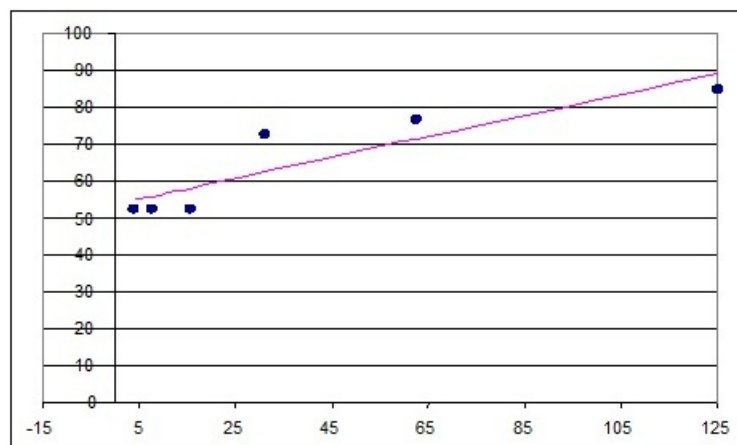


Рисунок 1 Реальные и аппроксимированные значения зависимости (C)

Список литературы

- [1] Иозайтис В.С., Львов Ю.А. Экономико-Математическое моделирование производственных систем. М: ВШ, 1991.-192с.
- [2] Угольницкий Г.А. Управление эколого-экономическими системами.-М.: Вузовская книга, 1999. – 132 с.

УДК 624.04:519.6

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А.А. Нурмагамбетов, Ш.А. Джомартова, Т.Ж. Мазаков

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Abstract. The article describes aspects of the implementation and application of computer algebra system (CAS), which occupies a new position among other systems, with additional benefits in its implementation in the learning process and use as the basis for the construction of the completed application and a tool to solve problems.

Keywords: of computer algebra system, algebraic expressions.

Аңдатпа. Мақалада оқу үдерісіне енгізілгенде, аяқталған қолданбалы өнімдердің негізі және есеп шығару құралы ретінде пайдаланған кезде қосымша артықшылықтары бар, басқа жүйелер арасында жаңа орын алатын аналитикалық есептеулер жүйесін жүзеге асыру және қолдану аспектілері сипатталады.

Кілттік сөздер: аналитикалық есептеу жүйелер, алгебралық өрнектер.

Аннотация. В статье описываются аспекты реализации и применения системы аналитических вычислений (СAB), которая занимает новое место среди других систем, имея дополнительные преимущества при её внедрении в учебный процесс и использовании как основы для построения завершённых приложений и инструмента решения задач.

Ключевые слова: системы аналитических вычислений, алгебраические выражения.

Системы аналитических вычислений (СAB) позволяют получать решения задач в символьном виде, автоматически производя все трудоемкие операции над алгебраическими объектами (выражениями, матрицами, рядами): вычисления, подстановки, упрощение, дифференцирование, интегрирование. В отличие от методов численного решения задач, такой способ является прямым, а не заменяет одну математическую модель другой, дает точные решения, а не приближенные, что позволяет получать принципиально новые результаты. Применение ЭВМ обеспечивает безошибочность и быстроту получения результатов, настраиваемость и расширяемость систем.

Поэтому теоретически с 50-х, а практически с конца 60-х разрабатываются первые системы аналитических вычислений. На рубеже 60-70-х появляются прикладные универсальные системы алгебраических вычислений [1,2,3], выросшие из экспериментальных разработок различных университетов. Их различия обусловлены первичной средой применения и/или разработки, выбранных инструментов реализации (как языка программирования, так и типа ЭВМ). К концу 80-х широко распространяются персональные ЭВМ и новые концепции реализации программных комплексов, что привело к адаптации старых и появлению новых СAB. В настоящее время они реализуют все основные процедуры работы над алгебраическими объектами и предлагают множество более специализированных процедур и пакетов.

Рассматривая положение с СAB в странах бывшего СССР, то следует остановиться на характеристиках следующих известных систем: Аналитик [2], Авто-Аналитик [1] и Эпсилон [4].

Аналитик - создан в 1969-71 гг в Киеве для ЭВМ МИР. Отличается развитостью встроенного языка программирования. Алгебраическими объектами являются: числа: целые, десятичные,

рациональные; текст, векторы, переменные. Основным оператором является ПРИМЕНИТЬ с различными аргументами для проведения операций дифференцирования, упрощения, подстановки выражения в выражение, интегрирования и численных вычислений, при этом сохраняется форма входной информации. Аналитик был применен для решения задач анализа нелинейных резонансных цепей и многих других. Обновленный и написанный на Си АНАЛИТИК-91 может использоваться на ПК и унаследовал богатый инструментарий предыдущих разработок (АНАЛИТИК-71,-79). Все же синтаксис языка неудобен для обучения и избыточен для решения подавляющего большинства задач. Поэтому создание готовых прикладных программ на его основе весьма затруднено, к тому же возможности современного языка реализации при построении интерфейса не используются. Сомнительна эффективность его использования в школе.

Эпсилон [4] - разрабатывался с 1966 года в Новосибирске и реализован для ЭВМ М-220, БЭСМ-6 и Минск-22. Создавался как "система автоматизации программирования задач символьной обработки" и является таким образом универсальным языком программирования для манипулирования данными на уровне ячеек памяти, слов и других структур описания данных.

Авто-Аналитик [1] - система аналитических вычислений для БЭСМ-6, написанная в 1971-72 гг. Имеет фортраноподобный входной язык и рассчитан на работу с самыми разнообразными задачами аналитических преобразований, так как имеет очень развитый аппарат операторов работы с выражениями. Наиболее широко используемыми системами зарубежом (а с распространением ПК с конца 80-х годов и в СССР) являются Reduce, Mathematica и Macsyma: Reduce [5] развивался с конца 60х годов, реализован на ЛИСПе и имеет удобный внутренний язык программирования сходный с Паскалем. Имеет все основные операции над алгебраическими выражениями, кроме того следующие расширения: - вычисления с символьными матрицами; - тензорные операции; интегрирование; - специальное расширение с процедурами для физики высоких энергий.

Macsyma создана в 1970 году и включает такие операции как вычисление пределов, интегрирование, решение дифференциальных уравнений, работа с матрицами, рядами и обработка рациональных функций.

Таким образом, упомянутые САВ советских разработчиков являются серьезными разработками в области решения сложных прикладных задач, но часто отличаются высокой степенью интеграции с типом ЭВМ, на которых они реализованы. Аспекты взаимодействия систем с ЭВМ потеряли свою значимость в вопросах их построения, так как теперь это функции операционной системы. Их использование требует изучения встроенного языка программирования со множеством функциональностей. Но даже для получения сложного дифференциального уравнения в символьном виде, например, совершенно излишня их подавляющая часть, а достаточны только упрощение и дифференцирование без ограничений на сложность выражений. Такие же соображения следуют из места САВ в школах. Оптимальный (а не максимальный) набор возможностей системы вполне соответствует уровню решаемых с её помощью задач и уровню обучающей системы. Поэтому язык должен быть прост в изучении и достаточен для получения результатов непрограммистами.

Из описанного выше нового возможного места САВ в учебном заведении можно сформулировать следующие наиболее общие требования к реализуемому ядру системы:

- 1) должна реализовывать все основные функциональности САВ:

 - проверка на соответствие формальному синтаксису входных данных;
 - вычисление числовых выражений;
 - упрощение любых выражений;

- подстановка выражения в выражение;
- вывод выражения;
- дифференцирование выражения;
- интегрирование частных случаев;

2) включать операции над наиболее необходимыми алгебраическими объектами: матрицами и рядами;

3) не иметь ограничений на сложность алгебраических объектов;

4) иметь логичную структуру для эффективного использования как средства программирования;

5) использовать в полной мере современные инструменты и идеи реализации программных комплексов;

6) являться модифицируемой и открытой.

В соответствии с новой ролью системы аналитических вычислений в качестве средства программирования работы с алгебраическими объектами и получения всех результатов в символьном виде, реализовано ядро системы аналитических вычислений на языке программирования 3-го поколения ТурбоПаскаль в виде библиотеки или модуля подпрограмм. Этот модуль является совокупностью функций и структур данных. Включая данный модуль в своё приложение, пользователь или разработчик может использовать все описанные функции и структуры данных, плюс развитые технологии построения интуитивного интерфейса и ввода/вывода языка реализации, реализовывать новые процедуры или переписывать уже написанные подпроцедуры (тем самым расширяя или улучшая исходное ядро).

В ядре реализованы следующие базовые функции для работы с алгебраическими выражениями любой сложности (теоретически ограничения накладываются только объемом доступной оперативной памяти) и удовлетворяющими контекстно-независимой грамматике алгебраических выражений:

- процедура разбора входной строки текста, описывающего алгебраическое выражение и выявление лексических ошибок (процедура сканер);
- процедура построения дерева выражения по входной строке и выявление синтаксических ошибок (синтаксический разбор);
- процедура вычисления числового выражения, вычисление с подстановкой значений переменных, частичное вычисление и выявление ошибок вычисления (переполнение, ошибка аргумента функции, деление на нуль и т.п.);
- процедура раскрытия скобок;
- процедура приведения подобных членов и упрощения выражения;
- процедуры нескольких видов подстановок одного выражения в другое и проверка цикличности подстановки;
- процедура дифференцирования выражения по нескольким переменным;
- процедура интегрирования в частных случаях.

Предоставляется основной тип данных - динамическое бинарное, представляющее выражение. Вершины являются записью с переменной длиной и содержат код объекта и сам объект выражения: число, переменная, операция, функция, матрица. Дерево является динамической и иерархичной структурой - в процессе работы многие алгоритмы изменяют его. Основные дополнительные структуры:

- Таблица (массив) встроенных функций и их кодов;

- Глобальная таблица переменных с их именами, множеством переменных от которых они зависят, и их значения.

Система разработана в соответствии со следующими требованиями:

- отсутствие каких-либо ограничений со стороны структур данных или алгоритмов на длину и сложность всех алгебраических объектов: выражений, матриц и рядов - за счет использования только динамических структур памяти;
- гибкость и открытость системы для введения или замены структур данных или алгоритмов - за счет тщательного разделения по модулям и отдельным процедурам;
- максимальная удобность работы с ядром системы через процедуры интерфейса для быстрого построения готовых приложений - за счет продуманных профилей процедур и скрытости/защищенности структур данных и деталей алгоритмов (инкапсуляция).

На основе ядра реализованы несколько готовых программ как для практического использования, так и в качестве примеров быстрого и эффективного построения завершенных приложений.

Первая: программа-интерпретатор работы с алгебраическими объектами. Пользователю предоставляется простой язык манипулирования переменными, выражениями, матрицами и рядами. Ввод, интерпретация и вывод последовательности операторов языка происходит с экрана или из файла. Пользователь присваивает переменным значения и далее производит над ними операции с помощью операторов языка. Результаты всех операций сохраняются в других или тех же переменных для дальнейшей работы. Интерпретатор предназначен для пользователей не знакомых с системами аналитических вычислений, и/или желающих получить быстрые результаты без программирования;

Вторая: тестирование знаний по алгебре. Генерируя в процессе теста или считывая готовые наборы заданий эта программа решает их и сравнивает свои решения с вводом тестируемого. Вся информация сохраняется и предоставляется для анализа проведенного теста. Многочисленные параметры позволяют настроить сложность и диапазон заданий по тестируемой теме;

Третья: программа получения и решения уравнений динамики роботов в символьном виде. Пользователь задает только те параметры, которые он считает определенными, остальные система заменяет переменными. Далее в полученных уравнениях и решении пользователь может подставлять конкретные значения обобщенных координат и др. параметров для вычисления обобщенных сил. Вычисляются все промежуточные матрицы, уравнения энергий и т.д.

Список литературы

- [1] Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. Авто-аналитик.- Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973. - 284с.
- [2] Глушков В.М., Бондарчук В.Г., Гринченко Т.А. Аналитик - алгоритмический язык для описания процессов с использованием аналитических преобразований // Кибернетикаю - 1971. - № 3. - С. 102-134.
- [3] Эпсилон - система автоматизации решения задач символьной обработки. Отв. ред. Ершов А.П. - Новосибирск, Наука, 1972. - 130 с.
- [4] Языки и автоматы. Сборник переводов под ред. Маслова А.Н., Стоцкого Э.Д.- М., Мир, 1975.- 360 с.

- [5] Rayna, Gerhard. REDUCE : software for algebraic computation . - New York : Springer -Verlag, 1987. - 329 p.

УДК 519.7

НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ MATLAB

Р.К. Нурсадыкова, Ш.Т. Тезекпаева, З.Т. Хасенова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. Educational statistics is an effective means of controlling the quality of education at all levels. This article discusses the possibility of educational statistics, the current methods for evaluating the quality of education in the Republic of Kazakhstan, the new approach to quality assessment using educational statistics.

Keywords: educational statistics, the quality of education.

Аңдатпа. Мақалада айқын емес жиын теориясының негізгі ұғымдары мен олардың классикалық жиынның анықтаумен байланысы қарастырылған, тиістілік функциялардың негізгі типтері сипатталынған. Олардың аналитикалық және графикалық көрінісі MATLAB ортасында модельденген.

Кілттік сөздер: білім беру статистикасы, білім берудің сапасы.

Аннотация. В статье рассматриваются основные понятия теории нечетких множеств и их связь с определением классического множества, описываются основные типы функций принадлежности, их аналитическое и графическое представления моделируется в среде MATLAB.

Ключевые слова: образовательная статистика, качество образования.

Для построение нечетких моделей систем необходимо определить неоднозначность его свойств. Существует несколько вариантов формального определения нечеткого множества, которые по сути отличаются между собой способом задания характеристической функции данных множеств. Среди этих вариантов наиболее естественным и понятным является задание области значений подобной функции как интервал действительных чисел, заключенных между 0 и 1.

Формально нечеткое множество A определяется как множество упорядоченных пар или кортежей вида: $\langle x, \mu_A(x) \rangle$, где x является элементом некоторого универсального множества или универсума X , а $\langle \mu_A(x) \rangle$ - функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому из элементов $x \in X$ некоторое действительное число из интервала $[0,1]$, т.е. данная функция определяется по форме отображения:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

При этом значение $\langle \mu_A(x) \rangle = 1$ для некоторого $x \rightarrow X$ означает, что элемент нечеткому множеству A , а значением $\langle \mu_A(x) \rangle = 0$ означает, что элемент нечеткому множеству A .

Формально конечное нечеткое множество записывается в виде:

$A = \{ \langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle \}$, а в общем случае – в виде: $A = \langle x, \mu_A(x) \rangle$

Для того чтобы определить конечные и бесконечные нечеткие множества, необходимо ввести понятие носителя нечеткого множества.

Нечеткие множества могут быть заданы двумя основными способами:

1. В форме *списка с явным перечислением* всех элементов и соответствующих им значений функции принадлежности, образующих рассматриваемое нечеткое множество. При этом зачастую элементы с нулевыми значениями функции принадлежности просто не указываются в данном списке. Этот способ подходит для задания нечетких множеств с конечным дискретным носителем и небольшим числом элементов. В этом случае нечеткое множество удобно записывать в виде:

$A = \{ \langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle \}$, где n - рассматриваемое число элементов нечеткого множества A (его носителя).

Например, возьмем в качестве универсума $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ множество натуральных чисел. Тогда нечеткое множество A , представляющее в некотором контексте *“небольшое натуральное число”*, можно задать следующим образом:

$A = \{ \langle 1, 1.0 \rangle, \langle 2, 1.0 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.8 \rangle, \langle 5, 0.6 \rangle, \langle 6, 0.5 \rangle, \langle 7, 0.4 \rangle, \langle 8, 0.2 \rangle, \langle 9, 0.1 \rangle \}$. При этом элементы, для которых $\mu_A(x) = 0$, отсутствуют в этом списке.

2. *Аналитически* в форме математического выражения для соответствующей функции принадлежности. Этот способ может быть использован для задания произвольных нечетких множеств как с конечным, так и с бесконечным носителем. В этом случае нечеткое множество удобно записывать в виде: $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$ или $A = \{ x, \mu_A(x) \}$, где μ_A – некоторая функция, заданная аналитически в форме математического выражения $f(x)$ или графически в форме некоторой кривой. Наиболее часто используемые виды функций принадлежности будут рассмотрены ниже в этой главе.

В качестве первого типа функций принадлежности рассмотрим функции, которые, как следует из их названия, состоят из отрезков прямых линий, образуя непрерывную или кусочно-непрерывную функцию. Наиболее характерным примером таких функций являются “треугольная” (рис.1, а) и “трапециевидная” (рис. 1, б) функции принадлежности. В нашем случае каждая из этих функций задана на универсуме $x=[0, 10]$, в качестве которого выбран замкнутый интервал действительных чисел. В общем случае выбор универсума может быть произвольным и не ограничен никакими правилами.

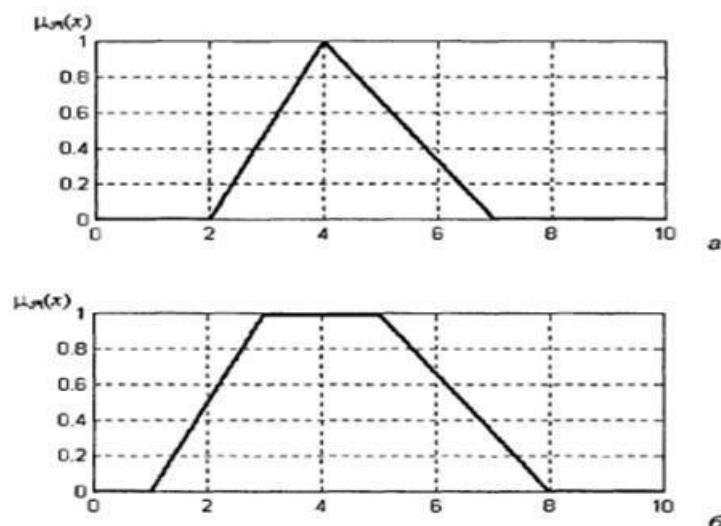


Рисунок 1 Графики функции принадлежности треугольной (а) и трапециевидной (б) формы

Первая из этих функций принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\Delta}(x; a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & c \leq x \end{pmatrix} \quad (2)$$

где a, b, c - некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \leq b \leq c$.

Применительно к конкретной функции, изображенной на рис. 1,а, значения параметров равны: $a=2, b=4, c=7$. Как нетрудно заметить, параметры a и c характеризуют основание треугольника, а параметр b его вершину. Как можно заметить, эта функция принадлежности порождает нормальное выпуклое унимодальное нечеткое множество с носителем интервалом (a, c) , границами $(a, c) \setminus \{b\}$, ядром $\{b\}$ и модой b .

Трапецевидная функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_T(x; a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & d \leq x \end{pmatrix} \quad (3)$$

где a, b, c, d - некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \leq b \leq c \leq d$.

Применительно к конкретной функции, изображенной на рис. 1, б, значения параметров равны: $a=1, b=3, c=5, d=8$. Как нетрудно заметить, параметры a и d характеризуют нижнее основание трапеции, а параметры b и c верхнее основание трапеции. При этом данная функция принадлежности порождает нормальное выпуклое нечеткое множество с носителем интервалом (a, d) , границами (a, b) и (c, d) и ядром $[b, c]$.

Эти функции используются для задания таких свойств множеств, которые характеризуют неопределенность типа: *"приблизительно равно"*, *"среднее значение"*, *"расположен в интервале"*, *"подобен объекту"*, *"похож на предмет"* и др.

К П-образным функциям принадлежностиможно отнести целый класс кривых, которые по своей форме напоминают колокол, сглаженную трапецию или букву "П". Первая из подобных функций так и называется *П-образная функция*, и в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{\Pi}(x; a, b, c, d) = f_S(x; a, b) \cdot f_Z(x; c, d) \quad (4)$$

где a, b, c, d - некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \leq b < c \leq d$.

При этом могут быть использованы любые из рассмотренных выше Z- и S-образных функций. В частности, если использовать функции f_{S1} и f_{Z1} то получим П-функцию f_m , график которой для некоторого нечеткого множества A и универсума $X=[0,10]$ изображен на рис. 2,а. При этом значения параметров для функции f_{S1} равны $a=1, b=4$, а для функции f_{Z1} - $c=5, d=9$. Если же использовать функции f_{S1} и f_{Z1} , то получим П-функцию f_m , график которой для некото-

рого нечеткого множества A и универсума $X=[0,10]$ изображен на рис. 2,б для тех же значений параметров.

Очевидно, этот тип функций принадлежности порождает нормальные выпуклые нечеткие множества с носителем (a, d) и ядром $[b, c]$.

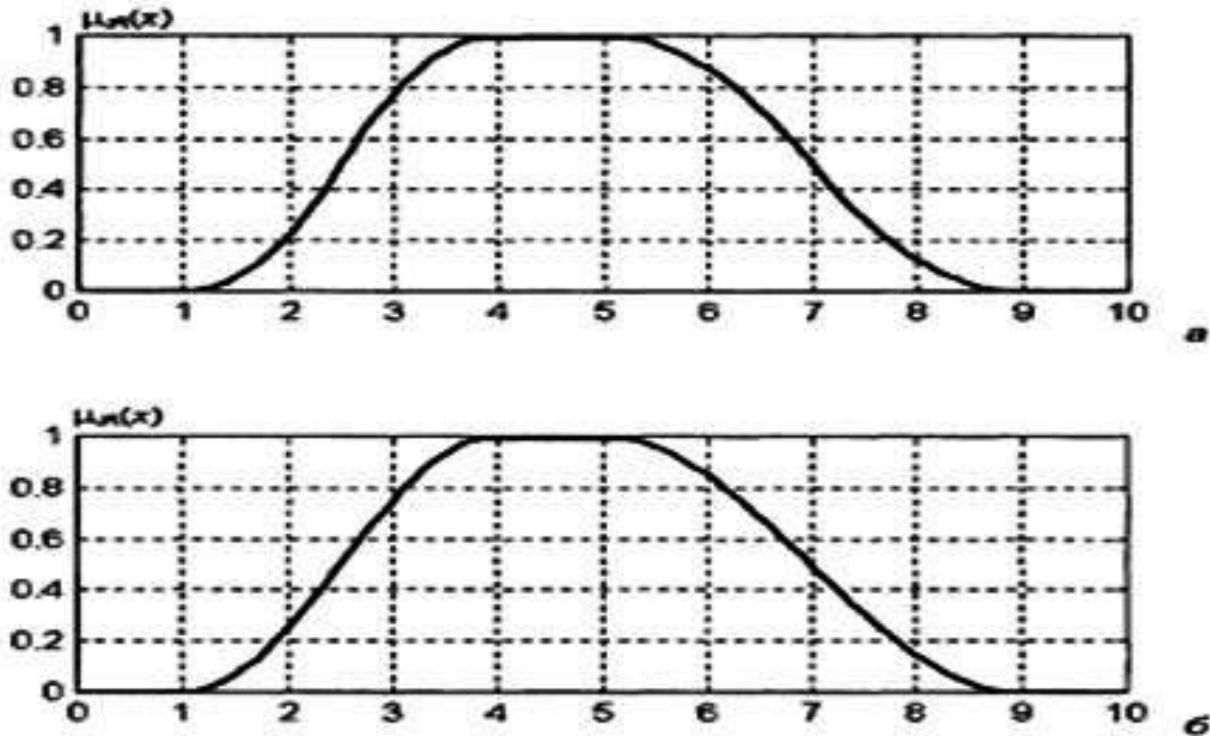


Рисунок 2 Графики П-образных функции принадлежности $f_{П1}(a)$ и $f_{П2}(a)$ для значений параметров $a=1$, $b=4$, $c=5$, $d=9$

Следующая функция этого типа *П-образных функций* определяется как произведение двух сигмоидальных функций и в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{П3}(x; a, b, c, d) = f_{S3}(x; a, b) \cdot f_{S3}(x; c, d) \quad (5)$$

где a, b, c, d - некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения, причем $a > 0$, $c < 0$ и упорядоченные отношением: $a \leq b < c \leq d$, функция $|x|$ - модуль действительного числа.

К П-образным функциям относится также так называемая *колоколообразная* (bell-shaped) функция, которая в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{П4}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (6)$$

где a, b, c - некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a < b < c$, причем параметр $b > 0$. Здесь функция $|x|$ обозначает модуль действительного числа.

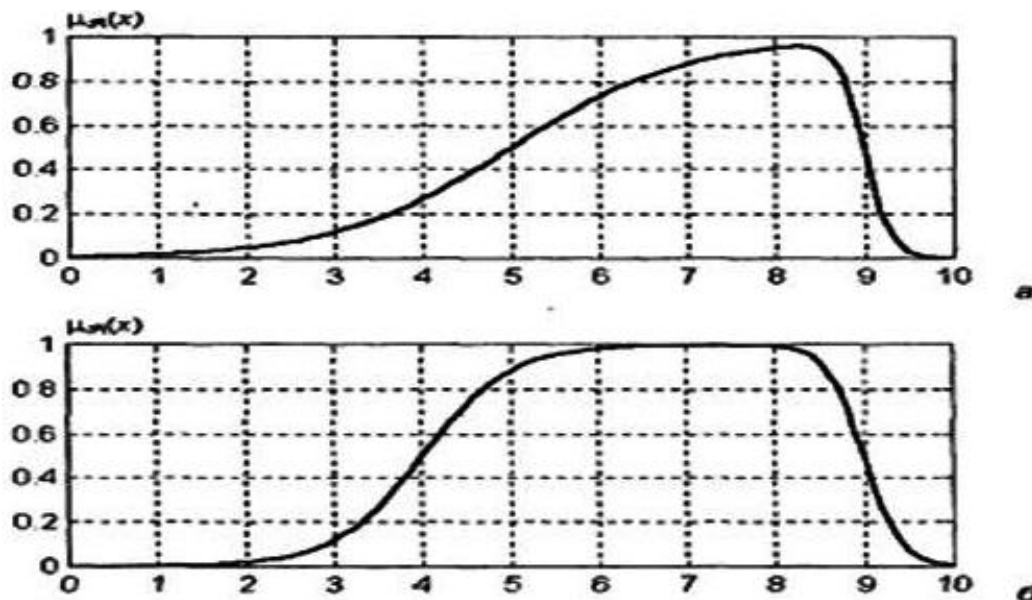


Рисунок 3 Графики П-образных функции принадлежности $f_{ПЗ}(a)$ для значений параметров $a=1, b=4, c=-7, d=9$ (а) и для значений параметров $a=2, b=4, c=-5, d=9$ (б)

Наконец, последней из рассматриваемых функций данного типа является хорошо известная в теории вероятностей функция плотности нормального распределения в предположении, что $\sqrt{2\pi}\sigma = 1$ и которая в нашем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{П5}(x; \sigma, c) = e^{-\frac{(-x-c)^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

Здесь σ и c числовые параметры, при этом квадрат первого из них σ^2 в теории вероятностей называется дисперсией распределения, а второй параметр c *математическим ожиданием*.

Очевидно, эти последние типы функций принадлежности порождают нормальные выпуклые нечеткие множества, при этом плотность нормального распределения обеспечивает унимодальность соответствующего нечеткого множества.

В заключение следует отметить, что в случае недостатка информации об особенностях функций принадлежности нечетких переменных рекомендуется начинать построение нечеткой модели с использования наиболее простых форм функции принадлежности, а именно кусочно-линейных функций. В последствии их характер может быть уточнен и учтен на этапе коррекции нечеткой модели.

Список литературы

- [1] Введение в теорию нечетких множеств. А. Кофман // М.: Радио и связь, 1982 – 432 с.
- [2] Визуальное моделирование в среде MATLAB: учебный курс А. Гулятьев СПб: Питер. 2000 – 432 с.
- [3] Теория множеств. К.Куратовский, А.Мостовский., М.: Мир, 1970 – 416 с.

УДК 504.064.36

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА ПО ДАННЫМ СИСТЕМЫ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА¹

А.В. Пененко, С.Ж. Рахметуллина

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. The work is devoted to the implementation of different atmospheric pollutant source estimation methods to be used in the monitoring system of the city. The monitoring system consist of several automatic measurement devices providing point concentration measurements data. Considered approaches to the source estimation are based on variational principle with the use of adjoint equations for the convection-diffusion models with source-term uncertainty

Keywords: Source localization, advection-diffusion equations, variational methods, adjoint problems.

Аңдатпа. Жұмыс қаланың экологиялық мониторингісі жүйесіндегі атмосфералық ауаны ластау көздерін бағалауға және оқшаулауға әртүрлі тұрғыдан қолдану сұрақтарына арналған. Мониторингтің автоматтандырылған жүйесі өлшеу пунктерінде ластау заттарын концентрациялау туралы деректерді алуға мүмкіндік береді. Жұмыстағы қарастырылған тұрғылар вариациялық принциптер мен түйіндес есептерді қолдануға негізделеді.

Кілттік сөздер: Бастапқы көздерді оқшаулау, адвекция-диффузия теңдеуі, вариациялық әдістер, түйіндес есептер.

Аннотация. Работа посвящена вопросам использования в системе экологического мониторинга города различных подходов к локализации и оценке источников загрязнения атмосферного воздуха. Автоматизированная система мониторинга позволяет получать данные о концентрации загрязняющих веществ в пунктах измерения. Рассмотренные в работе подходы основаны на вариационных принципах и использовании сопряженных задач.

Ключевые слова: Локализация источников, уравнение адвекции-диффузии, вариационные методы, сопряженные задачи.

Введение. В системе экологического мониторинга атмосферного воздуха г. Усть-Каменогорска функционирует автоматизированная система наблюдений за качеством воздуха, метеопараметрами, радиационным фоном, уровнем воды [1].

В результате внедрения данной системы появилась возможность использования оперативных данных мониторинга состояния атмосферного воздуха и базы данных ретроспективных наблюдений для решения задач, связанных с природоохранным прогнозированием. Актуальными задачами в системе мониторинга качества атмосферного воздуха промышленного города являются: моделирование и прогнозирование загрязнения атмосферного воздуха; локализация и оценка

¹Работа частично поддержана Программами фундаментальных исследований №4 Президиума РАН и №3 ОМН РАН, проектом РФФИ №11-01-00187-а, Интеграционным проектом 35 СО РАН, бюджетной программой 120 «Грантовое финансирование», Комитет науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, госконтрактом № 14.740.11.0350 по программе «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области математики» ФЦП «Научно-педагогические кадры инновационной России».

мощностей источников загрязнения; определение зон наиболее подверженных влиянию источников. Совместное использование методов математического моделирования, информационных технологий, и данных наблюдений является эффективным инструментом для решения задач экологического мониторинга. Это позволяет не только оценивать ситуацию в любой момент времени в условиях постоянно меняющихся параметров, но и своевременно осуществлять подготовку предложений для принятия управленческих решений по организации мероприятий, направленных на улучшение качества атмосферного воздуха.

Разработке методик поиска источников загрязнения для задач атмосферы и охраны окружающей среды посвящены работы [2-12] и многие другие.

В данной работе мы рассматриваем подходы к локализации источников, базирующийся на классическом вариационном принципе Лагранжа с использованием сопряженных уравнений и учитывающий неопределённости в моделях и в результатах наблюдений [3, 5, 6, 7]. В данном случае искомой является функция источников. Сложность задачи состоит в том, что по относительно небольшому количеству данных измерений требуется определить функцию на пространственно-временной области, т.е. задача является недоопределенной. Достоинством подхода является то, что в случае линейной модели физических процессов, обратная задача тоже является линейной.

Дифференциальная формулировка модели. Задача решается в пространственно-временной области $D_t = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq t \leq T\}$. Для отработки алгоритмов поиска источников, рассмотрена упрощённая двумерная математическая модель процессов переноса и турбулентного обмена загрязняющих примесей в атмосфере:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_x \varphi + A_y \varphi &= f, \\ \varphi|_{t=0} &= \underline{\varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Где операторы A_x, A_y в дифференциальной форме записываются как:

$$A_x \varphi = \begin{cases} -\mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & x = 0, \\ u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}), & x \in (0, X), \\ \mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, & x = X, \end{cases} \quad (2)$$

$$A_y \varphi = \begin{cases} -\mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, & y = 0 \\ v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}), & y \in (0, Y), \\ \mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, & y = Y \end{cases} \quad (3)$$

Здесь t – время; f – функция описывающая источники примесей; μ_x, μ_y – горизонтальные коэффициенты турбулентности; u, v – компоненты вектора скорости ветра в направлениях осей декартовой системы координат; φ – функция, описывающая распределение концентрации загрязняющего вещества, достаточно гладкая для того, чтобы имели смысл все требуемые для описания модели операции; $\underline{\varphi}$ – начальное распределение концентраций.

Задача решается при постоянных значениях функций u, v . Для получения актуальных значений скорости ветра использован Интернет сервис погоды компании Yandex [13]. Для определения коэффициентов турбулентности использованы эмпирические формулы и формулы Смагоринского [14].

Для удобства дальнейшего изложения будем записывать систему (1) в операторном виде

$$L\varphi = f. \quad (4)$$

Более точная модель микроклимата города, а также её численная реализация представлены в [14].

Алгоритм численной реализации модели. Для приближённого решения задачи прямого моделирования полей концентрации примеси использован конечно-разностный метод [15]. Для этого в области D_t вводится сеточная область D_t^h , состоящая из сеток по времени с шагом τ и числом узлов Nt , и сеток по пространству с шагами $\Delta x, \Delta y$ и числами узлов Nx, Ny соответственно. Рассмотрим в D_t^h неявную схему:

$$\frac{\varphi^n - \varphi^{n-1}}{\tau} + (\Lambda_x + \Lambda_y)\varphi^n = f^n, \quad (5)$$

$$\varphi_0 = \underline{\varphi}. \quad (6)$$

Здесь Λ_x, Λ_y - разностные аналоги операторов (2), (3), $n = 1, \dots, Nt-1$ - номер шага по времени. Для аппроксимации диффузионных слагаемых дифференциальных операторов используются стандартные трехточечные схемы, а для аппроксимации слагаемых, описывающих перенос - схема направленных разностей. Эволюционная задача (5)-(6) с помощью метода расщепления по пространственным переменным аппроксимируется последовательностью задач:

$$\frac{\varphi_1^n - \varphi^{n-1}}{\tau} + \Lambda_x \varphi_1^n = f^n, \quad (7)$$

$$\frac{\varphi_2^n - \varphi_1^n}{\tau} + \Lambda_y \varphi_2^n = 0, \quad (8)$$

$$\varphi^n = \varphi_2^n. \quad (9)$$

На каждом временном шаге реализация схемы (7)-(9) сведется к решению СЛАУ:

$$\begin{aligned} (E_x + \tau \Lambda_x) \varphi_1^n - (\varphi^{n-1} + \tau f^n) &= 0, \\ (E_y + \tau \Lambda_y) \varphi_2^n - \varphi_1^n &= 0, \\ \varphi^n &= \varphi_2^n, \end{aligned} \quad (10)$$

где φ_1, φ_2 - значения функции состояния на дробных шагах расщепления, E_x, E_y - единичные матрицы. Задачу поиска полей концентраций по известным источникам будем называть прямой.

Постановка задачи. Известны значения функции состояния в пунктах наблюдения:

$$\psi_m = \varphi(x_m, y_m, t_m) = \varphi(\bar{x}_m, t_m), \quad m = 1, \dots, M$$

где M - число наблюдений, а m - номер наблюдения, $\bar{x}_m = (x_m, y_m)$. По ним требуется оценить:

- мощность точечного источника Q , если известны его пространственные координаты;
- координаты источника.

Расположение модельных постов наблюдений взяты в соответствии с расположением постов наблюдений автоматизированной системы мониторинга.

Задача об оценке мощностей источников с известными пространственными координатами.

В силу линейности прямой задачи по правой части, оценка мощностей источников может базироваться на нахождении фундаментальных решений прямой задачи для каждого источника и оценки их мощностей, с использованием данных измерений.

Пусть у нас есть набор фундаментальных решений для известного набора источников $\{f_i\}_{i=1}^N$:

$$L(\varphi_i) = f_i$$

Предположим, что реальное поле концентраций определяется как результат воздействия источников $\{f_i\}_{i=1}^N$ с мощностями $\{q_i\}_{i=1}^N$:

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^N q_i f_i = \sum_{i=1}^N L(q_i \varphi_i).$$

Пусть также у нас есть набор из M измерений ψ_m функций состояния φ в точках пространства и времени $\{\bar{x}_m, t_m\}_{m=1}^M$: $\{\psi_m = \varphi(\bar{x}_m, t_m)\}_{m=1}^M$. Будем искать решение в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (11)$$

Тогда относительно неизвестных мощностей $\{q_i\}_{i=1}^N$ можно составить систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}_1, t_1) & \dots & \varphi_i(\bar{x}_1, t_1) & \dots & \varphi_N(\bar{x}_1, t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\bar{x}_m, t_m) & \dots & \varphi_i(\bar{x}_m, t_m) & \dots & \varphi_N(\bar{x}_m, t_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\bar{x}_M, t_M) & \dots & \varphi_i(\bar{x}_M, t_M) & \dots & \varphi_N(\bar{x}_M, t_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_m \\ \dots \\ \psi_M \end{pmatrix}.$$

Результаты программной реализации этого алгоритма представлены на рисунке 1. При проведении численного эксперимента решена прямая задача с тремя постоянно действующими источниками разных мощностей, расположенных в точках сетки с индексами и мощностями: $(10, 40), Q = 5$, $(25, 15), Q = 8$, $(35, 45), Q = 2$.

В момент времени $n = 59$ зафиксированы замеры в точках с индексами $(20, 35)$, $(5, 30)$, $(15, 10)$, $(10, 20)$.

На рисунке 1 слева представлен результат решения данной прямой задачи и отмечены точки проведения замеров.

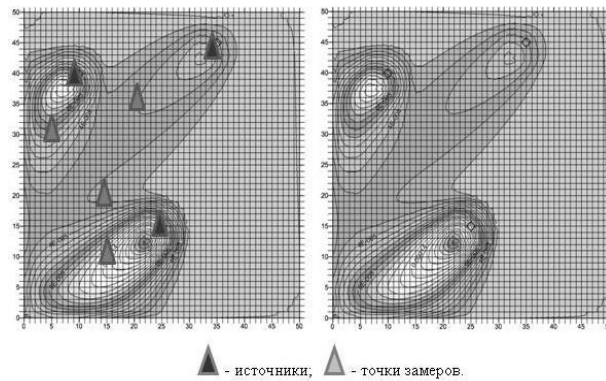


Рисунок 1 Слева решение прямой задачи для последнего момента времени, на котором отмечены источники и точки измерений. Справа приведен результат моделирования концентраций от оцененных источников

После оценки мощностей в соответствии с (11) было построено поле концентраций с найденными мощностями, рисунок 1 справа. Построенное поле с хорошей точностью совпадает с заданным решением прямой задачи. Результаты реализации этого алгоритма в информационной системе мониторинга представлены на рисунке 2.

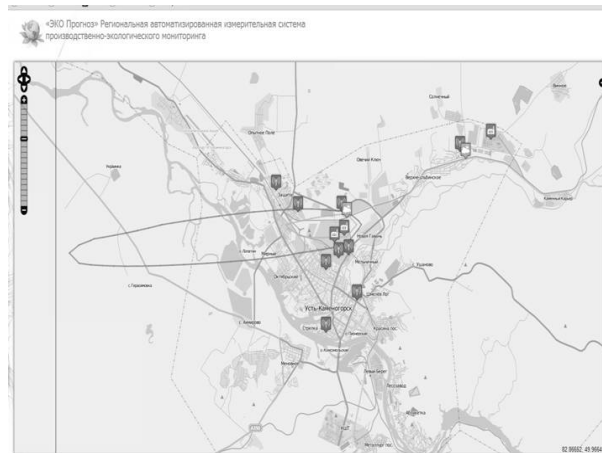


Рисунок 2 Результат моделирования концентраций от оцененных источников в информационной системе мониторинга города Усть-Каменогорска

Вариационная постановка задачи обнаружения источников. Другой подход к задаче поиска источников состоит в том, чтобы непосредственно связать неизвестные источники с результатами наблюдений. Такую связь можно получить как частный случай системного подхода к прямому и обратному моделированию, развитому в [15, 16] и построенному на вариационных принципах. Основные элементы подхода - решение прямых и сопряженных задач, расчёт функций чувствительности для функционалов общего вида, включая функционалы наблюдений и ограничений, расчёт функций неопределённостей по заданному целевому функционалу и решение системы уравнений обратных связей между вариациями параметров и функциями чувствительности - неопределённости.

Введение специальных функций неопределённостей в жесткую структуру математических моделей позволяет решать обратные задачи для поиска интересующих значений. Так как наша цель в данной работе – поиск источников, то функция неопределённости r добавляется в правую часть операторного уравнения (4)

$$L\varphi = f + r. \quad (12)$$

Новая функция вводится в уравнение для того, чтобы явно показать, что f соответствует априорно известным источникам, а r – неизвестным.

Построение основного функционала для организации моделирования осуществляется с учетом:

- математических моделей физических процессов;
- доступных данных об источниках;
- данных о системе наблюдений;
- результатов наблюдений.

Численные схемы для решения поставленных задач получаются посредством минимизации влияния неопределённостей, включаемых в функционал моделей и данных.

Изменим операторное описание (12), сделав его однородным:

$$L\varphi - (f + r) = L(\varphi, Y, r) = 0,$$

где параметры $\mathbf{Y} \in R(D_t)$ – все функции, параметры, входные данные и источники, участвующие в постановке задач и не являющиеся переменными состояниями, $R(D_t)$ – область допустимых значений параметров.

Наряду с дифференциальной постановкой задачи прямого моделирования, будем рассматривать обобщенную формулировку модели [15]

$$I(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = \int_{D_t} L(\varphi, Y, r) \varphi^* dDdt = (L(\varphi, Y, r), \varphi^*), \quad (13)$$

где $\varphi^* \in Q^*(D_t)$ – сопряженная функция из гильбертова пространства функций $Q^*(D_t)$, для которых будут иметь смысл все проводимые дальше операции, $(\cdot, \cdot)$ – здесь и далее будут обозначать соответствующие скалярные произведения на рассматриваемых функциональных пространствах.

При $\varphi^* = \varphi$ интегральное тождество (13) определяет функционал энергетического типа, т.е.

$$I(\varphi, Y, \varphi) = 0.$$

Он представляет собой уравнение баланса полной энергии системы (1).

Для обнаружения источников загрязняющих примесей по данным измерений концентраций используется совокупность данных и модели наблюдений, представленных функционалами наблюдений [15]:

$$\psi_m \equiv \Phi_m(\varphi) = \int_{D_t} \tilde{W}(\varphi)(\bar{x}, t) \chi_m(\bar{x}, t) d\bar{x}dt = (\tilde{W}(\varphi), \chi_m)$$

В нашем случае $\tilde{W}(\varphi) = \varphi$, ψ_m – измеренные значения концентрации в точке m с координатами (x_m, y_m, z_m, t_m) , $\chi_m(\bar{x}, t) = \delta(x - x_m, y - y_m, t - t_m)$ – весовые функции.

Поскольку нас интересует чувствительность по отношению к вариациям неопределённостей в источниках, то будем считать, что вариации других параметров отсутствуют, тогда

$$\delta\psi_m = (\text{grad}_r \Phi_m(\varphi), \delta r) = (\Gamma_m, \delta r), \quad \Gamma_m = \text{grad}_r \Phi_m(\varphi). \quad (14)$$

при условии, что φ удовлетворяет (12).

В случае линейных моделей процессов, линейных моделей наблюдений и линейных, по отношению к функциям состояния, функционалов, можно составить соотношения для чувствительности не только для вариаций $\delta\psi_m$ и δr , но и для самих величин ψ_m и r . В линейном случае для построения соотношений для расчёта функций чувствительности можно не решать прямые задачи, которые в свою очередь, требуют знания всех входных данных, включая источники.

Для получения соотношений (14) достаточно решить совокупность сопряженных задач и по ним определить функции чувствительности (ФЧ) функционала наблюдений по отношению к источникам. Действительно, рассматривая расширенный функционал системы

$$\tilde{\Phi}_m(\varphi, \{Y, r\}, \varphi^*) = \Phi_m(\varphi) + I(\varphi, \{Y, r\}, \varphi^*) = (\varphi, \chi_m) + (L\varphi, \varphi^*) - (f + r, \varphi^*), \quad (15)$$

и вычислив его первую вариацию относительно переменной r , получим

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) = \\ = \delta_\varphi \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) + \delta_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) + \\ + \delta_{\varphi^*} \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r, \delta r)) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) &= (\chi_m + L^* \varphi^*(r), \delta \varphi(r)), \\ \delta_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) &= (-\varphi^*(r), \delta r), \\ \delta_{\varphi^*} \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) &= (L\varphi(r) - (f + r), \delta \varphi^*(r, \delta r)). \end{aligned}$$

Тогда, при выполнении соотношений

$$L\varphi(r) - (f + r) = 0,$$

$$\chi_m + L^* \varphi^*(r) = 0,$$

полная вариация расширенного функционала относительно всех переменных примет вид

$$\begin{aligned} \delta \psi_m &= \bar{\delta}_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) = \\ &= \delta_r \tilde{\Phi}_m(\varphi(r), \{Y, r\}, \varphi^*(r)) = (-\varphi^*(r), \delta r), \end{aligned} \quad (16)$$

и $\Gamma_m = -\varphi^*(r)$.

На уровне численных схем, верно следующее утверждение: если φ -решение задачи (10), и сопряженная функция φ^* удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \varphi^{*Nt} &= 0, \\ (E + \tau \Lambda_y)^* \varphi_2^{*n} &= \varphi^{*n+1} - \tau \chi_m^n, \\ (E + \tau \Lambda_x)^* \varphi_1^{*n} &= \varphi_2^{*n}, \\ \varphi^{*n} &= \varphi_1^{*n}, \end{aligned} \quad (17)$$

то выполняется тождество Лагранжа [17]

$$\langle \varphi, \chi_m \rangle = \langle -\varphi_m^*, f \rangle. \quad (18)$$

Здесь φ^* - сопряженная функция, χ_m - функция измерений для измерения m , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение на пространстве сеточных функций, а B^* - матрица, сопряженная к некоторой матрице B , относительно этого скалярного произведения. В рассматриваемой системе мониторинга χ_m - дельта-Кroneкера с носителем в точке расположения газоанализатора. Функции чувствительности Γ_m в конечно-мерном случае становятся сеточными функциями.

Без ограничения общности будем считать, что "фоновый" источник f равен 0. Иначе из данных измерений нужно вычесть значения концентраций, определяемых источником f .

Алгоритм локализации источников загрязнения на основе трансформаций Гаусса.

Из тождества Лагранжа для результатов измерений можно получить соотношения:

$$\psi_m = \Gamma_m \mathbf{r} \quad (19)$$

Поскольку для расчета этих соотношений использовались модели наблюдений и функционалы с их участием, то в левой части (19) находятся смоделированные образы измеряемых величин. При подстановке в левую часть вместо моделируемых образов самих результатов измерений, получим систему линейных уравнений для приближённой оценки вектора $\mathbf{r}$. Рассмотрим соотношение (19) как систему линейных уравнений относительно искомых компонентов функции $\mathbf{r} \in R_{Nx*Ny*Nt}$. Перепишем их в виде:

$$\Gamma \mathbf{r} = \psi \quad (20)$$

где $\Gamma = \{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ - вещественная прямоугольная $M \times Nx * Ny * Nt$ матрица, составленная из ФЧ.

Если система (20) переопределена (т.е. когда число наблюдений больше, чем число искомых параметров источников), то ее решения получаются с помощью метода наименьших квадратов или первой (левой) трансформации Гаусса. Задача сводится к решению системы вида:

$$\Gamma^* \Gamma \mathbf{r} = \Gamma^* \psi \quad (21)$$

В зависимости от величины, система (21) решается либо прямыми алгоритмами, либо итерационными методами. Такой вариант реализуется, когда расположение немногочисленных источников известно, и требуется найти их мощности.

Когда система (20) недоопределена (т.е. когда число наблюдений меньше, чем количество искомых функций), одно из решений можно получить с помощью правой трансформации Гаусса [3]

$$\Gamma \Gamma^* \mathbf{X} = \psi,$$

$$\mathbf{r} = \Gamma^* \mathbf{X}$$

где $\Gamma \Gamma^*$ - неотрицательно определённая $M \times M$ матрица Грама для совокупности векторов ФЧ Γ_m . Такой вариант возникает в случае локализации источников.

Точечный источник расположен в точке с индексами (30,30), момент его действия $n = 0$. Результаты определения координат источника представлены на рисунке 3. Источник изображен в виде треугольника. Координаты источника восстановлены по данным наблюдений на момент времени $n = 59$ и матрице сопряженных функций, соответствующим наблюдениям в точках (30,40); (10,30); (20,25); (10,10); (20,15), пункты наблюдений обозначены квадратами. Процесс поиска координат источника представлен в динамике, начиная с момента времени $n = 0$, когда произошёл выброс, заканчивая моментом измерения $n = 59$. Изолинии на рисунке 3 отображают функцию источника. Можно заключить, что функция источников дает оценку расположения источника, однако её глобальный максимум может быть расположен в точках наблюдений [6]. Найденные с помощью описанного алгоритма координаты источника и координаты заданного источника согласуются, что подтверждает возможность использования описанного алгоритма в системе мониторинга. В дальнейшем мы рассмотрим несколько способов преодоления "максимума функции источника в точке измерения"

Алгоритм локализации источников в пересечении функций наблюдаемости (видимости). Рассматриваемый поход [5] состоит в том, чтобы использовать множества уровня

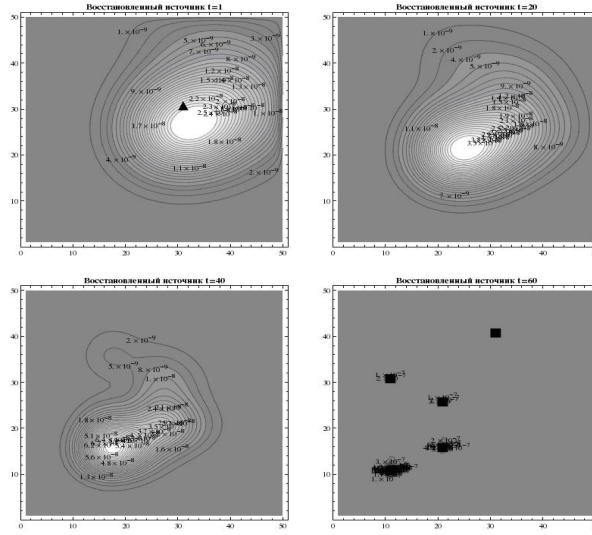


Рисунок 3 Функция источника, полученная с помощью второй трансформации Гаусса для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$)

функции чувствительности. Действительно, в процессе мониторинга, ФЧ можно использовать для определения областей наблюдаемости территорий для данной системы наблюдений. Функция $\Gamma_m(\mathbf{x}, t)$ характеризует вклад каждого источника, локализованного в точке сеточной области $(\mathbf{x}, t) \in D_t^h$ в суммарное значение ψ_m . Введем в рассмотрение функции, описывающие носители ФЧ в диапазоне значений выше заданного уровня значимости ε

$$H_m(\Gamma_m(\vec{x}, t), \varepsilon) = \text{supp}_\varepsilon \Gamma_m(\vec{x}, t) = \begin{cases} 1, & |\Gamma_m| \geq \varepsilon \\ 0, & |\Gamma_m| < \varepsilon \end{cases}.$$

Области, где $|\Gamma_m| < \varepsilon$ не учитываются, так как относительный вклад расположенных в них источников в измеренные значения функционала несущественен. Символ supp обозначает носитель соответствующей функции. Таким образом, пара функций $\{\Gamma_m, H_m\}$ может использоваться для оценок области наблюдаемости с помощью системы наблюдений. При этом, H_m дает конфигурацию области, где могут быть источники, сигнал от которых поступает в систему и аккумулируется в ψ_m . Кроме порога для функций чувствительности, аналогичный порог μ вводится и для данных измерений, чтобы отличать наблюдение в котором "есть сигнал источника" от наблюдения, в котором его "нет". Введем непересекающиеся множества индексов

$$M_V = \{m | \psi_m \geq \mu\} \\ M_{IV} = \{m | \psi_m < \mu\}$$

Тогда в качестве оценки расположения источника используется функция - индикатор

$$S = \prod_{m \in M_V} H_m(\Gamma_m(\vec{x}, t), \varepsilon) \cdot \prod_{m \in M_{IV}} (1 - H_m(\Gamma_m(\vec{x}, t), \varepsilon))$$

Результаты реализации алгоритма определения зоны наблюдаемости (видимости) представлены на рисунках 4, 5, 6. В данном случае, смоделированные измерения имели величины

$$\psi = \{5.69625e - 11, 4.54809e - 7, 7.63687e - 7, 4.61298e - 6, 2.31334e - 6\}.$$

И в качестве порога для учета наблюдения выбрано значение $\mu = 4.54809\text{e-}7$. Источник примесей на рисунках обозначен треугольником, точки наблюдения - квадратами. Процесс определения области чувствительности представлен в динамике, для моментов времени с индексами: $t = 1, t = 20, t = 40, t = 60$ (когда был произведен замер в точках наблюдения).

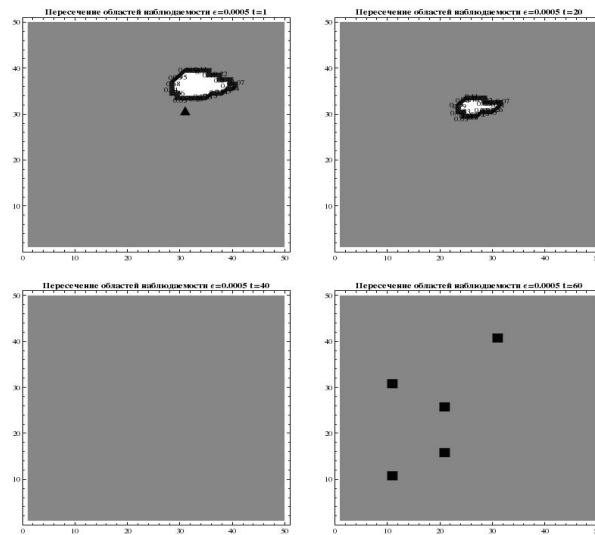


Рисунок 4 Результат оценки расположения источника по областям наблюдаемости для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$)

Вычислительный эксперимент показал, что алгоритм можно использовать для оценки расположения источника, однако ключевым является вопрос выбора порогов (см. рис. 6, где источник оказался за пределами множества при слишком строгом пороге для функции чувствительности). Некоторые варианты такого выбора на основе априорной информации о мощностях источников были предложены в [17].

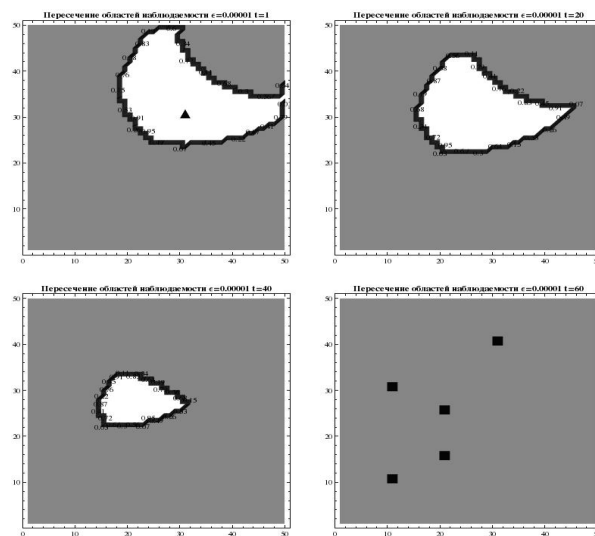


Рисунок 5 Результат оценки расположения источника по областям наблюдаемости для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$)

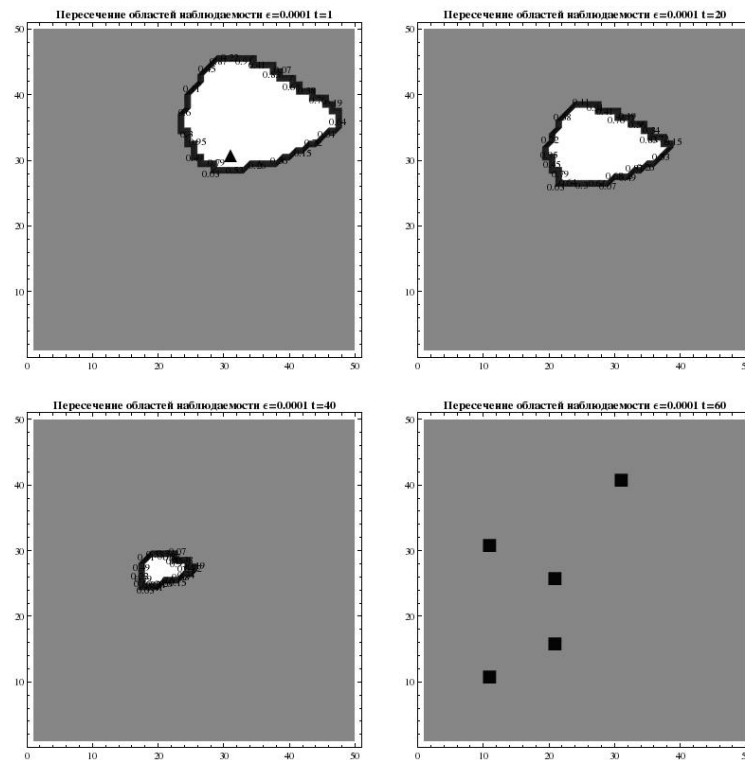


Рисунок 6 Результат оценки расположения источника по областям наблюдаемости для различных шагов по времени ($n=0,20,40,59$)

Заключение и перспективы. Таким образом, вычислительные технологии для решения задач обнаружения источников были построены на основе двумерной модели конвекции-диффузии примеси. Алгоритмы решения прямых и сопряженных задач для этой модели были реализованы посредством методов расщепления. Рассмотрены алгоритмы поиска мощностей источников с известными пространственно-временными локализациями на основе фундаментальных решений прямой задачи. Для локализации источников были использованы алгоритмы на основе правой трансформации Гаусса и пересечения линий уровня функций чувствительности результатов измерений к источникам. Проведены численные эксперименты.

Благодарности. Реализацию алгоритмов решения прямых и сопряженных задач провел Идиль Талгатович Битимбаев. Алексей Александрович Бубликов реализовал веб-интерфейс представления данных системы мониторинга и результатов расчетов на карте Усть-Каменогорска. Авторы благодарят за ценные обсуждения Владимира Викторович Пененко, Наталью Федоровну Денисову и Еркена Муксуновича Турганбаева.

Список литературы

- [1] Корешков Г.Л. Центр экологической безопасности: ответственность за решение проблем / Экосфера.- 2012.- № 12.- С. 25- 29.
- [2] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Москва: Наука.- 1982.- С. 320.
- [3] Pudykiewicz J.A. Application of adjoint tracer transport equation for evaluating source parameters // Atmospheric Environment.- 1998 .- V.32 .- № 17.- P. 3039– 3050.

-
- [4] Агошков В.И. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущения в задаче об оптимальных траекториях // Вычислительная математика и математическое моделирование.- 2000.- ИБМ РАН, Москва.- С. 36– 53.
- [5] Penenko, V., A. Baklanov and E. Tsvetova Methods of sensitivity theory and inverse modeling for estimation of source term // Future Generation Computer Systems, 2002, 18, pp. 661– 671.
- [6] Issartel J.P. Rebuilding source of linear tracers after atmospheric concentration measurements // Atmos. Chem. Phys. Discuss.- 2003.- № 3.- P.3173 –3203 .
- [7] Issartel J.P. Emergence of a tracer source from air concentration measurements, a new strategy for linear assimilation // Atmos. Chem. Phys., 5 , 2005 , 249 –273
- [8] Krysta M. Source reconstruction for accidental releases of radionuclides / M. Krysta, M. Bocquet, N.Quelo // In Air,Water and Soil Quality Modelling for Risk and Impact Assessment.- Springer.- 2007 .- P.153 –161 .
- [9] Hamdi, A. The recovery of a time-dependent point source in a linear transport equation: application to surface water pollution // Inverse Problems.- 2009 .- V.25 .- P.1 –18 .
- [10] El Badia A. Identification of multiple moving pollution sources in surface waters or atmospheric media with boundary observations / A. Badia, T. Ha-Duong and Hamdi // Inverse Problems.- 2012 .- V.28 .- P.2 –22 .
- [11] Sharan M., Issartel J.-P., Singh S.-K. A point-source reconstruction from concentration measurements in low-wind stable conditions // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Volume 138, Issue 668, pages 1884– 1894, October 2012 Part A
- [12] Penenko, A. Localization of point emission source systems for advection-diffusion equation in DMI. Scientific Report 08- 05 Enviro-RISKS: Man-induced Environmental Risks: Monitoring, Management and Remediation of Man-made Changes in Siberia (eds. Alexander Baklanov and Evgeny Gordov, Editors). Volume 2 : Atmospheric Pollution and Risk. Copenhagen 2008.
- [13] <http://export.yandex.ru/weather-ng/forecasts/36403.xml>
- [14] Пененко В.В. Модели и методы для задач охраны окружающей среды / В.В. Пененко, А.Е. Алоян. – Новосибирск: Наука, 1985. – 254 с.
- [15] Пененко В.В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики.- 1975.- С. 61- 76.
- [16] Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов Гидрометиздат.- 1981. Ленинград - 352 с.
- [17] Пененко А.В. Обнаружение источников загрязнений с помощью вариационных методов. Выч. Тех. 2008 V. 13. Спец.выпуск ч. 3 44– 50
- [18] Пененко В.В. Технологии численного моделирования. Вариационные принципы в природо-охранном прогнозировании В.В. Пененко, А.В. Пененко // методические указания. МОиН РК, ВКГТУ им. Д. Серикбаева. - Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2011.

УДК 629.78

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАТЧИКОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

З.Б. Ракишева, А.С. Сухенко

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

Abstract. Determination of current orientation parameters of the satellite is one of the basic conditions for its successful operation. Various orientation sensors are used for this purpose. In this article it are discussed the most common orientation sensors of small satellites and their mathematical models.

Keywords: small satellite, orientation sensors, mathematical model.

Аңдатпа. Ғарыштық аппаратының бағдарлауының анықтайтын параметрдің ұйғарымы оның табысты жұмысының бір негізгі шарттардан болып табылады. Бұл нәтижеге жету үшін әртүрлі бағдарлауының датчиктер қолданылады. Бұл статьяда әртүрлі белгілі кіші ғарыштық аппараттардың анықтайтын бағдарлауының датчиктер және олардың математикалық модельдері қарастырылады.

Кілттік сөздер: кіші ғарыштық аппарат, бағдарлаудың датчиктер, математикалық модель.

Аннотация. Определение текущих параметров ориентации космического аппарата является одним из основных условий его успешного функционирования. Для этих целей используются различные датчики ориентации. В статье рассматриваются наиболее распространенные датчики ориентации малых космических аппаратов и их математические модели.

Ключевые слова: малый космический аппарат, датчики ориентации, математическая модель.

Введение. Для решения задачи управления малым космическим аппаратом (МКА) необходимо знать его параметры ориентации относительно заданной системы координат. Параметры ориентации МКА определяются с помощью данных бортовых датчиков, таких как солнечный датчик, датчик горизонта Земли, звёздный датчик, магнитометр, датчик угловой скорости.

Набор датчиков ориентации, используемых на МКА, напрямую зависит от его миссии. В основном все перечисленные датчики в полном составе используются на МКА массой от 40 до 100 кг, несущие в качестве полезной нагрузки научную аппаратуру для исследования Земли и ее атмосферы (FASat-Bravo, Компас-2), аппаратуру для отслеживания пожаров и исследования растительного покрова Земли (BIRD), технологическую нагрузку (Можаец-4, PROBA-1), аппаратуру для исследования электромагнитного поля Земли (Колибри). Для МКА научно-образовательного назначения весом от 1 до 2 кг (CubeSat XI-IV) достаточно использование одного магнитного датчика для определения ориентации МКА.

Если не рассматривать привязку к миссии МКА и его назначению, наиболее распространенными датчиками ориентации, позволяющими получить полную информацию об ориентации МКА и его угловой скорости, являются солнечные датчики, магнитные датчики и гироскопические датчики.

Солнечные датчики дают в качестве выходных параметров два угла, характеризующих положение вектора направления на Солнце. При разработке МКА используются в основном двухосные щелевые цифровые датчики.

Выходными параметрами магнитных датчиков являются компоненты вектора магнитной индукции. Магнитные датчики, используемые на МКА - это трехосные или одноосные аналоговые феррозондовые магнитные датчики.

Для кратковременного определения ориентации на МКА используются гироскопические датчики, выходными параметрами которых является угловая скорость и угловое положение МКА. Самыми распространенными гироскопическими датчиками на МКА являются микромеханические цифровые одноосные или трехосные датчики.

В данной статье будут рассмотрены математические модели приведенных выше датчиков, которые могут быть использованы для разработки имитационных моделей систем определения и управления ориентацией МКА, для отработки методов оценки и определения ориентации и законов управления с обратной связью МКА.

Математическая модель солнечного датчика. Рассмотрим математическую модель цифрового двухосного щелевого солнечного датчика, который состоит из двух щелевых элементов А и В, расположенных перпендикулярно, детекторов и измерительных сеток (рисунок 1)[1].

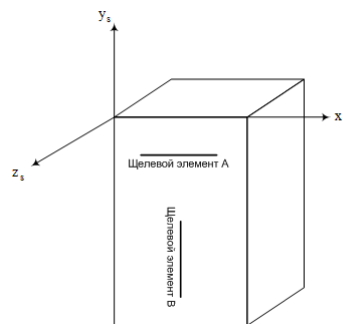


Рисунок 1 Схема щелевого двухосного солнечного датчика

В большинстве случаев двухосный щелевой датчик устанавливается на МКА таким образом, что щелевые элементы А и В параллельны осям x, y связанной системы координат МКА. Ось z перпендикулярна элементам А и В. Введем систему координат $Ox_s y_s z_s$, связанную с датчиком. Ось x_s параллельна щелевому элементу А, ось y_s параллельна щелевому элементу В, ось z_s является осью визирования солнечного датчика. Геометрическая модель двухосного солнечного датчика приведена на рисунке 2. OP - падающий луч Солнца, OP' - преломленный луч, ось z_s является осью визирования для обоих щелевых элементов. Принцип работы датчика: преломленный луч OP , отраженный от пластинки с коэффициентом отражения n , фиксируется на измерительной сетке в точке с координатами (a, b) . В результате детектор датчика в зависимости от шаблона сетки дает на выход цифровой сигнал N , пропорциональный смещению преломленного луча x [1, 2]:

$$x = kN, \quad (1)$$

где x - смещение преломленного луча; k - шаг измерительной сетки; N - выходной цифровой сигнал датчика.

Так как щелевых элементов в нашем случае два, то выходными параметрами для щелевых



где k_m - константа датчика; $int(x)$ - функция, определяющая целую часть от x .

Математическая модель магнитного датчика. Рассмотрим математическую модель трехосного феррозондового аналогового магнитного датчика. Данный магнитный датчик состоит из магниточувствительного элемента феррозонда - электрической катушки с сердечником из магнитомягкого материала, питаемой переменным током. Принцип работы датчика базируется на чувствительности катушки к величине и направлению внешнего магнитного поля [2]. Выходным параметром датчика является напряжение электрической катушки в соответствии с осью вдоль, которой она установлена, и значением компоненты магнитного поля:

$$V_i = a\vec{H} + V_0, i = 1 \dots 3 \quad (9)$$

где V_i - напряжение i -ой катушки (так как датчик трехосный, то всего катушек три); a - коэффициент масштабирования датчика; $\vec{H} = [H_x, H_y, H_z]$ - вектор компонент магнитного поля Земли. На основе выходного напряжения несложно рассчитать интенсивность магнитного поля Земли или магнитную индукцию:

$$\vec{H} = \frac{V_i - V_0}{a}, i = 1 \dots 3 \quad (10)$$

Напряженность определяется из связи между напряженностью магнитного поля Земли и магнитной индукцией:

$$\vec{E} = \frac{\vec{H}}{\mu\mu_0} \quad (11)$$

где $\vec{E}$ - напряженность магнитного поля; μ - магнитная проницаемость датчика, при вакууме $\mu = 1$; μ_0 - магнитная постоянная, $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$ мкГ/сек²А². Для моделирования цифровых выходных параметров магнитного датчика могут быть использованы соотношения [1]:

$$N_V = \text{int}\{c[a\vec{H} + V_0] + 0.5\}, \quad (12)$$

где k - коэффициент преобразования между аналоговыми и цифровыми параметрами; $\text{int}(x)$ - функция, определяющая целую часть от x .

Математическая модель гироскопического датчика. Рассмотрим математическую модель цифрового микромеханического трехосного гироскопического датчика, которые разрабатываются как электрически управляемые резонаторы, часто выполняемые из кристалла кварца или кремния. Их работа основывается на теории, что в случае возникновения угловой скорости возникает сила Кориолиса. Данная сила, пропорциональная угловым скоростям, вызывает механические напряжения сдвига вдоль оси чувствительного элемента, в результате чего возникают перемещения в кристалле, которые и измеряются [3]. Выходным параметром датчика является угловая скорость МКА, которая пропорциональна угловому смещению:

$$\omega_i^c = K\theta_i, i = 1 \dots 3, \quad (13)$$

где ω_i^c - расчетная угловая скорость МКА в зависимости от оси; K - коэффициент масштабирования датчика; θ - угловое смещение МКА.

Истинная угловая скорость МКА зависит от расчетной угловой скорости в соответствии с соотношением:

$$\omega_i^c = (1 + k_i)\omega_i + b_i + n_i, i = 1 \dots 3, \quad (14)$$

где ω_i - истинная угловая скорость МКА; k_i - поправка к коэффициенту масштабирования; b_i -

скорость дрейфа; n_i - белый шум датчика.

Если ввести единичный вектор $\vec{U}_{1 \times 3}$, орты которого направлены вдоль осей МКА, тогда выражение (14) для истинной угловой скорости МКА примет вид:

$$\omega_i^c = (1 + k_i)U_i\omega + b_i + n_i, i = 1 \dots 3, \quad (15)$$

Заключение. В данной статье рассматривались датчики определения ориентации, часто применяемые на МКА различного назначения - щелевой двухосный солнечный датчик, магнитный трехосный датчик, гироскопический трехосный датчик. Приведены математические модели перечисленных датчиков. Полученные математические модели могут быть использованы для разработки имитационных моделей систем определения и управления ориентацией МКА, для отработки методов оценки и определения ориентации, а также законов управления с обратной связью.

Список литературы

- [1] Attitude determination and control. / edited by James R. Wertz. - Kluwer academic publishers, Dordrecht/Boston/London 1990, ISBN - 90-277- 0959 - 9 - 882 p.
- [2] Jens Gisselman Development of an active magnetic attitude determination and control system for picosatellites of highly inclined circular low Earth orbits [Текст] / Jens Gisselman - Thesis for master degree in engineering, RMIT University, June 2006. – Melbourne, Australia, 2006 - 191 p.
- [3] Карпенко О.С. Средства определения ориентации на борту малого КА. - МГТУ им. Баумана Молодежный космический центр, Москва 2011 - 16 с

УДК 681.324

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗИ ПОНЯТИЙ ДИСЦИПЛИН

К.М. Сагиндыков

Казахский университет экономики, финансов и международной торговли

Abstract. In work key parameters of quality of training of specialists are defined. To be brought the equation defining dependences of quantity and quality of associative communications of concepts and statistical characteristics of a not to remember of a material of a subject. Temporary communications of concepts are investigated.

Keywords: training of specialists, communication of concepts, memorization.

Аңдатпа. Жұмыста маманды дайындау сапасының негізгі көрсеткіштері анықталған. Түсініктердің тұрақтылығын анықтайтын теңдеу құрылып, олардың өзара қатынастарының уақытқа байланысты өзгеруі зерттелген.

Кілттік сөздер: мамандарды дайындау, ұғымдардың байланысы, есте сақтау.

Аннотация. В работе определяются основные параметры качества подготовки специалистов. Приводится уравнение, определяющее зависимости количества и качества ассоциативных связей понятий и статистических характеристик забывании материала предмета. Исследованы временные связи понятий.

Ключевые слова: подготовка специалистов, связь понятий, запоминание.

Введение. Под качеством специалистов, выпускаемых вузами, будем понимать некоторую систему свойств специалистов, которая определяет собой их пригодность для удовлетворения общественных потребностей [1].

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_k\} \quad (1)$$

где s_i - некоторое свойство, умение специалиста.

Вуз обеспечивает соответствие выпускаемых специалистов системе основных требований, заложенных в директивных документах: моделях личности специалиста, учебных планах и программах. Причем качество выпускаемых специалистов определяется качеством их подготовки. По результатам исследования можно сделать вывод, что основными факторами, влияющими на качество выпускаемых специалистов, являются содержание и структура учебного материала, методы обучения и материально-техническая база процесса обучения. На процесс осмысленного запоминания влияют такие факторы, как структура материала, образование ассоциативных связей между понятиями, частота использования понятий. Но не только логичность изложения влияет на запоминание материала. Весь процесс описывается уравнением:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, t) = A_0(1 - e^{-t\lambda_1})e^{-t\lambda_2} \quad (2)$$

где λ_1 и λ_2 – параметры, зависящие от количества и качества ассоциативных связей и статистических характеристик забывания. При $t \rightarrow \infty$ функция $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, t) \rightarrow 0$, что соответствует полному забыванию информации по истечении достаточно большого промежутка времени.

Методы. Важную роль в запоминании играет периодическое повторение информации. Последнее происходит в ходе самостоятельной работы, на лабораторных и практических занятиях, а также при неоднократных ссылках лекторов на знакомый материал. Опытным путем установлено, что материал успешно вспоминается, если объем оставшейся в памяти информации не меньше 0.7 от первоначальной: $\varphi \geq 0.7\varphi_0$. Время, через которое в памяти остается меньший объем информации, зависит от параметров информации, но ясно одно: чем меньше время между повторениями информации, тем прочнее усваивается пройденный материал и новый материал на основе создания ассоциативных связей в понимании обучаемого.

Результаты. Анализируя Рисунок 1 можно заметить, что, если для изложения понятия j требуется понятие i , то в какой-либо момент времени t_2 через время t_1 после изложения понятия i оно становится недоступно для восприятия, т.к. в памяти обучаемого осталось менее 0,7 от первоначального объема информации.

Если существует однократное повторение материала, то кривая будет иметь следующий вид, представленный на Рисунке 2. При многократном повторении, в результате образования устойчивых ассоциативных связей, кривая может быть приблизительно аппроксимирована пунктирной кривой на Рисунке 3.

Заключение. По результатам исследования можно сделать вывод: чем меньшим промежутком времени будут разделены связанные между собой понятия, тем это лучше для усвоения

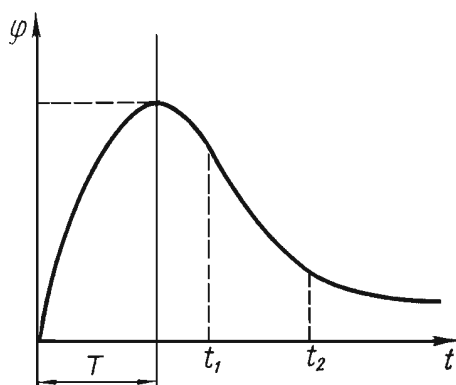


Рисунок 1 Кривая периодического повторения информации

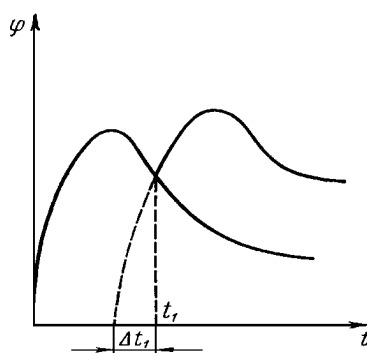


Рисунок 2 Кривая однократного повторения материала

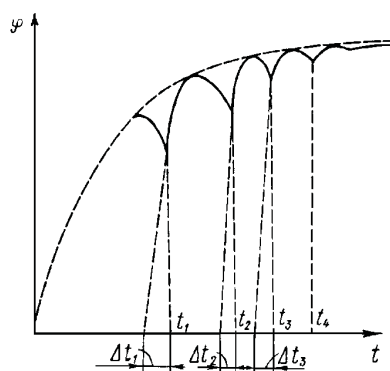


Рисунок 3 Кривая многократного повторения материала

материала.

Список литературы

- [1] Сагиндыков К.М. Факторы, влияющие на качество подготовки специалиста // Материалы республиканской научной конференции «Моделирование механических систем и процессов», Караганда, 2007. С-237.

УДК 519.711

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ДЛЯ КАТАЛИЗАТОРОВ

М.А. Саденова, С.А. Абдулина, М.Е. Утегенова, Е.О. Акижанов, Б.С. Кенетбаев

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

В настоящее время, в связи с остро поставленной проблемой экологии окружающей среды, развитие химико-технологических производственных систем направлено на создание безотходных, эксплуатационно- и экологически безопасных технологий, оснащенных надежными программными комплексами моделирования различных технологических процессов. Создание программно-вычислительных комплексов на основе математических моделей различных физико-химических процессов для прогнозирования и оценки показателей качества продукции, управления технологическими процессами, определения наилучших технологических режимов, исследования технологий получения новых видов материалов является сегодня одним из динамично развивающихся направлений в технологических процессах [1].

Наиболее важным при разработке технологии опытно-промышленного производства носителей для катализаторов становится исследовательская деятельность с целью создания материалов, обладающих высокой активностью и устойчивых в работе при их эксплуатации. Сложность управления и исследования свойств различных типов катализаторов обусловлена высокой стоимостью сырья, чувствительностью к возникновению брака при выборе управляющих воздействий, разнородностью и многообразием физико-химических процессов переработки сырья и материалов. Одной из важнейших задач является обработка и анализ экспериментальных данных, что зачастую представляет серьезную проблему из-за большого объема данных, сложных методов их обработки и интерпретации результатов. В связи с этим актуальным представляется создание математических моделей и программных средств для исследовательских целей, а затем и для управления технологической линией на отдельных стадиях, что позволяет повысить информативность и эффективность процесса.

Одной из основных проблем, препятствующих широкому использованию катализаторов для очистки газов промышленных предприятий, наряду с их высокой стоимостью является недолговечность. В связи с этим и с интенсификацией технологических процессов в химической промышленности, механическая прочность и износостойкость сорбентов, катализаторов и их носителей приобретает все большее значение.

При выполнении работы использованы методы математического моделирования, позволяющие определить зависимость показателей качества продукции от показателей качества сырья и параметров технологического процесса, повысить достоверность контроля качества продукции и снизить затраты на его проведение, стабилизировать качество выпускаемой продукции, увеличить выпуск годной продукции, сократить число проводимых анализов качества продукции.

Планирование эксперимента и другие статистические методы эффективны при поисковых исследованиях, когда механизм технологического или физико-химического процесса точно не известен. Это объясняется тем, что при разработке, носители могут быть подвержены воздействию

неопределенных, случайных факторов, поэтому значения функций полезности могут быть оценены лишь вероятностно [2].

В практической деятельности часто требуется оценить параметры некоторой системы, то есть построить её математическую модель и найти численные значения параметров этой модели. В качестве исходных данных для построения модели служат результаты эксперимента, который представляет собой совокупность нескольких измерений, выполненных по определённому плану. В простейшем случае план является описанием условий проведения измерений, то есть значения входных параметров (факторов) во время измерения [3,4].

Для разработки рациональных методов приготовления носителей катализаторов необходимо иметь ясное представление о том, каким образом метод приготовления влияет на параметр прочности.

Известно, что для очистки, газов ТЭЦ предпочтительнее использовать блочные или гранулированные катализаторы. В качестве носителей для катализаторов применяются оксид алюминия, силикагель, высокопористые и ячеистые материалы, керамика, а также природные материалы (глина, цеолиты) и др. [5].

Данная работа основана на результатах технологии изготовления носителей катализаторов в виде таблеток при варьировании составом, влажностью пластической массы, давлением прессования и температуры спекания.

Для оптимизации механической прочности применяется метод полного факторного эксперимента, в котором реализуются возможные комбинации факторов на двух выбранных для исследования уровнях.

Изготовлена опытная партия образцов носителей катализаторов. Факторы изменяли в интервале $[\phi_i' - \phi_i'']$, с соответствующим шагом варьирования $\pm h$

- состав (50 - 70% цеолита);
- давление прессования в интервале 500 - 1500 кг;
- температуру прокаливания в интервале 500 - 1000 °С;
- при заданной влажности в интервале от 15 до 20%.

Уравнение регрессии с учетом парных взаимодействий имеет следующий вид:

$$y = v_0 + v_{11} + v_{22} + v_{33} + v_{1212} + v_{1313} + v_{2323} + v_{123123} \quad (1)$$

где y – функция отклика;

x_i – факторы;

v_i – коэффициенты регрессии.

В результате полного факторного эксперимента получены уравнения регрессии:

- для влажности 15%

$$y = 10.4 - 3.59x_1 + 0.71x_2 + 4.69x_3 - 0.6612 - 1.99x_1x_3 \quad (2)$$

- для влажности 17,5%

$$y = 11.2 - 2.88x_1 + 0.6x_2 + 4.08x_3 + 1.38x_2x_3 \quad (3)$$

– для влажности 20%

$$y = 9.21 - 2.41x_1 - 0.79x_2 + 1.76x_3 + 3.3612 + 1.9613 + 2.11x_2x_3 \quad (4)$$

Интерпретация уравнения 2 позволяет утверждать, что увеличение давления прессования, а также температуры прокаливания приводят к увеличению значения механической прочности, соответственно увеличение доли цеолита приводит к уменьшению механической прочности. При парном взаимодействии данных факторов, чтобы достичь увеличения механической прочности необходимо уменьшать массовую долю цеолита с одновременным увеличением давления прессования и температуры прокаливания.

Для влажности 17,5% показатель механической прочности также с увеличением давления прессования и температуры спекания возрастает и уменьшается с увеличением доли цеолита.

Из уравнения 4 видно, что увеличение содержания цеолита и давления прессования приводит к уменьшению прочности, а увеличение температуры прокаливания, и также увеличение температуры прокаливания с одновременным уменьшением цеолита в процентном содержании масс и давления прессования приведет к увеличению механической прочности.

Регрессионный анализ уравнений (2) – (4) подтвердил их адекватность. Соответствующие математические модели в натуральных переменных имеют следующий вид:

$$y = 0.37u_1 + 9.34 * 10^{-3}u_2 + 6.65 * 10^{-2}u_3 - 1.32 * 10^{-4}u_1u_2 - 7.96 * 10^{-4}u_1u_3 - 27.55 \quad (5)$$

$$y = 23.32 - 0.288u_1 - 7.1 * 10^{-3}u_2 + 0.53 * 10^{-2}u_3 + 1.1 * 10^{-5}u_2u_3 \quad (6)$$

$$y = 0.37u_1 + 9.34 * 10^{-3}u_2 + 6.65 * 10^{-2}u_3 - 1.32 * 10^{-4}u_1u_2 - 7.96 * 10^{-4}u_1u_3 - 27.55 \quad (7)$$

Уравнения (5) – (7) позволяют определить механическую прочность носителей как функцию T , P и w в изученном факторном пространстве реальных значений факторов.

Таким образом, статистические методы оценивают одновременно влияние всех факторов, действующих при данной обработке. Современную науку невозможно представить без применения графических методов, они прочно вошли в арсенал средств научного общения и в методику научного исследования.

Список литературы

- [1] Новожилова И. В. Программный комплекс для моделирования процессов получения сорбентов и катализаторов гибкого многоассортиментного производства, Дисс. канд. техн. наук, 2008.
- [2] <http://www.ngpedia.ru/id021294p1.html>
- [3] <http://www.pandia.ru/text/77/258/61078.php>
- [4] <http://www.chemport.ru/data/chemipedia/article2855.html>
- [5] Научные основы подбора и производства катализаторов, М.: Наука, 1964

УДК 004

ВОЗМОЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОГРАММНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА «COMSOL MULTIPHYSICS»

И.Н. Сайфутдинов

ТОО «RAM Trade company», г. Алматы, Республика Казахстан

Abstract. Computer simulation is becoming an integral part of modern progress. Today, it is impossible to imagine the development of a product without the use of modern information technology. This paper describes the capabilities of computer simulation as an example of software and computing complex «Comsol Multiphysics», in which the simulation is based on the finite element method. Shows in detail the functionality of one of the modules of the complex modulus geomechanics.

Key words: geomechanics, complex «Comsol Multiphysics»

Аңдатпа. Компьютерлік модельдеу қазіргі ғылыми-техникалық ілгерілеуде өте маңызды рөлді ойнайды. Бүгін көрінген бұйымның зерттемесі ақпараттық технологияның қолданысымен мүмкіндігісіз. Айтылмыш мақалада компьютерлік модельдеудің мүмкіндіктері бағдарламалық-есептеуші "Comsol Multiphysics" деген кешеннің мысалында бейнеленеді, модельдеу нешіншіде ақырғы элементтің әдісінде негіздейді. Егжей-тегжей геомеханиканың модульсының айтылмыш кешенінің модульдарынан деген бірдың функциялық мүмкіндіктері бой көрсетеді.

Кілттік сөздер: геомеханика, "Comsol Multiphysics" кешені

Аннотация. Компьютерное моделирование становится неотъемлемой частью современного прогресса. Сегодня уже невозможно представить разработку какого-либо изделия без применения современных информационных технологий. В данной статье описываются возможности компьютерного моделирования на примере программно-вычислительного комплекса «Comsol Multiphysics», моделирование в котором основывается на методе конечных элементов. Подробно показываются функциональные возможности одного из модулей данного комплекса модуля геомеханики.

Ключевые слова: геомеханика, комплекс «Comsol Multiphysics»

Компьютерное моделирование становится неотъемлемой частью современного прогресса. Сегодня уже невозможно представить разработку какого-либо изделия без применения современных информационных технологий. Это объясняется несколькими факторами, во-первых, компьютерное моделирование позволяет сокращать финансовые затраты на разработку изделия в 6-7 раз, во-вторых, показатели затраты времени во много раз меньше чем при создании реальных прототипов. Метод компьютерного моделирования широко используется для оптимизации производственных процессов с целью понижения энерго- и ресурсоемкости выпускаемой продукции, улучшения ее потребительских качеств и, в конечном итоге, повышение конкурентоспособности продукции предприятий. Математическое моделирование позволяет снизить стоимости проведения опытно-конструкторских работ за счет отказа от изготовления дорогостоящих прототипов на ранних стадиях разработки. Также одной из причин использования данных технологий можно

назвать тенденции мирового хозяйства к расчетливому и эффективному использованию ресурсов. Это и понятно, так как потребности человечества растут, а ресурсы ограничены в своем количестве, и в большинстве своем невосполнимы. С технологической точки зрения, в моделировании посредством информационных технологий можно выделить следующие преимущества:

- Более эффективные и прибыльные варианты технологического процесса и параметры работы установок;
- Обеспечение соответствия требованиям охраны окружающей среды;
- Достижение постоянного и высокого качества продукции;
- Налаживание производственного процесса;
- Определение и устранение факторов, мешающих повышению прибыльности производства и технологии;
- Обеспечение безопасности работы установки;
- Анализ текущих технологических регламентов, оптимизирование работы операторов;
- Осуществление мониторинга текущего процесса;
- Выполнение оптимизации в реальном времени.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что принципы компьютерного моделирования полностью отвечают запросам современного общества и идеологии, так называемой, «зеленой» экономики. Поэтому, можно с уверенностью сказать, что технологии компьютерного моделирования не только не потеряют свои позиции, но и укрепят свои позиции в науке, образовании и промышленности. В данной статье, мы более подробно рассмотрим основы компьютерного моделирования на примере всемирно известного программного комплекса «Comsol Multiphysics» и нескольких его модулей.

COMSOL Multiphysics - это мощная интерактивная среда для моделирования и расчетов большинства научных и инженерных задач основанных на дифференциальных уравнениях в частных производных (PDE) методом конечных элементов. Разработчиком данного программного комплекса является шведская компания «Comsol Inc», первоначально данный программный пакет являлся одним из модулей системы компьютерной алгебры Matlab и назывался Femlab. Он мог работать только при запущенном Matlab и позволял обмениваться с ним данными. Сегодня Comsol Multiphysics - это уже не просто модуль, это мощнейшая система, позволяющая решать практически любые краевые задачи методом конечных элементов. Последнее возможно благодаря тому, что Comsol дает возможность пользователям самостоятельно задавать уравнения, описывающие тот или иной процесс, а также ставить краевые условия в привычных для математиков и механиков формах Дирихле и Неймана. Богатая библиотека материалов и широкие возможности задания своих собственных материалов делают возможности программы еще шире. Comsol Multiphysics позволяет создавать треугольные, четырехугольные, тетраэдрические и гексаэдрические вычислительные сетки. Сеточный генератор достаточно хорошо работает со сложной геометрией и имеет множество функций по улучшению сеток. В отличие от других подобных пакетов в Comsol Multiphysics выбор конечного элемента не означает выбор уравнений, моделирующих процесс. Здесь элемент - число геометрическая фигура, позволяющая разбить

исследуемую область на подобласти. Мощный и в то же время интуитивно понятный постпроцессор обладает всеми необходимыми функциями и параметрами для визуализации и обработки расчетных числовых данных.

Этот программный пакет дает возможность расширять стандартные модели, использующие одно дифференциальное уравнение (прикладной режим) в мультифизические модели для расчета связанных между собой физических явлений. Расчет не требует глубокого знания математической физики и метода конечных элементов. Это возможно благодаря встроенным физическим режимам, где коэффициенты PDE задаются в виде понятных физических свойств и условий, таких как: теплопроводность, теплоемкость, коэффициент теплоотдачи, объемная мощность и т.п. в зависимости от выбранного физического раздела. Преобразование этих параметров в коэффициенты математических уравнений происходит автоматически. Взаимодействие с программой возможно стандартным способом – через графический интерфейс пользователя (GUI), либо программированием с помощью скриптов на языке COMSOL Script или языке MATLAB.

Для решения PDE, COMSOL Multiphysics использует метод конечных элементов (FEM). Программное обеспечение запускает конечно-элементный анализ вместе с сеткой, учитывающей геометрическую конфигурацию тел, и контролем ошибок с использованием разнообразных численных решателей. Так как многие физические законы выражаются в форме PDE, становится возможным моделировать широкий спектр научных и инженерных явлений из многих областей физики таких как: акустика, химические реакции, диффузия, электромагнетизм, гидродинамика, фильтрация, тепломассоперенос, оптика, квантовая механика, полупроводниковые устройства, сопломат и многих других.

Для более подробного представления работы данного программного комплекса, опишем функциональные возможности одного из модулей COMSOL Multiphysics - модуль геомеханики (Geomechanics). Модуль «Geomechanics» позволяет растущему сообществу пользователей COMSOL Multiphysics увеличивать свои возможности в решении геотехнических задач и задач гражданского строительства, таких как оценка устойчивости откосов, прогнозирование разрушения тоннелей и подпорных стенок. Модуль «Geomechanics» позволяет изучать пластичность, деформацию и разрушение грунтов и горных пород, в том числе в случае взаимодействия с бетонными созданными человеком сооружениями. Данный модуль поставляется с библиотекой моделей материалов и поддерживает решение мульти дисциплинарных задач с применением бесшовной интеграции с другими модулями COMSOL.

«Пользователи COMSOL, работающие в геотехнической области, уже давно применяют продукты COMSOL для задач, связанных с электричеством, магнетизмом, и подземными течениями, таких как индукционный каротаж, фильтрация атмосферных осадков, загрязнение грунтовых вод. Это подтолкнуло нас к тому, чтобы начать разработку специализированного геомеханического инструмента, – говорит доктор Эд Гонзалес (Dr. Ed Gonzalez), один из менеджеров в компании COMSOL. – В модуль Geomechanics включены модели материалов, широко применяемые в данной области: модель Cam-Clay, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb и Ottosen. Модуль Geomechanics может также работать в паре с модулем Subsurface Flow».

Механика грунтов.

Почва, как упругий материал, ведет себя иначе, чем, например, сталь. В случае сжатия грунт может выдерживать большие нагрузки, однако в случае сдвига небольшая нагрузка может привести к существенным деформациям. Традиционные модели неприменимы при моделировании и анализе подобных явлений. Модуль Geomechanics, в свою очередь, комплектуется набором слож-

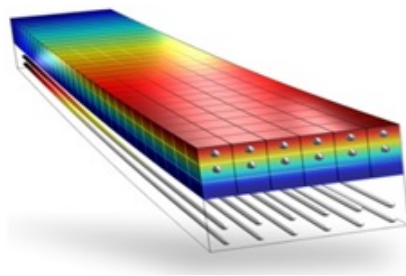


Рисунок 1 На иллюстрации приведены эквивалентные по Мизесу напряжения в бетонной балке, усиленной стальными стержнями, и осевые напряжения в стержнях, возникающие при разрушении балки в ходе растяжения

ных моделей материалов, описывающих поведение грунтов, в частности, внутреннее трение и сцепление частиц почвы. Эти модели (Cam-Clay, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Matsuoka-Nakai и Lade-Duncan), могут быть использованы при оценке устойчивости откосов, подпорных стенок и других подобных сооружений.

Механика бетона и горных пород.

Модуль Geomechanics также поставляется с набором инструментов для моделирования механики горных пород и бетона. Встроенные модели Willam-Warnke, Bresler-Pister, Ottosen и Hoek-Brown могут быть применены или дополнены для описания более широкого спектра хрупких материалов. «Мы знаем, что даже если модуль Geomechanics поставляется со встроенными моделями Willam-Warnke, Bresler-Pister, Ottosen и Hoek-Brown для решения задач, связанных с бетоном и горными породами, наши пользователи найдут пути для того, чтобы применить эти модели и в задачах с другими хрупкими материалами, такими как керамика», – говорит доктор Эд Гонзалез.

Настройка и дополнение.

Кроме встроенных моделей пластичности, в ходе решения задач могут быть применены и создаваемые пользователями законы пластического течения, которые задаются с помощью интерфейса COMSOL Multiphysics. «На самом деле пользователи COMSOL за последние несколько лет самостоятельно создали материалы для решения задач механики горных пород и бетона, – говорит доктор Гонзалез. – Это весомый аргумент в пользу пользовательских equation-based-интерфейсов, ясно демонстрирующий, как они могут быть применены для надстройки новых и модификации существующих моделей материалов. В то же время, встроенные модели позволят пользователям сэкономить время, избежав обращения к уравнениям».

Подземные течения, пороупругость и мультидисциплинарные задачи.

Модуль Geomechanics может быть использован в сочетании с любым из других модулей COMSOL. Одно из наиболее важных сочетаний – с модулем Subsurface Flow, благодаря которому становится возможным решение задач, связанных с пористыми средами, задач пороупругости и других задач.

Кроме того, в связи с тем, что модуль Geomechanics построен на базе модуля Structural Mechanics, пользователи всегда могут мгновенно получить доступ к стандартному функционалу, включая оболочки, балки, фермы, возможность учета температурных напряжений и стандартные модели материалов.

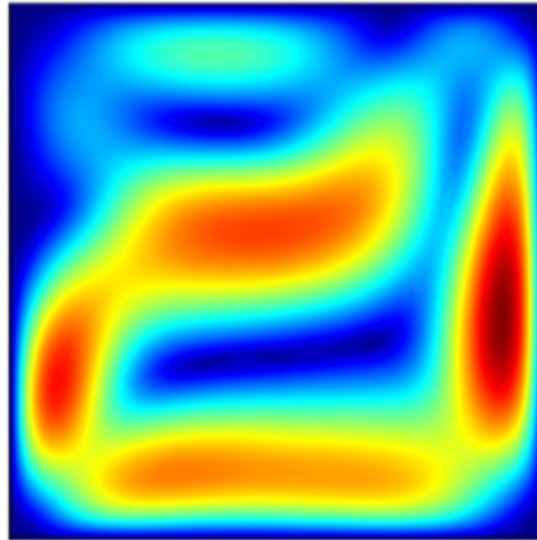


Рисунок 2 На иллюстрации приведено решение задачи о свободной конвекции в пористой среде, модель для которой объединяет в себе заданные через уравнения баланс импульса и баланс энергии

Список литературы

- [1] Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach, 2009, Pryor, Roger W., Jones and Bartlett Publishers, LLC.
- [2] Применение ЭВМ для решения задач теплопроводности (Comsol Multiphysics), 2006, Егоров В.И., СПб ГУ ИТМО.
- [3] Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics, Красников Г.Е., Нагорнов О.В., Старостин Н.В., Москва: МИФИ, 2012.
- [4] Официальный сайт "Comsol Multiphysics": <http://www.comsol.com/products/subsurface-flow/>
- [5] Официальный сайт компании "Humusoft": <http://www.humusoft.cz/produkty/comsol/ru/>

УДК 528

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ЗОНИРОВАНИЯ ТЕРРИТОРИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ГОРОДОВ

В.А. Середович, М.М. Тогузова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. In this article are considered the opportunities of using theme-based 3D cards and modelling of industrial cities for development of zoning system and cadastral valuation.

Keywords: 3D cards, modelling, zoning, cadastral valuation.

Аңдатпа. Бұл мақалада аумақтарға бөлу және жерлерді кадастрлық бағалау жүйесін жетілдеру үшін кадастрда елді мекен аумақтарының 3D карталарын пайдалану мүмкіндіктері қарастырылады.

Кілттік сөздер: 3D карталар, модельдеу, аумақтарға бөлу, кадастрлық бағалау.

Аннотация. В данной статье рассматриваются возможности использования тематических 3D карт территорий населенных пунктов в кадастре для совершенствования системы зонирования и кадастровой оценки земель.

Ключевые слова: 3D карты, моделирование, зонирование, кадастровая оценка.

На современном этапе развития науки и техники требования, предъявляемые к информационному обеспечению задач, претерпевают существенные изменения.

До настоящего времени основное внимание уделялось картам, отображающим окружающее трехмерное пространство в различных двумерных картографических проекциях на плоскости. Это было обусловлено, с одной стороны, относительной простотой построения двумерной ортогональной картографической проекции, а с другой стороны – целым рядом трудностей в построении перспективных карт, обусловленных их особыми свойствами и ограничениями методов сбора первичной топографической информации [1]. Поэтому появляется необходимость применения новых типов картографического обеспечения, в частности, трехмерного представления картографической информации: трехмерных электронных карт местности и электронных макетов местности. При этом технология использования и применения трехмерных карт должна максимально соответствовать традиционным схемам обработки электронного картографического материала, расширяя класс решаемых задач и поднимая на более высокий уровень визуальное представление картографического материала.

Рассмотрим преимущества трехмерного моделирования.

Трехмерное моделирование позволяет создать максимально точную модель объекта, почти идентичную реальному представлению, а современное программное обеспечение позволяет достичь высокой детализации. Специализированные программы дают возможность осуществить интеграцию с другим программным обеспечением. Данные преимущества позволяют значительно сэкономить ресурсы на производстве, расширить возможности и упростить работу.

В настоящий момент система государственного кадастра недвижимости развивается стремительно, которая основывается на применении информационных технологий и предоставлении электронных услуг в режиме «онлайн». В то же время, объекты недвижимости, как земельные участки, так и здания и сооружения, являются объектами пространственными и имеют объем, который невозможно отобразить в современной двумерной проекции.

Действующий двумерный кадастр не позволяет четко увидеть ЛЭП, телевышки, коммуникационные трубы и высотные объекты, то есть практически невозможно осуществить учет таких объектов недвижимости, как дорожные развязки, мосты и туннели, многоуровневые комплексы нестандартной формы, с нависающим вторым, третьим этажом, попадающим на чужую территорию. Один из главных недостатков 2D-кадастра — отсутствие подземных объектов. Подземные объекты, такие как сети метрополитена, коллекторы, тоннели, трубопроводы и т.д. являются важнейшими элементами инфраструктуры городов, однако обозначенная проблема ограничивает возможность регистрации имущественных прав на них и порождает различные имущественные споры.

Вследствие этого данная ситуация обосновывает необходимость развития и использования трехмерного моделирования в кадастре. Актуальность проблемы подтверждается все возрастающей сложностью площадей застройки, подземной и надземной инфраструктуры, увеличением числа операций с недвижимостью и возникновения имущественных интересов (и частных и государства). При этом вполне возможно внедрение трехмерного подхода в других областях (трехмерные геоинформационные системы (ГИС), трехмерное планирование), которые делают трехмерный подход к кадастровому учету технологически осуществимым.

Трехмерное моделирование дает возможность отобразить модели рельефа территории, то есть описать реальную местность, объекты окружающего мира и их взаимное расположение, показать трёхмерные модели зданий с фотографическими текстурами, трёхмерные модели крупных инженерно-технических сооружений и коммуникаций, что позволяет увидеть объекты, которые находятся над или под поверхностью, а также на различных уровнях. Трехмерные модели представляют собой полноценные трехмерные карты, которые позволяют выбирать объекты на модели с целью запроса информации об объекте редактировать их внешний вид и характеристики (семантику), определять координаты объектов, выполнять измерительные и расчётные операции, производить детальную оценку местности в камеральных условиях [2].

В основе моделей могут лежать различные картографические материалы. Планы городов, космические и аэрофотоснимки, крупномасштабные карты, матрицы высот, растровые изображения и другие материалы могут использоваться как отдельно, так и совместно.

Использование трехмерного моделирования в кадастре дает возможность повышения качества учета таких элементов инфраструктуры, как коммуникационные сети и трубопроводы, а также многоуровневых комплексов, многоквартирных домов и других объектов [3].

Таким образом, использование трехмерных моделей в кадастре позволяет решать следующие задачи. Визуализировать в трехмерные модели пространственную информацию в единой системе координат рельефов, различных объектов инфраструктуры, объектов повышенной опасности, являющимися источниками загрязнения окружающей среды, и как следствие, возможность моделирования определения загрязнения окружающей среды с учетом влияния изменения метеопараметров и рельефа городских застроек.

Отображать на пространственных моделях территорий схемы зонирования различного функционального назначения – градостроительного, экологического, кадастрового и т.д. с целью получения достоверной информации о фактическом состоянии и характере распределения земель, а также разработки рекомендаций. Решать задачи МЧС, т.е. предоставлять данные для планирования и организации мероприятий по предупреждению и ликвидации чрезвычайных ситуаций.

Решать задачи предоставления данных в земельные службы, т.е. обеспечивать точными геометрическими параметрами, на которых будут отражены реальные расстояния между элементами и их фактические размеры, составлять карты (планы) по межеванию объектов землеустройства. Выполнять инвентаризацию и учет объектов, помещений, а также площадей, что позволяет более точно рассчитывать экономическую эффективность использования и повысить качество управления объектами. А также позволит более точно рассчитать остаточную, восстановительную стоимость обслуживающих зданий и сооружений.

Использовать полученные данные в дальнейшем, путем нанесения на объекты тематической информации и развития информационной базы, а также создания ГИС путем наращивания информационной базы. Таким образом, трехмерное отображение местности и объектов, размещенных на ней, значительно расширяет возможности кадастрового учета и механизмы обеспечения

прав собственности, возможность совершенствования системы зонирования и кадастровой оценки, а также планирования и проектирования.

Список литературы

- [1] Лисицкий Д.В., Бугаков П.Ю. Картографическая визуализация трехмерных моделей местности // Вестник СГГА. – 2011. – № 16-3. – С. 81-87
- [2] Бугаков, П. Ю. Принципы картографического отображения трехмерных моделей местности // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2012: VIII Междунар. науч. конгр., 10–20 апреля 2012 г., Новосибирск: Междунар. науч. конф. «Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия»: сб. материалов в 3 т. – Новосибирск: СГГА, 2012. – Т. 3 – С. 156–161.
- [3] Khairudinova N.Sh. 3D GIS for registration and designing of real property facilities. Innovative technology for an efficient Geospatial Management of Earth resources: Proceedings of the International Workshop, 3-7 Sept. 2010. – Ust-Kamenogorsk: EKSTU, 2010

УДК 550.36

ОЦЕНКА ДАННЫХ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ ШИАРЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

К.В. Симонов, Л. Кадена

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Abstract. This paper an overview of the basic concepts shearlet transform spatial observations of ecological monitoring are presented. The possibility of a new approach for the analysis of complex geometric images are showed. The elements of computer analysis technique of spatial data based on observations shearlet transform to assess the territorial environmental risk are studied.

Keywords: ecological monitoring, shearlet transform, complex geometric images.

Аннотация. В работе представлен обзор основных понятий шиарлет-преобразования пространственных данных наблюдений экологического мониторинга. Показаны возможности нового подхода для геометрического анализа сложных изображений. Приведены элементы вычислительной методики анализа пространственных данных наблюдений на основе шиарлет-преобразования для оценки территориальных экологических рисков.

Ключевые слова: экологический мониторинг, шиарлет-преобразование, анализ сложных изображений.

В последние годы исследователи в области прикладного гармонического анализа предложили несколько новых подходов, направленных для эффективного представления пространственных данных наблюдений. Эти предложения и подходы основаны на новых результатах в теоретическом гармоническом анализе [1-5].

В работе предлагается обзор нового направления в обработке данных томографии и экологического мониторинга, который может быть использован при диагностике сложных экологических объектов и систем - сдвиговой "геометрический" анализ изображений, где совместно выполняется вейвлет-преобразование данных для "круглых структур" и шиарлет-преобразование для "линейных структур" [6-7].

Отметим, что задаче разделения изображения на морфологически разные составляющие в последнее время уделяют много внимания в связи с её значимостью для различных актуальных приложений [1-4, 12]. Разрабатываемая вычислительная методика для эффективного решения этой задачи может быть применена к широкому кругу областей, в том числе для решения задач визуализации данных диагностики сложных экологических систем с целью оценки территориальных рисков.

И так, в последние годы проведены ряд исследований по проблеме разделения морфологических отличительных черт в пространственных данных. В [11] положено начало этим исследованиям по разложению изображений, в частности, на основе применения вариационных методов. В работе [12] предложен "морфологический анализ компонентов в котором предполагается, что задача разложения может быть разрешима, если есть информация о типе особенностей, которые должны быть извлечены, и при условии, что морфологическая разница между ними достаточно сильна.

В этой связи приведем полученный результат в [2]: для разделения точки и криволинейной особенности теоретически доказано, что l_1 -минимизация решает эту задачу со сколь угодно высокой точностью, изучая и комбинируя вейвлеты и кёрвлеты. Вейвлет-преобразования данных здесь обеспечивают оптимально разложение для точечных структур, а кёрвлеты обеспечивают оптимально разложение для криволинейных структур.

Следовательно, l_1 -минимизация, применяемая к разложению коэффициентов исходного изображения, преобразует точечные структуры в вейвлеты, а криволинейные структуры в кёрвлеты, таким образом, автоматически разделяя изучаемое изображение. Соответствующий алгоритмический подход, использующий вейвлеты и кёрвлеты, реализован в MCSLab [4].

Сравнительно недавно появилась новая система представлений, так называемое шиарлет-преобразование данных [6-10]. Шиарлет-преобразование - это преобразование данных, включающее сдвиг и оператор параллельного переноса, это вейвлет-преобразование, имеющие масштабирование по частоте и параллельный перенос по времени, однако также включающий характеристику направленности, имея дополнительную операцию сдвига.

Операция сдвига, фактически, дает более эффективный подход для изучения направленности, обеспечивая тем самым единую обработку сложных изображений. Далее показывается возможность использования вейвлетов и шиарлетов для разделения точечных и криволинейных особенностей.

Теоретические результаты из [2] показывают также, что они справедливы и для комбинирования вейвлетов и шиарлетов. Кроме того, численные результаты анализа изображений свидетельствуют в пользу алгоритмов разложения, основанных на шиарлетах [6-10]. Расчеты также свидетельствуют, что представленные алгоритмы быстрее и обеспечивает более точное разделение, если, кривизна криволинейной части велика.

Используемый алгоритм включен авторами указанных исследований в доступный инструментарий - в ShearLab [6-7]. При обработке и анализе данных томографии сложных объектов (в многомерных задачах) важные особенности рассматриваемых данных, как правило, сосредото-

чены в многообразиях малых размерностей. Например, при обработке изображений край - это одномерная кривая, на которой интенсивность изображения резко меняется.

Таким образом, в последнее время новая вычислительная методика шиарлет-преобразования пространственных данных [5, 9] предоставила эффективные инструменты для анализа внутренних геометрических черт изображений, использующие анизотропные и направленные оконные функции. При таком подходе, учет направленности достигается за счет применения целых степеней матриц сдвига, а эти операции сохраняют структуру целочисленной решетки, что имеет решающее значение для цифровой реализации. Как уже упоминалось, шиарлет-преобразования порождены параболическим масштабированием, сдвигом и оператором параллельного переноса.

В работе [6-10] предоставлена теория шиарлет-преобразований с компактным носителем, в [7] показано, что большой класс шиарлет-преобразований с компактным носителем обеспечивает оптимальное приближение изображений, управляемое криволинейными структурами [1].

Далее, в среде Матлаб для обработки и анализа изучаемых пространственных данных экологического мониторинга применяется алгоритмическое обеспечение для выполнения непрерывного вейвлет- и шиарлет-преобразований. Рассмотрены ряд примеров, где показаны возможности шиарлет-анализа пространственных данных мониторинга сложных экологических объектов и систем для решения задач анализа рисков ЧС природно-техногенного характера.

В работе рассмотрены принципы построения алгоритма дискретного шиарлет-преобразования, в основе реализации которого лежат быстрые алгоритмы Фурье-преобразования [13-14]. В [14-15, 17] введено непрерывное шиарлет-преобразование, а затем, посредством дискретизации параметров, дискретное шиарлет-преобразование. Рассмотрены шиарлеты на конусе [15], такой подход позволяет получить хорошее разделение горизонтального и вертикального направлений шиарлетов в частотной области.

Авторами разработана вычислительная методика, позволяющая решать задачу обработки пространственных данных экологического мониторинга на основе шиарлет-преобразования (рис. 1-2). В настоящее время вычислительная методика тестируется на пространственно-временных рядах данных наблюдений различных сложных явлений и процессов, связанных с ЧС природно-техногенного характера. Вычислительная методика состоит из несколько этапов (рис. 1):

- подготовительное, исходное изображение форматируется под расчетный шаблон и намечается последовательность расчетных процедур для наиболее оптимального решения поставленной задачи;
- запуск и настройка алгоритмического обеспечения в shearletlab, выбор конкретного алгоритма для поставленной задачи;
- загрузка и обработка исходных изображений для различных расчетных условий в соответствии с поставленной задачей;
- анализ получаемых расчетных изображений в результате шиарлет-преобразования, контрастирование изображения, в итоге получаем атлас расчетных изображений с интерпретацией изучаемого явления. На рисунке 2 представлен пример обработки пространственных данных экологического мониторинга на основе разработанной вычислительной методики.

Резюмируя вышесказанное, приходим к следующим выводам: сдвиговое (шиарлет) преобразование учитывает свойства исследуемой среды, причем математический аппарат, применяемый для анализа сложных пространственных данных тот же для различных физических сред и моделей; сдвиговое преобразование позволяет работать с криволинейными особенностями.

Шиарлет-преобразование хорошо применимо для фиксации регулярности изображения в слож-

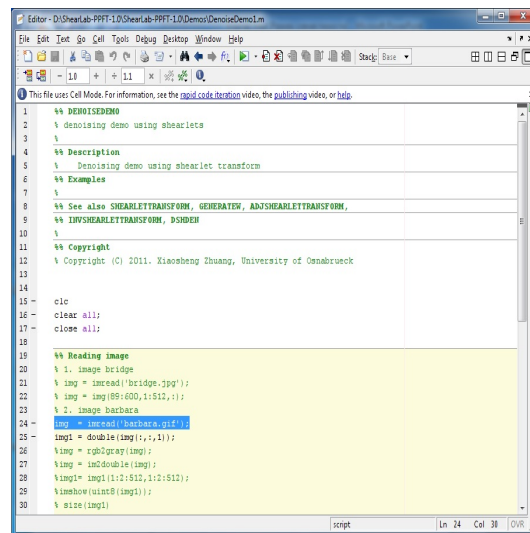
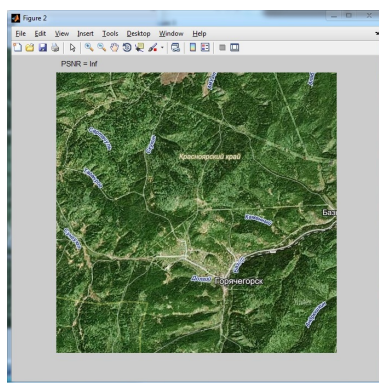
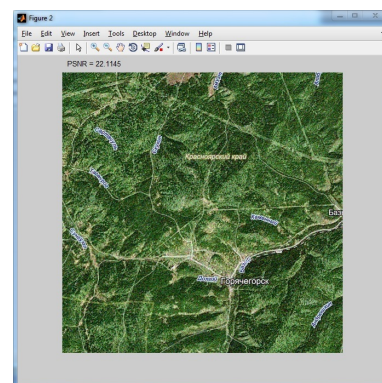


Рисунок 1 Вид соответствующих окон для выполнения расчетов



а) оригинал



б) оригинал обработано шиарлетом

Рисунок 2 Пример шиарлет-преобразования для изучаемого изображения

ных средах, учитывает масштаб, пространство и направление. Шиарлет-преобразование эффективный инструмент для анализа внутренних геометрических черт изображения, использующий анизотропные и направленные оконные функции.

В итоге представлено новое перспективное направление в обработке сложных пространственных данных и изображений экологического мониторинга - сдвиговое преобразование, а также его взаимосвязь с вейвлет-преобразованием.

Данный тип преобразования данных позволяет получить новую геометрическую интерпретацию в процессе обработки пространственно-временных рядов и изображений при диагностике сложных экологических объектов и систем для выявления криволинейных особенностей (сингулярностей) и оценки территориальных рисков ЧС природно-техногенного характера.

Список литературы

- [1] Candes E.J., Donoho D.L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C2 singularities, Comm. Pure and Appl. Math. 56 (2004), 216-266.

-
- [2] Donoho D.L., Kutyniok G. Geometric Separation using a Wavelet-Shearlet Dictionary, SampTA'09 (Marseille, France, 2009), Proc., 2009.
 - [3] Donoho D.L., Maleki A., Shahram M., Stodden V., Ur-Rahman I. Fifteen years of reproducible research in computational harmonic analysis, Comput. Sci. Engrg. 11 (2009), 8-18.
 - [4] Fadilli M.J., Starck J.-L., Elad M., Donoho D.L. MCA Lab: Reproducible research in signal and image decomposition and inpainting. IEEE Comput. Sci. Eng. Mag. 12 (2010), 44-63.
 - [5] Guo K., Kutyniok G., Labate D. Sparse multidimensional representations using anisotropic dilation and shear operators, Wavelets and Splines (Athens, GA, 2005), Nashboro Press, Nashville, TN, 2006, 189-201.
 - [6] Kutyniok G., Lemvig J., Lim W.-Q. Compactly Supported Shearlets, Approximation Theory XIII (San Antonio, TX, 2010), Springer, to appear.
 - [7] Kutyniok G., Lim W.-Q. Compactly supported shearlets are optimally sparse, J. Approx. Theory, to appear.
 - [8] Kutyniok G., Lim W.-Q., Zhuang X. Digital Shearlet Transforms, in: Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data, Springer, New York, to appear.
 - [9] Labate D., Lim W.-Q., Kutyniok G., Weiss G. Sparse multidimensional representation using shearlets, in Wavelets XI, edited by M. Papadakis, A.F. Laine, and M.A. Unser, SPIE Proc., 5914, SPIE, Bellingham, WA, 2005, 254-262.
 - [10] Lim W.-Q. The discrete shearlet transform: A new directional transform and compactly supported shearlet frames, IEEE Trans. Image Proc. 19 (2010), 1166-1180.
 - [11] Meyer Y. Oscillating Patterns in Image processing and nonlinear evolution equations, University Lecture Series, Amer. Math. Soc. 22 (2002).
 - [12] Starck J.-L., Elad M., Donoho D. Image decomposition via the combination of sparse representation and a variational approach, IEEE Trans. Image Proc. 14 (2005), 1570-1582.
 - [13] Hauser S. Fast finite shearlet transform: a tutorial. Preprint University of Kaiserslautern, 2011.
 - [14] Kutyniok G., Guo K., and Labate D. Sparse multidimensional representations using anisotropic dilation and shear operators. Wavelets und Splines (Athens, GA, 2005), G. Chen und MJ Lai, eds., Nashboro Press, Nashville, TN, pages 189-201, 2006.
 - [15] Laugesen R. S., Weaver N., Weiss G. L., and Wilson E. N. A characterization of the higher dimensional groups associated with continuous wavelets. The Journal of Geometrical Analysis, 12(1): 89-102, 2002.
 - [16] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way. Academic Press, San Diego, 2008.
 - [17] Meyer Y. Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations, volume 22. AMS, Providence, 2001.

УДК 519.642.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И ТРАНСФОРМАЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ

К.Е. Сороковая

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

Abstract. Nonstationary mathematical model of aerosols dynamics is considered. It is founded on system of nonlinear integral-differential equations, describing coagulation, condensation, evaporation processes and impurities precipitation according to particles sizes. Numerical scheme for transformation problem solving is presented. The algorithm basis is discrete analytical approximations using fundamental solutions of local adjoint problems.

Keywords: mathematical modeling, aerosol populations, impurities transformation, coagulation, integral-differential equations.

Аннотация. Рассматривается нестационарная математическая модель динамики аэрозольной популяции, основанная на системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих процессы коагуляции, конденсации, испарения и осаждения примесей в зависимости от размеров частиц. Представлена численная схема для решения задачи трансформации аэрозолей в атмосфере. Основу алгоритма составляют дискретно-аналитические аппроксимации с применением фундаментальных решений локальных сопряженных задач.

Ключевые слова: математическое моделирование, аэрозольные популяции, трансформация примесей, коагуляция, интегро-дифференциальные уравнения.

Постановка задачи

Рассматривается задача трансформации аэрозольных примесей в атмосфере в зависимости от размеров частиц с учетом процессов коагуляции, испарения (конденсации) и диффузии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(r,t)}{\partial t} + [\alpha_D(r) + \alpha_S(r)]c(r,t) - \int_0^r K((r^3 - r'^3)^{\frac{1}{3}}, r')c((r^3 - r'^3)^{\frac{1}{3}}, t)c(r, t') \frac{r^2}{(r^3 - r'^3)^{\frac{2}{3}}} dr' + \\ + c(r, t) \int_0^{r_N} K(r, r')c(r', t)dr' + \frac{\partial}{\partial r}(U(r, t)c(r, t)) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(V_D(r, t)c(r, t)) = f(r, t) \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} c(r, t) &\in Q(D_t), D_t = D \times [0; T_{\max}] \\ K(r_i, r_k) &= K_g(r_i, r_k) + K_B(r_i, r_k) \\ K_g(r_i, r_k) &= \pi \varepsilon (r_i + r_k)^2 |U_S(r_i) - U_S(r_k)| \\ K_B(r_i, r_k) &= 4\pi kT(r_i + r_k)(B(r_i) + B(r_k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_D(r) &= kTB(r)A_D/(\delta_D V) \\
\alpha_S(r) &= [4/3\pi\rho r^3 g B(r)A_H]/V \\
U(r) &= \frac{dD_p}{dt} = \frac{4D_i M_i}{RTD_p \rho_p} (P_i - P_{eqi}) Cn(r) \\
V_D(r) &= \frac{U\Delta r}{5} \\
B(r) &= \frac{Cn(r)}{6\pi\eta r} \\
Cn(r) &= 1 + 1,246K_n + 0,42K_n \exp(-\frac{0,87}{K_n}) \\
K_n(r) &= l/r \\
\varepsilon &= 0, 5[\frac{r_i}{r_i+r_k}]^2 \\
U_S(r) &= \frac{2\rho_{eff}g}{9\eta} r^2 Cn(r) \\
f(r, t) &= S(r, t) - Q(r, t)
\end{aligned}$$

Основные этапы работы

Применяем метод расщепления по физическим процессам. Получим два уравнения:

$$\frac{\partial c_1(r, t)}{\partial t} + A c_1(r, t) = f(r, t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial c_2(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(U(r, t)c_2(r, t)) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(V_D(r, t)c_2(r, t)) = 0 \quad (3)$$

I. Коагуляция

В соответствие формуле (2) ставится интегральное тождество:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} + A c(r, t) - F(r, t)) c^*(r, t) dt = 0 \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_D(r) + \alpha_S(r) + \int_0^{r_{\max}} K(r, r') c(r', t) dr' \\
F(r, t) &= \int_0^r K((r^3 - r'^3)^{\frac{1}{3}}, r') c((r^3 - r'^3)^{\frac{1}{3}}, t) c(r, t') \frac{r^2}{(r^3 - r'^3)^{\frac{2}{3}}} dr' + f(r, t) \\
c^*(r, t) &\in Q(D_t)
\end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к тождеству (4), получим:

$$c(r, t) c^*(r, t) \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (-\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} + A c(r, t) c^*(r, t)) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(r, t) c^*(r, t) dt \quad (5)$$

Для упрощения выражения (5) строим локально-сопряженные задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial c^*(r, t)}{\partial t} - A c^*(r, t) = 0 \\ c^*(r, t_{j+1}) = 1 \end{cases} \Rightarrow c^*(r, t) = e^{A(t-t_{j+1})} \quad (6)$$

Аналитическое выражение для концентрации на $j+1$ -ом шаге:

$$c(r, t_{j+1}) = c(r, t_j) c^*(r, t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(r, t) c^*(r, t) dt \quad (7)$$

Аналоги выражения (7), имеющие вид уравнения Фредгольма:

$$c(r, t_{j+1}) = c(r, t_j) e^{A(t_j - t_{j+1})} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(r, t) e^{A(t - t_{j+1})} dt = 0 \quad (8)$$

$$c(r, t_{j+1}) = c(r, t_j) e^{-A\Delta t} + \int_0^{\Delta t} F(r, \tau) e^{-A(\Delta t - \tau)} d\tau = 0 \quad (9)$$

II. Испарение и диффузия

$$\frac{\partial c_i(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(U(r, t) c_i(r, t)) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(V_D(r, t) c_i(r, t)) = 0 \quad (10)$$

Для получения разностной схемы вводим дискретные аналоги производных:

$$\frac{\partial c_i(r, t)}{\partial r} \approx \frac{c_i(r_m, t) - c_i(r_{m-1}, t)}{\Delta r}, \quad U > 0$$

$$\frac{\partial c_i(r, t)}{\partial r} \approx \frac{c_i(r_{m+1}, t) - c_i(r_m, t)}{\Delta r}, \quad U < 0$$

$$\frac{\partial c_i(r, t)}{\partial t} \approx \frac{c_i(r, t_j) - c_i(r, t_{j-1})}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 c_i(r, t)}{\partial r^2} \approx \frac{c_i(r_{i-1}, t) - 2c_i(r_i, t) + c_i(r_{i+1}, t)}{\Delta r^2}$$

Получаем разностную схему первого порядка точности, которую решаем методом трехточечной прогонки.

$$\frac{\partial c_i(r_k, t)}{\partial t} + U(r_k, t) \frac{\partial c_i(r_k, t)}{\partial r} - V_D(r_k, t) \frac{\partial^2 c_i(r_k, t)}{\partial r^2} = f_i(r_k, t) \quad (11)$$

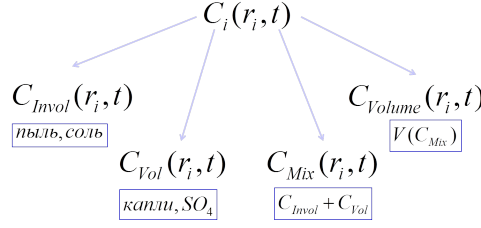
$$i = \{Invol, Vol, Mix, Volume\}$$

$$k = 1, \dots, N_0$$

В результате решения получим окончательное значение концентрации на $(j+1)$ -ом шаге $c_i(r, t_{j+1})$

Многокомпонентная модель

Вводим следующую классификацию аэрозолей в соответствии с работой [5]:



I. Деструкция

$$\int_0^{r_{\max}} K(r_k, r') c(r', t) dr' =: D_k(c) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_k(c_{Invol}) &\approx \sum_{i=1}^{N_0} K(r_i, r_k) (VOLX(r_k, r_j) c_{Invol}(r_i, t) + c_{Vol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)) \Delta r_k \\ D_k(c_{Vol}) &\approx \sum_{i=1}^{N_0} K(r_i, r_k) (c_{Invol}(r_i, t) + VOLX(r_k, r_j) c_{Vol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)) \Delta r_k \\ D_k(c_{Mix, Volume}) &\approx \sum_{i=1}^{N_0} K(r_i, r_k) VOLX(r_k, r_j) (c_{Invol}(r_i, t) + c_{Vol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)) \Delta r_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VOLX(r_k, r_j) &= \begin{cases} \frac{r_j^3}{r_k^3}, & j < k \\ 1, & j = k \end{cases} \\ k &= \{1, \dots, N_0\} \end{aligned} \quad (13)$$

II. Продукция

$$\int_0^{r_k} K((r_k^3 - r'^3)^{\frac{1}{3}}, r') c((r_k^3 - r'^3)^{\frac{1}{3}}, t) c(r_k, t') \frac{r_k^2}{(r_k^3 - r'^3)^{\frac{2}{3}}} dr' =: P_k(c) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P_k(c_{Invol}) &\approx \frac{1}{v_k} 2c_{Invol}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} v_i \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) c_{Invol}(r_i, t) \frac{(r_{k-1}^3 - r_i^3)^{\frac{2}{3}}}{r_{k-1}^2} \Delta r_k \\ P_k(c_{Vol}) &\approx \frac{1}{v_k} 2c_{Vol}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} v_i \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) c_{Vol}(r_i, t) \frac{(r_{k-1}^3 - r_i^3)^{\frac{2}{3}}}{r_{k-1}^2} \Delta r_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_k(c_{Mix}) &\approx \frac{1}{v_k} \{ 2c_{Vol}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} v_i \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) [c_{Invol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)] + \\ &+ 2c_{Invol}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} v_i \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) [c_{Vol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)] + \\ &+ 2c_{Mix}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} v_i \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) [c_{Invol}(r_i, t) + c_{Vol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)] + \\ &+ c_{Vol}(r_k, t) \sum_{i=1}^k \delta_{k,i} K(r_k, r_i) [-v_i c_{Invol}(r_i, t) - v_i c_{Mix}(r_i, t) + v_k c_{Invol}(r_i, t) + v_k c_{Mix}(r_i, t)] + \\ &+ c_{Invol}(r_k, t) \sum_{i=1}^k \delta_{k,i} K(r_k, r_i) [-v_i c_{Vol}(r_i, t) - v_i c_{Mix}(r_i, t) + v_k c_{Vol}(r_i, t) + v_k c_{Mix}(r_i, t)] \} \times \\ &\times \frac{(r_{k-1}^3 - r_i^3)^{\frac{2}{3}}}{r_{k-1}^2} \Delta r_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_k(c_{Volume}) \approx & \{ c_{Invol}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) c_{Volume}(r_i, t) + \\
& + (c_{Vol}(r_{k-1}, t) + c_{Mix}(r_{k-1}, t)) \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) [c_{Volume}(r_i, t) + v_i c_{Invol}(r_i, t)] + \\
& + \frac{1}{v_{k-1}} c_{Invol}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} v_i \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) [c_{Vol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)] + \\
& + \frac{1}{v_{k-1}} c_{Volume}(r_{k-1}, t) \sum_{i=1}^{k-1} v_i \delta_{k-1,i} K(r_{k-1}, r_i) [c_{Invol}(r_i, t) + c_{Vol}(r_i, t) + c_{Mix}(r_i, t)] + \\
& + c_{Invol}(r_k, t) \sum_{i=1}^k \delta_{k,i} K(r_k, r_i) [-v_i c_{Vol}(r_i, t) - v_i c_{Mix}(r_i, t) + v_k c_{Vol}(r_i, t) + v_k c_{Mix}(r_i, t)] \} \times \\
& \times \frac{(r_{k-i}^3 + r_i^3)^{\frac{2}{3}}}{r_{k-i}^2} \Delta r_k
\end{aligned}$$

$$v_i = \frac{4}{3} \pi r_i^3, \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i \neq j \\ \frac{1}{2}, i = j \end{cases} \quad (15)$$

Вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
A_i(r_k, t) & \approx \alpha_D(r_k) + \alpha_S(r_k) + D_k(c_i) \equiv \lambda_{i,k} \\
F_i(r_k, t) & \approx P_k(c_i) + f_i(r_k, t) \\
c_i^*(r_k, t) & \approx e^{-\lambda_{i,k} \Delta t}
\end{aligned}$$

Получаем дискретно-аналитическое выражение для концентрации на $(j+1)$ -ом шаге:

$$c_i(r_k, t_{j+1}) = c_i(r_k, t_j) e^{-\lambda_{i,k} \Delta t} + \int_0^{\Delta t} F_i(r_k, \tau) e^{-\lambda_{i,k} (\Delta t - \tau)} d\tau = 0 \quad (16)$$

Строим разностную схему, состоящую из 4-х шагов:

$$\begin{aligned}
f_{i,1}(r_k, t_j) & = F(c_i(r_k, t)) \\
\tilde{c}_i(r_k, t_j) & = c_i(r_k, t_j) e^{-\lambda_{i,k} \Delta t} + \frac{1 - e^{-\lambda_{i,k} \Delta t}}{\lambda_{i,k} \Delta t} f_{i,1}(r_k, t_j) \\
f_{i,2}(r_k, t_j) & = F(\tilde{c}_i(r_k, t)) \\
c_i(r_k, t_{j+1}) & = c_i(r_k, t_j) e^{-\lambda_{i,k} \Delta t} + \frac{1 - e^{-\frac{\lambda_{i,k} \Delta t}{2}}}{\frac{\lambda_{i,k} \Delta t}{2}} \frac{f_{i,1}(r_k, t_j) e^{-\frac{\lambda_{i,k} \Delta t}{2}} + f_{i,2}(r_k, t_j)}{2} \Delta t
\end{aligned} \quad (17)$$

$$i = \{Invol, Vol, Mix, Volume\}$$

Условие на шаг по времени:

$$|\lambda_{i,k} \Delta t| < 10 \Rightarrow \Delta t < \frac{10}{|\lambda_{i,k}|}$$

Численный эксперимент

Алгоритм, основу которого составляет предложенная в данной работе дискретно-аналитическая схема (11), (17), был реализован на языке C++ со следующими входными значениями:

$$C_i(r_k, 0) = S * e^{-\frac{k}{10}}, \Delta t = 10, \\ r_0 = 10^{-7}, \Delta r = 2,6 * 10^{-8}, N_0 = 100$$

По осям Ох и Оу отложены время t и радиус r, а по Oz- значение концентрации частиц

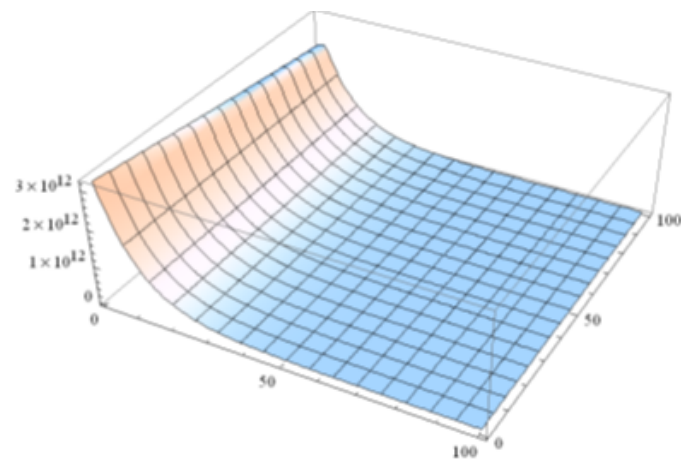


Рисунок 1 Распределение концентрации Invol, Vol, Mix или Volume

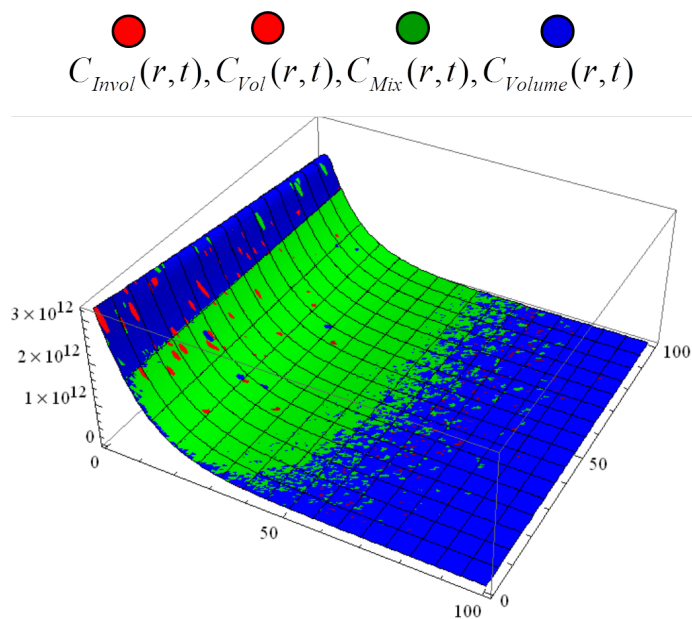


Рисунок 2 Распределение всех концентраций Invol, Vol, Mix или Volume

Список литературы

- [1] Seinfeld J.H, Pandis S. Atmospheric chemistry and physics: from air pollution to climate change. Willey, N.Y. 1988.
- [2] И.С.Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений, т. II.- М.: Физматгиз, 1962.

- [3] В.В. Пененко. Методы численного моделирования атмосферных процессов.- Л.: Гидрометео-издат, 1981.
- [4] Л. Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика.- М.: Издательство "Мир", 1969.
- [5] «A multidimensional Model for Aerosols: Description of Computational Analogs», O.B. Toon, R.P. Turco, D. Westphal, R. Malone, M.S. Liu

УДК 538.911

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ СМЕЩЕНИЙ КОМПЛЕКСОВ АТОМОВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА БИМЕТАЛЛОВ $NI - AL$, $NI - FE$ И $PT - AL$

М.Д. Старостенков¹, И.А. Дёмина², Г.В. Попова², Н.Ф. Денисова³

¹Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул, Россия

²Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан ³Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан

Abstract. Cooperative displacement of atom complexes that takes place along areas having free volume (interphase and grain boundaries) was observed using molecular dynamics method. Bimetals with various effective dimensions of atoms and masses of the components were chosen as objects for the investigation. It was shown that the rate of cooperative displacements depends on concentration of free volume carriers, their location against misfit dislocations, the ratio of effective dimensions of atoms and masses of the components.

Аңдатпа. Молекулалық динамика әдісінің көмегімен бос көлемді аумақтардағы атомдар кешенінің кооперативті жылжуы зерттелінеді. Зерттеу объектісі ретінде әр түрлі әсерлі өлшемдегі атомдары мен салмақ құрауыштары бар биметалдар таңдалынды. Кооперативті жылжу жылдамдығы бос көлемді тасымалдаушының тұнбасына, олардың сәйкессіздік дислокацияға қатысты орналасуына, әсерлі және әсерлі салмақ құрауыштарының қатынасына тәуелді екендігі көрсетілген.

Аннотация. С помощью метода молекулярной динамики исследуется кооперативное смещение комплексов атомов, происходящих по областям, имеющим свободный объём (границы раздела фаз и зерён). В качестве объектов исследования были выбраны биметаллы с различными эффективными размерами атомов и массами компонент. Было показано, что скорость кооперативных смещений зависит от концентрации носителей свободного объёма, их расположения по отношению к дислокациям несоответствия, отношения эффективных и эффективных масс компонент.

Введение. Многие физические свойства твёрдого тела зависят от числа и строения междоузельных границ, поэтому исследования процессов, происходящих на границе зерен, обусловлены необходимостью объяснить, и по возможности, влиять на те или иные физико-механические свойства металлов и сплавов. В связи с открытием таких явлений как эффект «малых доз» [1] и эффект дальнего действия [2] актуальными становятся исследования механизмов переноса дефектов внутри кристалла.

Единая теория, объясняющая эффект дальнего действия, в настоящее время отсутствует. Как правило, модели и механизмы, объясняющие природу эффекта дальнего действия, базируются на предположении о непосредственном переносе тех или иных дефектов, генерируемых в поверхностном слое в более глубокие слои материала.

Ряд авторов, объясняя эффекты дальнего действия, обращают внимание на генерацию упругих или акустических волн при различных видах энергетического воздействия на материал [3-10]. Волны атомных смещений возникают в процессе релаксации кристаллических структур, содержащих точечные дефекты. В [5, 6] показано, что они являются инициаторами высокоскоростных кооперативных атомных смещений, приводящих к аннигиляции точечных дефектов.

Авторы ряда работ предполагают наличие кооперативной природы эффекта дальнего действия [11, 12] и развитие самоорганизационных процессов в кристалле, приводящее к изменению дислокационной структуры и формированию нанокластеров в материале [13, 14].

Для изучения кооперативных явлений в твёрдом теле широко используется метод компьютерного моделирования, позволяющий проследить развитие явлений, протекающих с высокой скоростью, что практически невозможно сделать в реальном эксперименте. В данной работе использовался метод молекулярной динамики, основанный на решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения Ньютона для системы атомов. Метод молекулярной динамики, по сравнению с другими методами компьютерного моделирования, обладает несколькими важными преимуществами. Он позволяет решать задачи, касающиеся проблем структурно-энергетических трансформаций, как в кристаллических, так и в некристаллических материалах, деформации и аморфизации атомных систем в условиях температурно-силовых воздействий.

В данной работе компьютерный эксперимент выполнялся в двумерном приближении. Простые двумерные модели с использованием метода молекулярной динамики позволяют изучить основные закономерности протекания релаксационных процессов в единичном слое атомов. Для исследования выбиралась наиболее плотноупакованная плоскость кристаллической структуры. Такая двумерная структура является наиболее стабильной, и миграция атомов происходит преимущественно в плотноупакованных слоях. Двумерные модели хорошо себя зарекомендовали при исследовании самодиффузии в металлах и механизмов диффузии по границам зерен [15], стабильности межфазных границ в композиционных материалах [16], бездиффузионного механизма массопереноса [5, 6] и многих других задач. Преимуществами двумерных моделей являются наглядность, относительно высокая скорость счёта, относительно большой объём исследуемой структуры и возможность более детального исследования механизмов структурных превращений по сравнению с трехмерными моделями.

Метод компьютерного моделирования. В данной работе проводился компьютерный эксперимент по методу молекулярной динамики с использованием программы [17] и рассматривался механизм поведения атомов вблизи границы раздела биметаллов $Ni - Al$, $Ni - Fe$ и $Pt - Al$ при внедрении атомов в междоузельное пространство компоненты биметалла или образовании вакансий на границе раздела.

Начальная конфигурация расчетной ячейки создавалась в соответствии с [18]. Граница в биметалле проходила через середину ячейки, которая представляла собой плоскость (111). Для расчетной ячейки вдоль оси x (направление $\langle 110 \rangle$) задавались периодические граничные условия, а вдоль оси y (направление $\langle 112 \rangle$) – свободные. Число атомов в расчетной ячейке варьировалось от 3240 до 8000 в зависимости от условий эксперимента. Начальная температура ячейки составляла 0 К.

Граница раздела расчётной ячейки подвергалась процедуре релаксации, в результате которой граничные атомы занимали равновесные положения. В течение процесса релаксации наблюдалось увеличение температуры ячейки до нескольких градусов Кельвин. Время релаксации расчетной ячейки составляло 100 пс, а охлаждения – 10 пс. После релаксации из-за различия постоянных решеток в ячейке формировалась граница с характерными вершинными дислокациями несоответствия, которые приведены на рисунке 1.

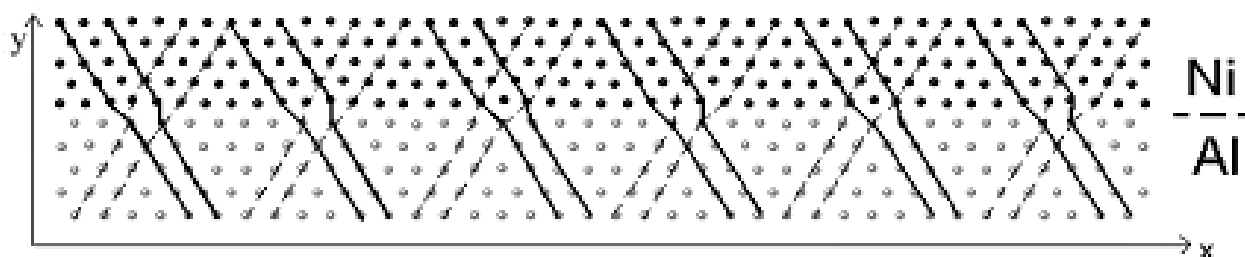


Рисунок 1 Граница раздела биметалла Ni-Al с выделенными дислокациями несоответствия

Более наглядно показать вершинные дислокации несоответствия позволяет визуализатор плотноупакованных атомных рядов. Он представляет собой линии, которые соединяют атомы в одном или нескольких плотноупакованных направлениях. Визуализатор атомных смещений является наиболее оптимальным при демонстрации механизма коллективных атомных смещений. Например, при внедрении атома вблизи границы биметалла, происходят направленные атомные смещения в сторону ближайшей вершинной дислокации несоответствия [19]. В рамках проводимых исследований комплексы атомов различной конфигурации внедрялись в межузельное пространство решетки на различных расстояниях от границы биметалла. При этом количество атомов в комплексе варьировалось от 1 до 7. После внедрения комплекса межузельных атомов осуществлялась релаксация ячейки до момента вытеснения атомов комплекса в соседний металл. В процессе релаксации происходил импульсный разогрев ячейки, температура которого зависела от количества внедряемых межузельных атомов.

Известно, что после запуска программы атомы начинают смещаться спустя некоторое время, которое тратится на процесс первоначальной активации эстафетных атомных смещений. В данных исследованиях определялась скорость кооперативных смещений без учета времени на активацию процесса.

Результаты компьютерного моделирования и их обсуждение. В [19] было установлено, что внедрение атомов в межузельное пространство никеля биметалла $Ni - Al$ приводит к направленному смещению атомов вдоль направления плотной упаковки до пересечения плотноупакованного ряда с границей раздела металлов и вытеснению атома из крайнего ряда в кристаллическую решётку соседнего металла, при этом смещение атомов происходит в сторону ближайшей дислокации несоответствия. В результате подобного рода эстафетных атомных смещений происходит переползание дислокации на одно межатомное расстояние вглубь решетки

Al. Скорость эстафетных атомных смещений зависит от места внедрения атома и удаленности от дислокации несоответствия.

В рамках представленной работы была исследована скорость кооперативных смещений при внедрении комплекса атомов *Ni* в межузельное пространство никеля вдоль направления $\langle 110 \rangle$ на 5 атомном ряду от границы биметалла *Ni* – *Al*. Межузельные атомы *Ni* внедрялись в плотноупакованные ряды между дислокациями несоответствия (рисунок 2 а) и в область дислокации несоответствия (рисунок 2 б).



Рисунок 2 Внедрение атомов *Ni* в межузельное пространство никеля биметалла *Ni* – *Al*: *a* – межузельные атомы внедрены в ряды между дислокациями несоответствия; *б* – межузельные атомы внедрены вблизи экстраплоскости дислокации несоответствия

На рисунке 3 приведены зависимости скорости кооперативных смещений от количества межузельных атомов, внедренных в ряды между дислокациями несоответствия (рисунок 2 а) и вблизи экстраплоскости дислокации несоответствия (рисунок 2 б). Вид траектории движения комплекса межузельных атомов зависит от количества атомов в комплексе и его расположения по отношению к дислокациям несоответствия. В зависимости от вида траектории различается и время, которое требуется для вытеснения атомов в соседний металл. В случае прямолинейной траектории данный процесс происходит быстрее по сравнению с траекторией, имеющей ломаный характер.

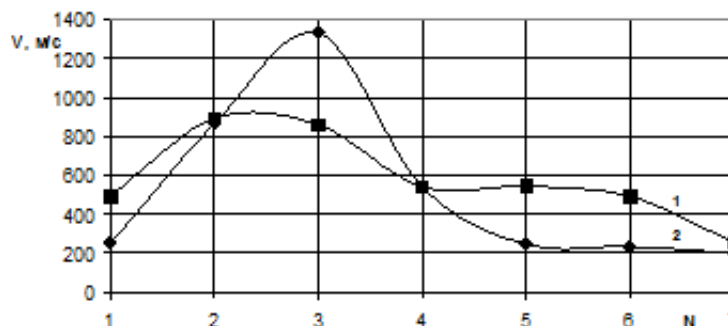


Рисунок 3 Зависимость скорости кооперативных смещений от количества атомов *Ni*, внедренных в межузельное пространство решетки никеля (комплекс межузельных атомов внедрялся вдоль направления $\langle 110 \rangle$ на пяти межатомных расстояниях от границы раздела биметалла): 1 – межузельные атомы внедрены в ряды между дислокациями несоответствия (рисунок 2 а); 2 – межузельные атомы внедрены вблизи экстраплоскости дислокации несоответствия (рисунок 2 б)

Как видно из рисунка 3, скорость кооперативных смещений зависит от количества межузельных атомов, образующих комплекс, а также от расположения этого комплекса по отношению к

дислокациям несоответствия. При внедрении межузельных атомов вблизи экстраплоскости дислокации несоответствия скорость кооперативных смещений ниже, чем при внедрении их между экстраплоскостями дислокаций несоответствия. Исключением является случай внедрения комплекса, состоящего из трех межузельных атомов, расположенного вблизи экстраплоскости дислокации несоответствия (рисунок 2 б). При данном способе внедрения, скорость кооперативных смещений комплекса атомов составляет 1330 м/с и объясняется прямолинейной траекторией смещения атомов.

Исследуем скорость кооперативных смещений при внедрении межузельных атомов в плотноупакованный ряд под углом 120° к границе биметалла $Ni-Al$ между экстраплоскостями дислокаций несоответствия (рисунок 4 а) и вдоль экстраплоскости дислокации несоответствия (рисунок 4 б).

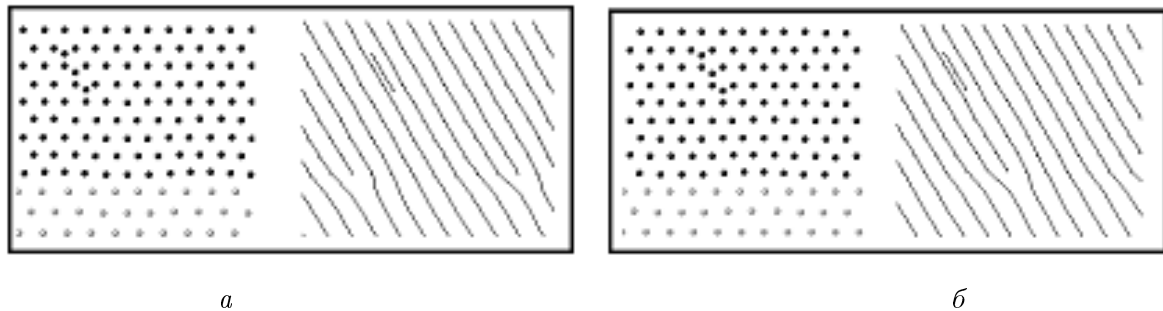


Рисунок 4 Конфигурация ячейки $Ni-Al$ при внедрении комплекса межузельных атомов в плотноупакованный ряд под углом 120° : а – межузельные атомы внедрены в плотноупакованный ряд между экстраплоскостями дислокаций несоответствия; б – межузельные атомы внедрены вдоль экстраплоскости дислокации несоответствия.

На рисунке 5 изображена зависимость скорости кооперативных смещений от количества межузельных атомов, внедренных в плотноупакованный ряд под углом 120° . Наибольшая скорость кооперативных смещений (2630 м/с) соответствует комплексу, состоящему из трех атомов, расположенных вдоль экстраплоскости дислокации несоответствия под углом 120° . Следует отметить, что данная скорость кооперативных смещений комплекса атомов составляет 55% скорости звука в никеле.

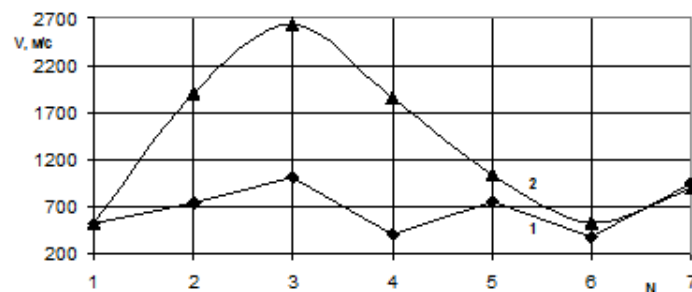


Рисунок 5 Зависимость скорости кооперативных смещений от количества атомов Ni , внедренных в межузельное пространство решетки никеля под углом 120° к границе биметалла: 1 – межузельные атомы внедрены в плотноупакованный ряд между экстраплоскостями дислокаций несоответствия (рисунок 4 а); 2 – межузельные атомы внедрены вдоль экстраплоскости дислокации несоответствия (рисунок 4 б)

Анализируя скорость кооперативных смещений (рисунок 3 и 5), можно сделать вывод о ее зависимости от количества внедряемых межузельных атомов и пространственного расположения по отношению к экстраплоскости дислокаций несоответствия.

В результате проведения серии компьютерных экспериментов было установлено, что внедрение комплекса межузельных атомов как вдоль направления $\langle 110 \rangle$, так и под углом 120° , приводит к эстафетному смещению атомов вдоль направления плотной упаковки до пересечения плотноупакованного ряда с границей металлов и вытеснению атомов из крайнего ряда в кристаллическую решетку соседнего металла. В результате подобного рода эстафетных смещений дислокация несоответствия переползает вглубь Al . На рисунке 6 представлены кооперативные смещения комплекса, состоящего из 5 межузельных атомов, внедренных на пяти межатомных расстояниях от границы биметалла.

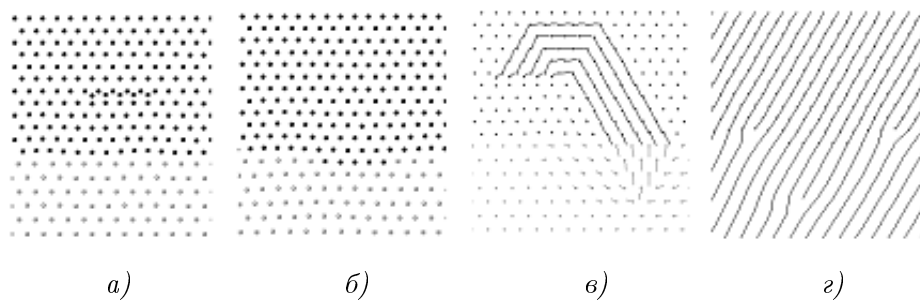


Рисунок 6 Внедрение 5 межузельных атомов вдоль направления $\langle 110 \rangle$ на пяти межатомных расстояниях от границы биметалла $Ni - Al$: *a* – начальное положение атомов; *b* – результат релаксации границы биметалла; *v* – кооперативные атомные смещения в процессе релаксации ячейки; *z* – визуализация атомных рядов, экстраплоскость дислокации несоответствия смещена на пять межатомных расстояний

В результате релаксации ячейки дислокация несоответствия переползла на 5 атомных расстояний вглубь решетки Al . При этом смещение атомов происходит в сторону ближайшей дислокации несоответствия. Таким образом, осуществляется своеобразная аннигиляция дефектов к более выгодному энергетическому состоянию системы.

При внедрении межузельных атомов, отстоящих друг от друга на два межатомных расстояния, также выявлено кооперативное смещение в сторону одной из дислокаций на границе биметалла. Если внедряется свыше 5 атомов, то возможно разделение их на 2 группы и смещение к двум различным дислокациям несоответствия [20]. Такое кооперативное поведение наблюдалось при внедрении межузельных атомов не далее 10 межатомных расстояний от границы биметалла $Ni - Al$.

Исследование произвольного расположения комплексов межузельных атомов показало, что в этом случае также наблюдаются эстафетные смещения, но на это затрачивается больше времени. При этом на начальном этапе релаксации структуры смещения атомов могут происходить не только вдоль плотноупакованных направлений. Наблюдаются кольцевые смещения атомов, которые могут быть обусловлены эстафетными смещениями атомов в процессе релаксации ячейки [20].

Следует отметить, что кольцевой механизм перемещения атомов в данном случае реализовывался при более низких температурах по сравнению с бездефектными кристаллами. Для идеального кристалла чистого никеля кольцевые перемещения атомов были обнаружены только при

температуре 1700K [21], а в рамках данного компьютерного эксперимента температура ячейки составляла $\sim 210\text{K}$.

Таким образом, характер атомных смещений зависит от числа межузельных атомов. При этом расстояние, на которое происходит переползание дислокации, соответствует межатомному расстоянию, пропорциональному числу внедренных межузельных атомов.

Исследуем влияние дополнительного свободного объема на процессы, происходящие на границе биметалла $Ni - Al$. В качестве носителей свободного объема выберем вакансии, которые будут располагаться на границе биметалла. Количество образуемых вакансий варьировалось от 1 до 4. Исследовалась зависимость скорости кооперативных смещений от количества атомов, внедряемых в межузельное пространство никеля на 5 атомном ряду (согласно рисунку 2 а) при введении вакансий на границе биметалла. Данные зависимости приведены на рисунке 7.

Анализируя зависимости, приведенные на рисунке 7, можно сделать вывод о том, что не во всех случаях введение дополнительного свободного объема ведет к увеличению скорости кооперативных смещений. Это, прежде всего, связано с тем, что в расчетной ячейке иницируются дополнительные смещения атомов, тем самым время вытеснения атомов в соседний металл увеличивается.

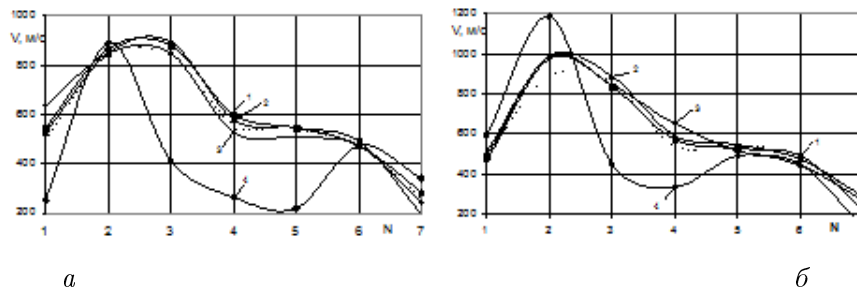


Рисунок 7 Зависимость скорости кооперативных смещений от количества атомов Ni , внедренных в межузельное пространство решетки никеля при наличии вакансий на границе биметалла (номер кривой соответствует количеству образованных вакансий; штриховой кривой соответствует скорость кооперативных смещений в отсутствии вакансий): а – вакансии образованы со стороны никеля; б - вакансии образованы со стороны алюминия

Исследуем процессы, происходящие на границе биметалла $Ni - Fe$, у которого различие эффективных атомных радиусов Ni и Fe меньше, чем у биметалла $Ni - Al$. На рисунке 8 приведена граница биметалла $Ni - Fe$, показанная через визуализатор плотноупакованных рядов, с характерными вершинными дислокациями несоответствия, которых в 2 раза меньше по сравнению с биметаллом $Ni - Al$.



Рисунок 8 Граница биметалла $Ni - Fe$, показанная через визуализатор плотноупакованных рядов

Атомы Ni внедрялись в межузельное пространство никеля вдоль направления $\langle 110 \rangle$ на 5 атомном ряду от границы раздела биметалла $Ni - Fe$. Количество атомов варьировалось от 1 до 7. Время релаксации составляло 50 пс, а начальная температура ячейки 0 К.

После релаксации вытеснение атомов из крайнего ряда в соседний металл не происходило, даже при нагреве расчетной ячейки. В зависимости от траектории движения межузельных атомов наблюдалось образование дислокационной петли либо на границе раздела биметалла, либо в решетке никеля.

При введении дополнительного свободного объема, т.е. вакансий на границе раздела биметалла, наблюдалось переползание дислокаций несоответствия вглубь решетки никеля. На рисунке 9 приведена начальная конфигурация ячейки (рисунок 9 а и б) и после релаксации (рисунок 9 в), показанная через визуализатор плотноупакованных рядов.

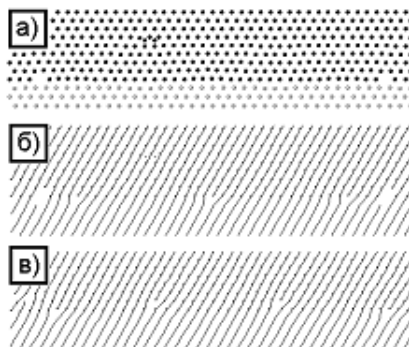


Рисунок 9 Ячейка биметалла $Ni - Fe$ при внедрении двух атомов Ni в межузельное пространство решетки никеля: a – расчетная ячейка с двумя межузельными атомами Ni и двумя вакансиями на границе раздела биметалла; b – расчетная ячейка, показанная через визуализатор плотноупакованных рядов; v – ячейка после релаксации в течение 50 пс

При нагреве ячейки с вакансиями на границе раздела биметалла до 300 К в отдельных случаях становится возможным вытеснение атомов в соседний металл и переползание дислокации несоответствия вглубь Fe . На рисунке 10 приведен пример релаксационного процесса расчетной ячейки, конфигурация которой изображена на рисунке 9 а, при нагреве ее до 300 К.

Таким образом, введение дополнительного свободного объема и нагрев ячейки до 300 К обеспечивает возможность вытеснения атомов Ni в соседний металл и переползание дислокации несоответствия вглубь Fe . Однако данный процесс происходит гораздо медленнее, чем в биметалле $Ni - Al$. Это обусловлено различием эффективных атомных радиусов компонентов, входящих в биметалл, отношение которых определяет плотность распределения дислокаций несоответствия на границе биметалла.

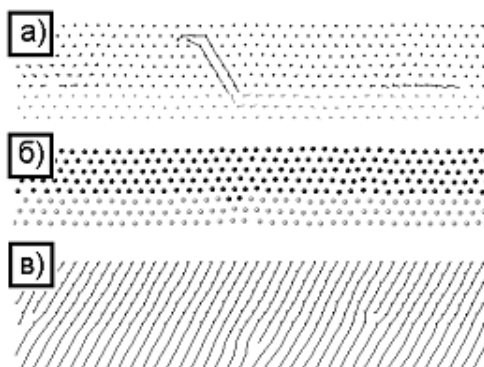


Рисунок 10 Конфигурация ячейки биметалла $Ni - Fe$ при нагреве ее до 300 К после релаксации в течение 50 пс: a – смещения в процессе релаксации ячейки; b – результат релаксации ячейки; v – визуализация атомных рядов.

Рассмотрим процессы, происходящие на границе биметалла, у которого массы атомов компонентов существенно различны, на примере биметалла $Pt - Al$. На рисунке 11 приведена конфигурация ячейки $Pt - Al$, показанная с помощью визуализатора плотноупакованных рядов. Начальная температура расчетной ячейки составляла 0 К.



Рисунок 11 Граница раздела биметалла $Pt - Al$, показанная с помощью визуализатора плотноупакованных рядов

Один атом Pt или Al внедрялся в межузельное пространство платины на 5 атомном ряду от границы раздела биметалла. После релаксации ячейки в течение 50 пс наблюдалось появление ступеньки на границе раздела, при этом дислокация несоответствия переползала вглубь Al . При увеличении количества внедряемых атомов, в процессе релаксации, помимо образования ступеньки и точечных дефектов замещения на границе раздела биметалла, наблюдается образование вакансий в решетке платины.

При внедрении атома Al в межузельное пространство алюминия на 5 атомном ряду от границы раздела биметалла в результате релаксации ячейки происходит смещение атомов к границе биметалла, при этом дислокация несоответствия переползает вглубь Al .

На рисунке 12 приведен результат релаксации границы биметалла при внедрении атома Pt в межузельное пространство Al . Внедренный атом инициирует смещение атомов Al к границе биметалла к ближайшей дислокации несоответствия, которая при этом переползает на одно межатомное расстояние вглубь Al .

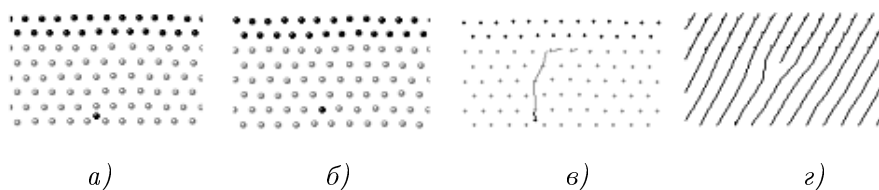


Рисунок 12 Релаксация расчетной ячейки $Pt - Al$ при внедрении атома Pt в межузельное пространство Al на 5 атомном ряду: *а* - начальное положение атомов; *б* - результаты релаксации границы биметалла; *в* - атомные смещения в процессе релаксации ячейки; *г* - визуализация атомных рядов

Следует отметить, что на развитие и скорость кооперативных смещений влияет соотношение эффективных масс и эффективных размеров атомов. В таблице 1 приведены данные соотношения для рассматриваемых биметаллов $Ni - Al$, $Ni - Fe$ и $Pt - Al$ [22].

Таблица 1 Физические характеристики биметаллов

Тип биметалла	Отношение эффективных размеров атомов	Отношение эффективных масс компонент
Ni-Al	0,87	2,2
Ni-Fe	0,90	1,05
Pt-Al	0,97	7,23

Отношение эффективных размеров атомов тяжелой решетки к эффективному размеру атомов легкой решетки определяет плотность распределения вершинных дислокаций несоответствия вдоль границы биметалла. При внедрении атома в одноименную часть компонента биметалла с наибольшей эффективной массой, скорость кооперативных смещений больше, чем больше отношение эффективных масс компонент.

Заключение

Таким образом, скорость кооперативных смещений зависит от количества межузельных атомов и их расположения по отношению к дислокациям несоответствия, от наличия вакансий на границе раздела биметалла, а также от компонент биметалла, т.е. отношения эффективных размеров атомов и эффективных масс компонент. При этом скорость кооперативных смещений может составлять до 55% скорости звука в материале. При внедрении комплекса атомов расстояние, на которое происходит переползание дислокации, соответствует межатомному расстоянию, пропорциональному числу внедренных межузельных атомов.

Список литературы

- [1] Мамонтов, А. П. Эффект малых доз ионизирующего излучения / А. П. Мамонтов, И. П. Чернов. – М.: Энергоатомиздат, 2001. – 286 с.
- [2] Эффекты дальнего действия в ионно-имплантированных металлических материалах / А. Н. Диденко [и др.] – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 328 с.
- [3] Возникновение релаксационных волн смещений вблизи точечных дефектов в металлах с ГЦК решеткой. placeI. Волны смещений вблизи одиночных вакансий / М. Д. Старостенков [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2008. – Т. 5, №4. – С. 117–120.
- [4] Возникновение релаксационных волн смещений вблизи точечных дефектов в металлах с ГЦК решеткой. II. Волны смещений вблизи одиночных внедренных атомов / М. Д. Старостенков [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2009. – Т. 6, №1. – С. 105–107.
- [5] Высокоскоростной массоперенос в двумерном кристалле никеля при наличии дислокационных петель различной локальной плотности / М. Д. Старостенков [и др.] // Известия вузов. Черная металлургия. – 2009. – №6. С. 57–60.
- [6] Высокоскоростной массоперенос в кристаллическом алюминии, содержащем цепочки вакансий и межузельных атомов / М. Д. Старостенков [и др.] // Известия вузов. Физика. – 2009. – Т. 52, №9/2. – С. 139–145.
- [7] Волны, возникающие при рекомбинации пар Френкеля в двумерных модельных решетках металлов и их влияние на дрейф агрегатов точечных дефектов / Н. Н. Медведев [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2009. – Т. 6, №2. – С. 8–13.
- [8] Маркидонов, А. В. Агрегатизация вакансий, инициированная послекаскадными ударными волнами / А. В. Маркидонов, М. Д. Старостенков, О. В. Обидина // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2012. – Т.9, №4. – С. 548–555.

-
- [9] Механизмы трансформации краудионных комплексов при прохождении продольной волны / А. В. Маркидонов [и др.] // Нелинейный мир. – 2011. – Т. 9, № 12. – С. 826-835.
- [10] Особенности динамики краудионов в кристаллах с ГЦК решеткой при различных силовых воздействиях / А. В. Маркидонов [и др.] // Химическая физика и мезоскопия. – 2012. – Т. 14, № 1. – С. 46-53.
- [11] Хмелевская, В. С. Эффект дальнего действия и коллективные процессы в металлах / В. С. Хмелевская, В. Г. Малышкин // Вестник ННГУ. Серия: Физика твердого тела. – 2003. – Вып. 1(6). – С. 173-182.
- [12] Хмелевская, В. С. Эффект дальнего действия в материалах различной природы / В. С. Хмелевская, И. А. Антошина, М. Н. Кордо // Физика металлов и металловедение. – 2007. – Т. 103, №6. – С. 652-656.
- [13] Tereshko I.V., Abidzina V.V., Elkin I.E. et al. Formation of nanoclusters in metals by the low-energy ion irradiation // Surface and Coatings Technology. – 2007. – V. 201. – P. 8552-8556.
- [14] Tereshko I., Abidzina V., Tereshko A. et al. Nanostructural evolution of steel and titanium alloys exposed to glow discharge // Nucl. Instr. and Meth. B. – 2007. – V. 261. – P. 678-681.
- [15] Исследование механизмов диффузии по границам зерен наклона в ГЦК металлах / Ракитин Р.Ю. [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2005. – Т.2, №2. – С. 124-129.
- [16] Исследование температурных интервалов стабильности межфазных границ в двумерном металлическом композите Ni₃Al-Ni / Старостенков М.Д. [и др.] // Известия вузов. Черная металлургия. – 2006. – № 6. – С. 24-27.
- [17] Полетаев, Г. М. Моделирование методом молекулярной динамики структурно-энергетических превращений в двумерных металлах и сплавах (MD2) / РОСПАТЕНТ свидетельство № 2008610486 от 25.01.2008.
- [18] Полетаев, Г. М. Исследование процессов взаимодиффузии в двумерной системе Ni-Al: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / Полетаев Геннадия Михайлович. – Барнаул, 2002. – 186 с.
- [19] Старостенков, М. Д. Взаимодействие краудиона с границей биметаллах Ni-Al в 2D модели / М. Д. Старостенков, П. В. Захаров, Н. Н. Медведев // Письма о материалах. – 2011. – Т.1, вып. 4. – С. 238-240.
- [20] Кооперативное поведение межузельных атомов в поле дислокаций несоответствия на границе биметалла Ni-Al / П. В. Захаров [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2012. – Т.9, №4. – С. 431-435.
- [21] Холодова, Н. Б. Точечные дефекты и их роль в процессах разупорядочения двумерного интерметаллида Ni₃Al: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / Холодова Наталья Борисовна. – Барнаул, 2007. – 233 с.
- [22] Захаров П. В. Кооперативные явления при взаимодействии динамических и топологических солитонов с дефектами в различных модельных кристаллических решетках на основе ГЦК

структуры: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / Захаров Павел Васильевич. – Барнаул, 2012. – 165 с.

УДК 621.762

РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРОГРАММ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА В МЕТАЛЛУРГИИ

Б.В. Сырнев, В.А. Агапов, С.Н. Данилов, С.А. Абдулина, М.А. Саденова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. In the article presents the results of the development of the software package to assess the potential of metallurgical production. This component part of the toolkit that should own a young professional metallurgist for the successful analysis of production and preparation of organizational and technical suggestions for improvements. The program is designed for automatic processing of large arrays industrial statistics indicators of the quality products to obtain statistical indicators, building Shewhart charts and Pareto, the calculation of the indices of reproducibility of quality products and delivery of conclusion on the status and reliability of the technology.

Аңдатпа. Жұмыста металлургиялық өндірістің әлеуетін бағалауға арналған бағдарламалар пакетін әзірлеудің нәтижелері келтірілген. Бұл жас маман-металлургтың өндірісті табысты талдау және оны жетілдіру үшін ұйымдастыру-техникалық ұсыныстар даярлауда білуге қажет жабдықтың құраушы бөлігі болып табылады. Бағдарлама өнім сапасы көрсеткіштерінің өнеркәсіптік статистикасының үлкен көлемдерін статистикалық көрсеткіштерді ала отырып, Шухарт және Парето карталарын салумен, өнім сапасының көрсеткіштерінің қалпына келтіру индекстерін есептеумен және өндіріс технологиясының жағдайы және сенімділігі туралы нәтиже беретін автоматтық өңдеуге арналған.

Аннотация. В работе представлены результаты разработки пакета программ для оценки потенциала металлургического производства. Эта составная часть того инструментария, которым должен владеть молодой специалист-металлург для успешного анализа производства и подготовки организационно-технических предложений по его усовершенствованию. Программа предназначена для автоматической обработки больших массивов промышленной статистики показателей качества продукции с получением статистических показателей, построением карт Шухарта и Парето, расчетом индексов воспроизводимости показателей качества продукции и выдачей заключения о состоянии и надежности технологии производства.

Рыночные отношения обуславливают конкуренцию среди производителей, определяют высокие требования к качеству выпускаемой продукции и побуждают специалистов к постоянному поиску путей повышения ее характеристик и снижения себестоимости.

Существуют различные пути достижения указанных целей: технологические (усовершенствование технологического процесса и аппаратуры), организационные (снижение производственных и непроизводственных затрат) и т.д. Выбор эффективного пути снижения себестоимости задача не тривиальная. По мере усложнения производственных процессов управление качеством готовой продукции становится задачей все более многофакторной.

По этой причине в развитых индустриальных странах все более востребованы методы математической статистики – как метод управления качеством, что регламентировано в международных стандартах ИСО 9001.

В международной практике широко используются методы математической статистики для оценки стабильности технологии, дефектности продукции, соответствия средств контроля требованиям контрактов и «качеству» технологии, необходимость и периодичность контроля в заданной точке процесса т.д.

Технический контроль, в соответствии с методологией Ф. Тейлора, направлен на решение не только задач оперативного управления (обеспечение выполнения технологического регламента, аттестация продукции), но и – перспективного управления качеством (оценка и прогнозирование технологических проблем, выработка оснований для принятия стратегических решений).

В производственных условиях постоянно возникают вопросы, какому поставщику отдать предпочтение; каковы технические возможности имеющегося технологического передела; как обеспечить требования, заложенные в проекте нового контракта; где узкие места технологической цепи; обоснованы ли с технической и экономических точек зрения применяемые средства контроля качества продукции; каковы надежность и дрейф технологии; каков эффект внедренных оргтехмероприятий; обоснованы ли претензии потребителей к качеству продукции и т.д. От объективности ответов на эти вопросы и обоснованности принятых решений зависит благополучие и имидж предприятия.

Так как руководитель не в состоянии быть специалистом по всем переделам производства, то при принятии решений по указанным выше вопросам он ориентируется на предложения узких специалистов. Однако, большой производственный опыт, которым обладают, как правило, зрелые специалисты, не исключает субъективизма в оценке ситуации и может в отдельных случаях служить основой для консервативных и даже неконструктивных решений.

По этой причине, использование статистических методов (которые рассматриваются не как альтернатива научно-исследовательским работам и производственному опыту технологов, а как дополнительный инструмент) позволяет производить оценку ситуации с использованием принятых в международной практике критериев, повысить объективность оценки и эффективность принимаемых управленческих решений.

Предлагаемая работа основана на результатах мониторинга технологии производства бериллия «от переработки концентратов до выпуска готовых изделий», в результате которой была обоснована методология статистического мониторинга потенциала металлургического передела производства бериллия.

Методология включала следующие этапы обработки статистических данных для получения объективной оценки потенциала технологии, способности удовлетворить требования заказчика, прогноз дрейфа технологии и т.д.:

- методика сбора и подготовки промышленной статистики;
- оценка «нормальности» статистических данных и определение алгоритма дальнейшей обработки данных;
- расчет простых статистических показателей;
- определение индексов воспроизводимости;
- построение карт Шухарта с определением обоснованных допусков и тренда показателей качества;
- построение карт кумулятивных сумм;

- формулирование выводов о надежности и воспроизводимости технологической операции;

Для объективной оценки состояния технологических процессов и их динамики во времени необходима переработка большого объема промышленной статистики: по десяткам операций, ежемесячно, по годам. При использовании «ручной» статистической обработки затраты времени и труда значительны.

Актуальным является разработка универсальной программной платформы для автоматизации расчетов на персональных компьютерах. В рамках проведенной работы был разработан комплекс программ «Пакет анализа», объединенных в удобную для пользования расчетную платформу (рисунок 1).

Статистические данные вводятся в соответствующий лист «Пакета анализа» и производится обработка: расчет количественных величин и построение графиков (рисунок 2).

Разработанный «Пакет анализа» рекомендован к внедрению.

Вс.	Расчет
Среднее	0,097
Медиана	0,0945
Мода	0,0900
Стандартное отклонение	0,029085409
Дисперсия выборки	0,000845961
Эксцесс (E)	0,33
Асимметричность (A)	0,24
Минимум	0,0132
Максимум	0,21
Сумма	36,8692
Счет (N)	380

5[D(E)] ^{0,5} =	1,232052661
3[D(A)] ^{0,5} =	0,374502404

Наблюдаемое распределение можно считать нормальным, если удовлетворяются неравенства:
 $A \leq 3[D(A)]^{0,5}$ и $E \leq 5[D(E)]^{0,5}$

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Расчет индекса воспроизводимости

ИНДЕКС = 0,79

Принесет несоответствия с уровнем дефективности до 5%. Конкретные статистические вычисления для расчетной воспроизводимости константы.

Рисунок 1 Комплекс программ «Пакет анализа»

Список литературы

- [1] Статистический мониторинг в непрерывном производстве. М. Певзнер. Журнал «Методы менеджмента качества», № 11, 2009.
- [2] Современные проблемы производства бериллия. Б. В. Сырнев, Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2010.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. Н. Темирбеков

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

Abstract. In the given work I examine numerical methods of solving Navier-Stokes equations in multiply-connected domains. Two methods of problem solution are examined. The first method is based on setting differential in variable velocity, stream function and use of pressure single value condition. Numerical solution of elliptic equation for stream function is as a sum of two simple problems of elliptic type. One problem is with uniform boundary conditions, and another one with a uniform equation. Alternative approach to solving the set problem is fictive region method with small coefficient extension. This method does not require satisfaction to the condition of pressure uniformity and is simple in realization.

Keywords: Navier-Stokes equation, velocity, pressure, stream function, multiply-connected domain, boundary condition, stability.

Аннотация. В данной работе исследуются численные методы решения уравнений Навье-Стокса в двухсвязных областях. Рассматриваются два метода решения задачи. Первый метод основан на построении разностной задачи в переменных скорость, функция тока и использование условия однозначности давления. Численное решение эллиптического уравнения для функций тока находится как сумма решений двух простых задач эллиптического типа. Одна задача является с однородными граничными условиями, а другая с однородным уравнением. Альтернативный подход к решению поставленной задачи является метод фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентом. Этот метод не требует удовлетворения условия однозначности давления и является простым в реализации.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, скорость, давления, функция тока, многосвязная область, граничные условия, устойчивость.

Введение

В настоящей работе рассматриваются методы численного решения уравнений Навье – Стокса в многосвязной области. Одна из трудностей численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных функции тока и вихря скорости в случае многосвязной области порождается неопределенностью значений функции тока на внутренних границах. Численное решение уравнения Навье – Стокса в многосвязной области рассматривались авторами работ [1-2], в которых предлагается явный метод численного решения уравнений Навье – Стокса в двухсвязной области. Данная задача с использованием условия однозначности давления решена в работе Сироченко В.П. [3]. В работе [4] применялась явная схема которая привела к неустойчивому счету. В предлагаемой работе рассматриваются явная разностная схема для численного решения уравнений Навье-Стокса в многосвязной области с использованием условия однозначности давления и метод фиктивных областей для решения этой задачи. Для моделирования конвективных течений

рассмотрим уравнения Навье-Стокса в приближении Бусинеска [3].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta v - Gr \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \Delta \theta, (x, y) \in D, t \in (0, T] \quad (4)$$

с начальными и граничными условиями

$$u = u_0(x, y), v = v_0(x, y), \theta = \theta_0(x, y), (x, y) \in \bar{D}, t = 0 \quad (5)$$

$$u = a_x(x, y, t), v = a_y(x, y, t), \theta = \xi(x, y, t), (x, y) \in \partial D, t \in [0, T] \quad (6)$$

В этой системе u, v -компоненты вектора скорости, p -давление, θ -температура, Re -число Рейнольдса, Gr -число Грасгофа, Pr -число Прандтля, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ -граница области D . Задачу (1-6) удобно решать исключением давления из уравнений движения и введением новых переменных-функция тока и завихренности. При доказательстве эквивалентности постановок задач в естественных переменных и в переменных функция тока и завихренности существенную роль играют интегральные условия однозначности давления. В работе Ладыженской О.А. для однозначной разрешимости разностной схемы для уравнения Навье-Стокса к системе уравнений добавляется условие однозначности давления следующего вида

$$\int \int_D p(x, y) dx dy = 0 \quad (7)$$

Необходимость постановки условия вида (7) связано с тем, что разностный аналог уравнения (3) не является линейно-независимым. В работе Сироченко В.П. [3] предлагается другой вариант условия однозначности давления которая записывается в виде

$$\oint_{\gamma_3} \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy = 0 \quad (8)$$

где $\Pi = p + (u^2 + v^2)/2$ -полный напор.

Введем функцию тока ψ и вихрь скорости ω , которые связаны с компонентами скорости u, v следующими соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

Задача (1)-(6) в переменных ψ, ω записывается следующим образом [3]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega + Gr \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\Delta \psi = \omega. \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \Delta \theta, (x, y) \in D, t \in (0, T], \quad (12)$$

$$\omega = \alpha(x, y), \theta = \phi(x, y), (x, y) \in \bar{D}, t = 0, \quad (13)$$

$$\psi = \xi_1(x, y, t), \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = \eta_1(x, y, t), (x, y) \in \gamma_1, t \in (0, T], \quad (14)$$

$$\psi = \xi_2(x, y, t) + \lambda(t), \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = \eta_2(x, y, t), (x, y) \in \gamma_2, t \in (0, T], \quad (15)$$

$$\theta = \beta_l(x, y, t), (x, y) \in \gamma_l, l = 1, 2, t \in (0, T], \quad (16)$$

$\alpha, \phi, \xi_i, \eta_i, \beta_i, i = 1, 2$ - заданные функции. Условие (8) запишем в следующем виде

$$\oint_{\gamma_3} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx + \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} - Gr \theta \right) dy \right] = 0 \quad (17)$$

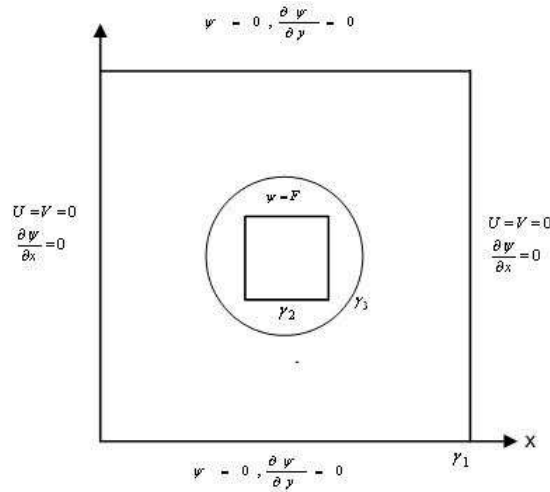


Рисунок 1 Физическая область

Решение задачи (10)-(17) будем искать в виде

$$\omega^{n+1}(x, y) = \omega_0^{n+1}(x, y) + \lambda^{n+1} \omega_1^{n+1}(x, y), \quad (18)$$

$$\psi^{n+1}(x, y) = \psi_0^{n+1}(x, y) + \lambda^{n+1} \psi_1^{n+1}(x, y).$$

I-ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_0^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega_0^{n+1} + Gr \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x} \quad (19)$$

$$\Delta \psi_0^{n+1} = -\omega_0^{n+1}, (x, y) \in D.$$

$$\psi_0^{n+1}|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial n}|_{\gamma_1} = 0, \quad \psi_0^{n+1}|_{\gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial n}|_{\gamma_2} = 0, \quad (20)$$

II-ая вспомогательная задача

$$\frac{\omega_1^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_1^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_1^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega_1^{n+1} \quad (21)$$

$$\Delta \psi_1^{n+1} = -\omega_1^{n+1}, \quad (x, y) \in D.$$

$$\psi_1^{n+1}|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial n}|_{\gamma_1} = 0, \quad \psi_1^{n+1}|_{\gamma_2} = 1, \quad \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial n}|_{\gamma_2} = 0, \quad (22)$$

Построим равномерную сетку в области $D_h = \{(x_i, y_i), x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, i = 0, 1, \dots, n_1, j = 0, 1, \dots, n_2, h_1 = l_1/(n_1-1), h_2 = l_2/(n_2-1)\}$. Предположим что область D_0 является прямоугольником $D_{0h} = \{(x, y), x_{k1} \leq x \leq x_{k2}, y_{m1} \leq y \leq y_{m2}\}$ $x_i = (i-1)h_1, y_j = (j-1)h_2, i = 0, 1, \dots, n_1, j = 0, 1, \dots, n_2$ узлы равномерной сетки построенный в области D . Рассмотрим область D_1 охватывающий область D_0 , т.е. $D_0 \subset D_1$. $D_1 = \{(x, y), x_{k3} \leq x \leq x_{k4}, y_{m3} \leq y \leq y_{m4}\}$ Рассмотрим разностный аналог условия (17) и подставляя разложение вида (18) получим

$$M\alpha^{n+1} = N \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} M = & \sum_{j=m3}^{m4} [\psi_{1,x,k3,j}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,k3+1,j}^{n+1}\psi_{y,k3,j}^n + 0.5\omega_{1,k3,j}^{n+1}\psi_{y,k3+1,j}^n - \\ & - \frac{1}{Re}\omega_{1,x,k3,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k3+1/2,j}^{n+1}]h_2 + \\ & + \sum_{i=k3}^{k4} [\psi_{1,y,i,m4}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,i,m4-1}^{n+1}\psi_{x,i,m4}^n + \\ & + 0.5\omega_{1,i,m4}^{n+1}\psi_{x,i,m4-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{1,y,i,m4}^{n+1}]h_1 - \\ & - \sum_{j=m3}^{m4} [\psi_{1,x,k4,j}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,k4+1,j}^{n+1}\psi_{y,k4,j}^n + 0.5\omega_{1,k4,j}^{n+1}\psi_{y,k4+1,j}^n - \\ & - \frac{1}{Re}\omega_{1,x,k4,j}^{n+1} - \beta g \theta_{k4+1/2,j}^{n+1}]h_2 - \\ & - \sum_{j=k3}^{k4} [\psi_{1,y,i,m3}^{n+1}/\tau + 0.5\omega_{1,i,m3-1}^{n+1}\psi_{x,i,m3}^n + \\ & + 0.5\omega_{1,i,m3}^{n+1}\psi_{x,i,m3-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{1,y,i,m3}^{n+1}]h_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
N = & \sum_{j=m3}^{m4} [-\psi_{0,x,k3,j}^{n+1}/\tau - \psi_{x,k3,j}^n/\tau + 0.5\omega_{0,k3+1,j}^{n+1}\psi_{y,k3,j}^n + 0.5\omega_{0,k3,j}^{n+1}\psi_{x,k3+1,j}^n - \\
& - \frac{1}{Re}\omega_{0,x,k3,j}^{n+1} - \beta g\theta_{k3+1/2,j}^{n+1}]h_2 + \\
& + \sum_{i=k3}^{k4} [\psi_{0,\bar{y},i,m4}^{n+1}/\tau - \psi_{\bar{y},i,m4}^n/\tau + 0.5\omega_{0,i,m4-1}^{n+1}\psi_{x,i,m4} + \\
& + 0.5\omega_{0,i,m4}^{n+1}\psi_{x,i,m4-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{0,\bar{y},i,m4}^{n+1}]h_1 \\
& \sum_{j=m3}^{m4} [-\psi_{0,x,k4,j}^{n+1}/\tau - \psi_{x,k4,j}^n/\tau + 0.5\omega_{0,k4+1,j}^{n+1}\psi_{y,k4,j}^n + 0.5\omega_{0,k4,j}^{n+1}\psi_{x,k4+1,j}^n - \\
& - \frac{1}{Re}\omega_{0,x,k4,j}^{n+1} - \beta g\theta_{k4+1/2,j}^{n+1}]h_2 + \\
& + \sum_{i=k3}^{k4} [\psi_{0,\bar{y},i,m3}^{n+1}/\tau - \psi_{\bar{y},i,m3}^n/\tau + 0.5\omega_{0,i,m3-1}^{n+1}\psi_{x,i,m3} + \\
& + 0.5\omega_{0,i,m3}^{n+1}\psi_{x,i,m3-1}^n + \frac{1}{Re}\omega_{0,\bar{y},i,m3}^{n+1}]h_1
\end{aligned} \tag{25}$$

Рассмотрим метод фиктивных областей [6] для решения задачи (10)-(17)

$$\frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega^\varepsilon + Gr \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x} - \text{div}(k(x, y) \nabla \psi), \tag{26}$$

$$\Delta \psi^\varepsilon = \omega^\varepsilon \tag{27}$$

$$\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \Delta \theta^\varepsilon \tag{28}$$

$$\psi^\varepsilon|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \vec{n}}|_{\gamma_1} = 0, \tag{29}$$

$$\theta^\varepsilon = \beta_l(x, y, t), \quad (x, y) \in \gamma_l, \quad l = 1, 2, \quad t \in (0, T] \tag{30}$$

где

$$k(x, y) = 1, \quad (x, y) \in D_0 \tag{31}$$

$$k(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D/D_0$$

Таким образом, рассмотрены два метода решений уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости в переменных функция тока, вихрь скорости. Разработан явный метод решения уравнении с учетом условия однозначности давления. Это условие позволяет определить коэффициент, который используется в формуле (18). Рассмотренными методами проведены численные расчеты конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости в двухсвязной области.

Список литературы

- [1] ФРОМ ДЖ. Неустановившееся течение несжимаемой вязкой жидкости. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Изд-во МГУ, 1967. С. 343-381.
- [2] СУД ЭЛРОД. Численное решение уравнений Навье-Стокса в двусвязных областях для течения несжимаемой жидкости // Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12. №5. С. 76-82.
- [3] СИРОЧЕНКО В. П. Численное моделирование конвективных течений вязкой жидкости в многосвязных областях // Труды Международной конференции RDAMM-2001, 2001. Т. 6. Ч. 2, Спец.выпуск. С. 554-562.
- [4] ADLAM J.H. Computation of two-dimensional time-dependent natural convection in a cavity where there are internal bodies. // Computers and Fluids. 1986. Vol. 14. N2. P. 141-157.
- [5] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. // Издательство. Наука. 2-е издание. 1970.
- [6] СМАГУЛОВ Ш.С., ТЕМИРБЕКОВ Н.М., КАМАУБАЕВ К. Моделирование методом фиктивных областей условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сиб. журн.вычисл. мат. 2000. Т. 3, №1. С. 57-62

УДК 532.517.7

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ «ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ» РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ

Н.М. Темирбеков

Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова

Abstract. This article contains one-dimensional problem of gas dynamics of malleable gas with contact gap in Lagrang's variables. For numerical solution of this problem was used Newton's method in detail. This method allow to turn the equations difference scheme of gas dynamics into the "three punctual" linear systems, they are solving with scalar screw. The effect and economy of numerical algorithms are confirmed by the realization them during minimum-machine time with saving adequate accuracy. The received results are set in graphics form.

Keywords: viscous compressible gas, the contact gap, the equation of gas dynamics.

Аңдатпа. Бұл жұмыста Лагранж айнымалысында бір өлшемді түйіспелі үзілісті тұтқыр газдың газ динамика есебі қарастырылған. Берілген есепті сандық іске асыру үшін Ньютон әдісі қолданылған. Бұл әдіспен газ динамика теңдеулер жүйесінің айырымдық сұлбасын сызықты «үшнүктелі» жүйеге келтірілген. Сызықты «үшнүктелі» жүйе скаляр қуалау әдісімен шешілген. Сандық алгоритмнің тиімділігі және үнемділігі жеткілікті дәлдікпен аз уақытта іске асырылуымен расталады. Алынған нәтижелер график түрінде де көрсетілген.

Кілттік сөздер: сығылатын тұтқыр газ, кенеттен өзгеру байқалатын аймақ, газ динамикасының теңдеуі.

Аннотация. Рассматривается одномерная задача газовой динамики вязкого газа с контакт-ным разрывом в переменных Лагранжа. Для численного решения данной задачи подробно рассмотрено применение метода Ньютона. Этот метод позволяет свести разностную схему уравнений газовой динамики к системе линейных "трехточечных" уравнений, решаемых с по-мощью скалярной прогонки. Эффективность и экономичность численных алгоритмов, под-тверждается их реализацией за минимальное машинное время, при сохранении достаточной точности. Полученные результаты приведены и в графическом виде.

Ключевые слова: вязкий сжимаемый газ, контактный разрыв, уравнение газовой динамики.

Во многих областях современной науки возникают задачи, связанные с уравнениями газовой динамики. Уравнения газовой динамики нелинейны, поэтому, единственным эффективным и уни-версальным способом их решения в настоящее время являются численные методы, основанные на использовании суперкомпьютеров. Отдельные разделы газовой динамики развиваются достаточ-но давно и весьма интенсивно. Получено много важных, интересных и "изящных" результатов, и тем не менее общих методов решения газодинамических задач до сих пор не существует. Более того, следует отметить, что здесь в общем случае пока нет даже доказательств существования и единственности решения. Это объясняется сложностью уравнений газовой динамики и прежде всего их нелинейностью [1]. В то же время именно нелинейность порождает такие эффекты, как, например, ударная волна, не имеющая аналога в линейном случае и представляющие большой теоретический и практический интерес. Основным требованием, которому должна удовлетворять любая разностная схема, является свойство сходимости, обеспечивающее близость разностного решения к решению дифференциальной задачи. Сходимость схемы вытекает из ее аппроксимации и устойчивости.

Содержание статьи составляет разработанный эффективный алгоритм численной реализа-ции «логарифмической» разностной схемы для вязкого сжимаемого газа с контактным разры-вом. Следует отметить, что новизна работы заключается в подробном рассмотрении применение метода Ньютона, который позволяет свести разностную схему уравнений газовой динамики к системе линейных "трехточечных" уравнений, решаемых с помощью скалярной прогонки.

На отрезке $[-1;1]$ рассмотрим систему уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа, вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial x}), \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \quad (1)$$

с начально-граничными условиями

$$u(x, 0) = 0, \rho(x, 0) = 0, u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0 \quad (2)$$

Где $\nu = \frac{1}{\rho}$, ρ - плотность, u - скорость.

Система (1) является нелинейной, поэтому единственным эффективным решением этой зада-чи является итерационный метод [2 – 5]. Отметим, что коэффициент μ терпит разрыв первого рода в точке $x = 0$, поэтому в работе значения этого коэффициента в полуцелых точках $i - \frac{1}{2}$ определяется так: $\mu_{i-\frac{1}{2}} = \mu(x_{i-\frac{1}{2}})$.

Построим разностную задачу соответствующую системе (1):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = (\mu_{i-\frac{1}{2}} \frac{\ln \nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \ln \nu_{i-\frac{1}{2}}^n}{\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \nu_{i-\frac{1}{2}}^n} * \frac{u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h})_x \quad (3)$$

$$\frac{\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \nu_{i-\frac{1}{2}}^n}{\tau} = \frac{u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h} \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$S_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\ln \nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \ln \nu_{i-\frac{1}{2}}^n}{\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \nu_{i-\frac{1}{2}}^n} \quad (5)$$

$$F_1 = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{1}{h^2} (\mu_{i+\frac{1}{2}} S_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \mu_{i-\frac{1}{2}} S_{i-\frac{1}{2}} (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})) \quad (6)$$

$$F_2 = \frac{\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \nu_{i-\frac{1}{2}}^n}{\tau} - \frac{u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h} \quad (7)$$

Таким образом из (3),(4) с учетом обозначения (5)-(7) получим

$$\begin{cases} F_1(u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}, \nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \nu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}) = 0, \\ F_2(u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, \nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Систему уравнений (8) решаем методом Ньютона. Метод Ньютона для решения системы $\vec{F}(x) = 0$ имеет следующий вид [4]:

$$\sum_i \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_i} (x_i^{k+1} - x_i^k) + \vec{F}(x^k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

От функции $S(\nu) = \frac{\ln \nu - \ln \nu^n}{\nu - \nu^n}$ производная определяется следующим образом

$$S'(\nu) = \frac{\nu - \nu^n - \nu(\ln \nu - \ln \nu^n)}{\nu(\nu - \nu^n)^2}. \quad (9)$$

Проводя необходимые преобразования окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\mu_{i-\frac{1}{2}} * S_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,k}}{h^2} + \frac{\tau \mu_{i-\frac{1}{2}} * S'(\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,k})}{h^3} (u_i^{n+1,k} - u_{i-1}^{n+1,k}) \right) u_{i-1}^{n+1,k+1} + \\ & + \left(\frac{1}{\tau} + \left(\frac{\mu_{i+\frac{1}{2}} * S_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,k}}{h^2} + \frac{\mu_{i-\frac{1}{2}} * S_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,k}}{h^2} \right) \right) * u_i^{n+1,k+1} - \\ & - \left(\frac{\tau \mu_{i-\frac{1}{2}} * S'(\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,k}) * (u_i^{n+1,k} - u_{i-1}^{n+1,k})}{h^3} + \frac{\tau \mu_{i+\frac{1}{2}} * S'(\nu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,k}) * (u_{i+1}^{n+1,k} - u_i^{n+1,k})}{h^3} \right) * u_i^{n+1,k+1} + \\ & + \left(\frac{-\mu_{i+\frac{1}{2}} * S_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,k}}{h^2} - \frac{\tau \mu_{i+\frac{1}{2}} * S'(\nu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,k}) * (u_{i+1}^{n+1,k} - u_i^{n+1,k})}{h^3} \right) * u_{i+1}^{n+1,k+1} = \\ & = \frac{\mu_{i-\frac{1}{2}} * S'(\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,k})}{h^2} * (u_i^{n+1,k} - u_{i-1}^{n+1,k}) * \left(\nu_{i-\frac{1}{2}}^{n,k} - \nu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1,k} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}} * S'(\nu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,k})}{h^2} * (u_{i+1}^{n+1,k} - u_i^{n+1,k}) * \left(\nu_{i+\frac{1}{2}}^{n,k} - \nu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1,k} \right) + \frac{u_i^{n,k}}{\tau}.$$

Введя соответствующие обозначения, окончательно получим следующее разностное уравнение, которое решается методом прогонки:

$$Au_{i-1}^{n+1,k+1} + Cu_i^{n+1,k+1} + Bu_{i+1}^{n+1,k+1} = 0 \quad (10)$$

Предложенный метод был протестирован на примере нескольких одномерных задач газовой динамики. Приведем результаты численного решения уравнений газовой динамики. Расчеты проводились до момента времени $t = 0.4$ при количестве узлов сетки $N = 1000$. В области $(-1 \leq x \leq 1)$ имеется плоский слой идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$. Слева от точки разрыва $x = 0$, состояние газа следующее [5]: $\rho^{L_1} = 1, u^{L_1} = 0, p^{L_1} = 1$, а справа $\rho^{R_1} = 0.125, u^{R_1} = 0, p^{R_1} = 0.1$. В расчетах использовались и другие варианты входных данных: слева от точки разрыва $x = 0, \rho^{L_2} = 0.445, u^{L_2} = 0.698, p^{L_2} = 3.528$, а справа $\rho^{R_2} = 0.5, u^{R_2} = 0, p^{R_2} = 0.571$. Использовались «исторические» граничные условия-значения величин в граничных точках не менялись со временем. Результаты показывают, что разностная схема газовой динамики лагранжевых переменных является монотонной. На рисунках 1 и 2 приведены результаты численных расчетов. Из представленных графиков следует, что результаты расчетов согласуются с точными решениями.

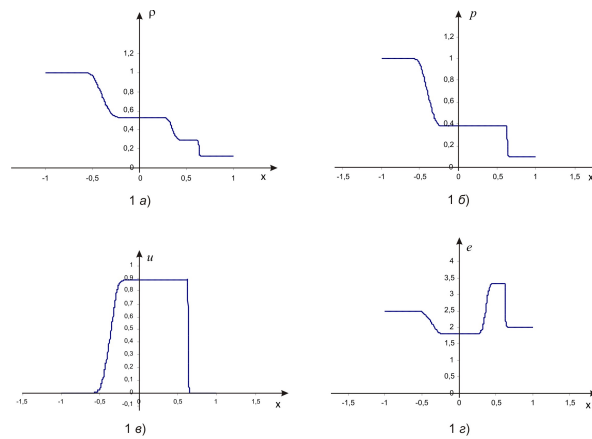


Рисунок 1 Распределение параметров: 1 а)- плотность, 1 б)- давления, 1 в)- скорость, 1 г)- энергия

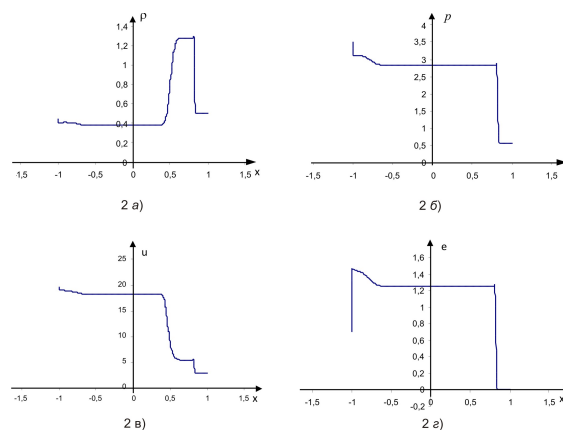


Рисунок 2 Распределение параметров: 2 а)- плотность, 2 б)- давления, 2 в)- скорость, 2 г)- энергия

Список литературы

- [1] Rysbayuly B., Temirbekov N.M. One- dimensional problem of gas dynamics with nonlinear heat conductivity to a cylindrical pipe // Of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries. page 64.
- [2] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). – Москва, Наука, 1973. – 400 с.
- [3] Куликовский А.К., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М., изд. ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [4] Чубаров Л.Б. Квадратурные формулы и приближенные методы решения алгебраических уравнений. Новосибирск, 2002. – 76 с.
- [5] Белоцерковский О.М., Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д. Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере. - М.: «Янус-К», 2000. - 456с.
- [6] Рысбаев Б. Устойчивость разностной схемы для теплопроводного газа с контактным разрывом // Новосибирск, СО АН СССР. Прим. методов фун. анализа в неклассических уравнениях мат. физики. 1988., С. 62-66.
- [7] Рысбайулы Б. Метод конечных разностей для одномерного теплопроводного вязкого сжимаемого газа с контактным разрывом // Сибирский журнал вычислительной математики, РАН СО, 2001 год, № 3, том 4, с. 21-30.

УДК 004.75

ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Н.М. Темирбеков*, Е.А. Малгаждаров**, С.О. Токанова*

* Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева,

**Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова

Аннотация. В данной работе рассматривается метод построения криволинейных взаимно ортогональных сеток в двусвязных областях. Проводится сплайн-интерполяция криволинейных границ и параметризованное распределение узлов сетки. Для численного решения использована неявная разностная схема и метод переменных направлений. Получены результаты криволинейных сеток при различных количествах узлов сетки.

Ключевые слова: криволинейная сетка, уравнение Навье-Стокса, двусвязная область, сплайн-интерполирование.

Аңдатпа. Аталмыш жұмыста екі байланысты аймақта қисық сызықты өзара ортогональды тор тұрғызу тәсілі қарастырылады. Қисық сызықты шекараларға сплайн-интерполяция және тор тораптарын параметрлер бойынша бөлу жүргізілді. Сандық шешу барысында айқын емес

айырымдық сызба және айнымалы бағыттар әдісі қолданылды. Қисық сызықты тордың нәтижелері тор тораптарының әр түрлі сандары бойынша алынды.

Кілттік сөздер: қисық сызықты тор, Навье-Стокс теңдеуі, екі байланысты аймақ, сплайн-интерполяциялау.

Бурное развитие вычислительной техники в последнее время позволило приступить к решению сложных задач сплошных сред, имеющих важное практическое значение. Численное моделирование установившихся течений жидкости в криволинейных границах производилось в большей части работ на основе модели вязкой несжимаемой жидкости. Широкое распространение получили алгоритмы, основанные на уравнениях Навье-Стокса, использующие метод конечных разностей, метод криволинейных сеток, метод конечных элементов и другие методы. Основные численные алгоритмы решения прикладных задач включают важный элемент – разбиение пространственной области на очень маленькие стандартные ячейки (криволинейные треугольники, четырехугольники, тетраэдры, призмы, параллелепипеды и т.д.), в которой исследуются какие-либо процессы. При математическом моделировании физических процессов, часто встречается физическая область с криволинейной границей. Построение криволинейных сеток в таких областях позволяет сократить счетное время и автоматизировать программную реализацию. В последние годы наблюдается бурное развитие методов построения криволинейных сеток и численное решение задач гидродинамики в произвольных криволинейных координатах. Данная проблема рассматривается в работах Вольцингера Н.Е., Клеванного К.А., Пелиновского Е.Н., Годунова С.К., Прокопова Г.П., Яненко Н.Н., Веретенцева В.А., Лисейкина В.Д., Васевой И.А., Данаева Н.Т., Вабищевича П.Н., а также и в работах таких зарубежных авторов, как J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin и т.д., где в основном рассматривается построение криволинейных и динамически адаптивных сеток в односвязных двумерных и трехмерных областях.

Идея построения сетки в двусвязных областях на плоскости рассмотрено в работе Thompson J.F. Отображение физической области в системе координат (x_1, x_2) на расчетную область в системе координат (q_1, q_2) осуществляется способом разрезания области (рис. 1). Кривая внешняя граница 1 – 2 отображается на линию $q_2 = 0, 0 \leq q_1 \leq 1$, а внутренняя граница 3 – 4 отображается на линию $q_2 = 1, 0 \leq q_1 \leq 1$, обход по линии разреза производится дважды. Граница 1 – 3 отображается на линию $q_1 = 0, 0 \leq q_2 \leq 1$, а линия разреза 2 – 4 отображается на линию $q_1 = 1, 0 \leq q_2 \leq 1$.

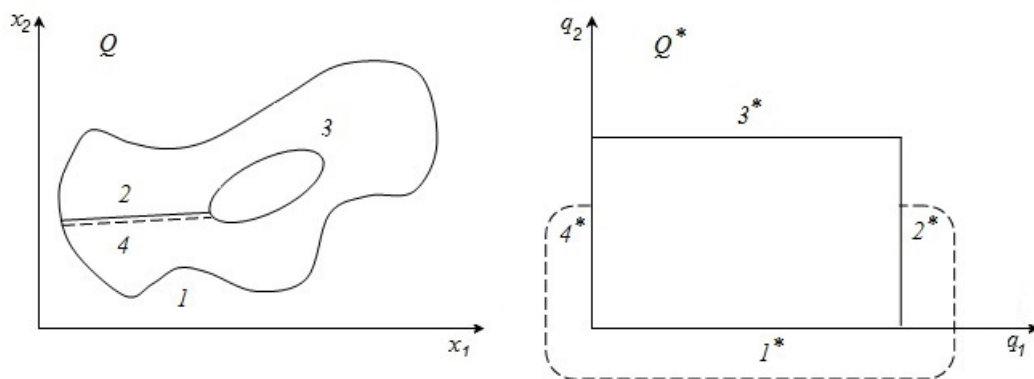


Рисунок 1 Отображение двусвязной криволинейной области Q на расчетный прямоугольник Q^*

При таком отображении построение криволинейных ортогональных сеток внутри двусвязной

области можно осуществить с помощью дифференциального уравнения лапласа [9]. Если границы физической области заданы дискретным множеством точек $(x_i, f(x_i)), i = 1, \dots, n$, тогда определения узлов сетки во внешних и внутренних границах для обеспечения непрерывности и монотонности кривой границы создает некоторые трудности, а также при численном моделировании возникают необходимость изменении количество узлов сетки.

Для обеспечения непрерывности криволинейной границы использовался кубическая сплайн-интерполяция следующего вида [7]:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3. \quad (1)$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются следующим образом:

$$a_i = f(x_i). \quad (2)$$

$$b_i = c_i \frac{h_i}{2} - d_i \frac{h_i^2}{6} + \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}. \quad (3)$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}. \quad (4)$$

$$c_{i-1}h_i + 2(h_i + h_{i+1})c_i + c_{i+1}h_{i+1} = 6 \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h_{i+1}} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} \right), c_1 = c_n = 0, \quad (5)$$

здесь $h_i = x_i - x_{i-1}$. При интерполировании сплайном возникают проблемы с условиями последовательности аргументов по возрастанию, так как рассматриваемая нами физическая область двусвязная. Для решения проблем, границы двусвязной области нужно разделить на соответствующие интервалы.

На внутренних и внешних границах двусвязной области узлы координатной сетки выбираются численной параметризацией по длине дуги кривой. Для этого численно решается следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\Phi \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right), \quad (6)$$

где $\Phi = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} \right)^2}$, $f(x)$ - уравнение кривой.

Уравнения (6) решался численно с помощью неявной схемы по методу прогонки с фиксированной граничной точкой. Для численного построения ортогональной криволинейной сетки в произвольной области использованы дифференциальные уравнения [3], которые в предположении, что $g_{12} = 0$ можно представит в следующем виде.

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{g_{22}g_{11}}{J} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{g_{11}g_{22}}{J} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_2} \right) = 0; \alpha = 1, 2 \quad (7)$$

где g_{11}, g_{22} - компонент метрического тензора.

$$g_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1} \right)^2;$$

$$a_{11} = \frac{x_{1i+1,j} - x_{1i-1,j}}{2h_1}; a_{21} = \frac{x_{2i+1,j} - x_{2i-1,j}}{2h_1};$$

$$g_{22} = a_{12}^2 + a_{22}^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2} \right)^2;$$

$$a_{12} = \frac{x_{1i,j+1} - x_{1i,j-1}}{2h_2}; a_{22} = \frac{x_{2i,j+1} - x_{2i,j-1}}{2h_2};$$

Якобиан преобразования $(x_1, x_2) \rightarrow (q_1, q_2)$:

$$J = \frac{\partial(q_1, q_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} q_{1x_1} & q_{1x_2} \\ q_{2x_1} & q_{2x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{J^{-1}} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(q_1, q_2)} = \frac{1}{\begin{bmatrix} x_{1q_1} & x_{1q_2} \\ x_{2q_1} & x_{2q_2} \end{bmatrix}}.$$

В нашем случае:

$$J = \frac{\partial(q_1, q_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} q_{1x_1} & 0 \\ 0 & q_{2x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{J^{-1}} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(q_1, q_2)} = \frac{1}{\begin{bmatrix} x_{1q_1} & 0 \\ 0 & x_{2q_2} \end{bmatrix}} = \frac{1}{x_{1q_1} x_{2q_2}}.$$

Отсюда получаем следующих значений:

$$g_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \right)^2; g_{22} = a_{12}^2 + a_{22}^2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2} \right)^2;$$

$$a_{11} = \frac{x_{1i+1,j} - x_{1i-1,j}}{2h_1}; a_{22} = \frac{x_{2i,j+1} - x_{2i,j-1}}{2h_2}.$$

Производные входящие в g_{11}, g_{22} , всюду аппроксимированы центральными разностями. Разностные уравнения решаются алгоритмом бегущего счета [8]. Прогонка производилась сначала по направлению q_1 , затем по направлению q_2 . Так как границы 1-3, 2-4 физической области совпадают, по направлению q_1 использовался метод циклической прогонки [8], с периодическими условиями, а по направлению q_2 применялась скалярная прогонка. По предложенному выше алгоритму проведены методические численные расчеты. В данной работе этот алгоритм численного решения используется для двусвязной области с криволинейными границами (рис. 2, 3).

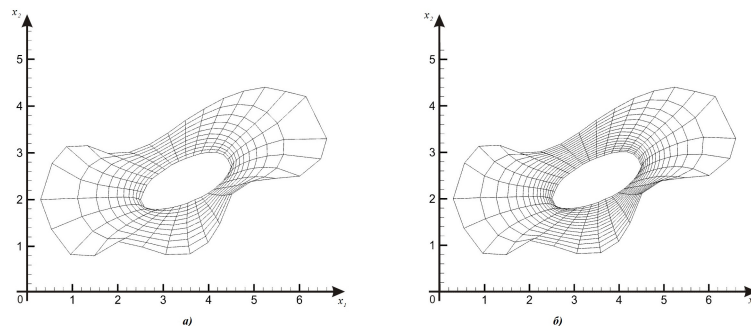


Рисунок 2 Физическая область построение сетки с размерностью а) 30x10, б) 30x15

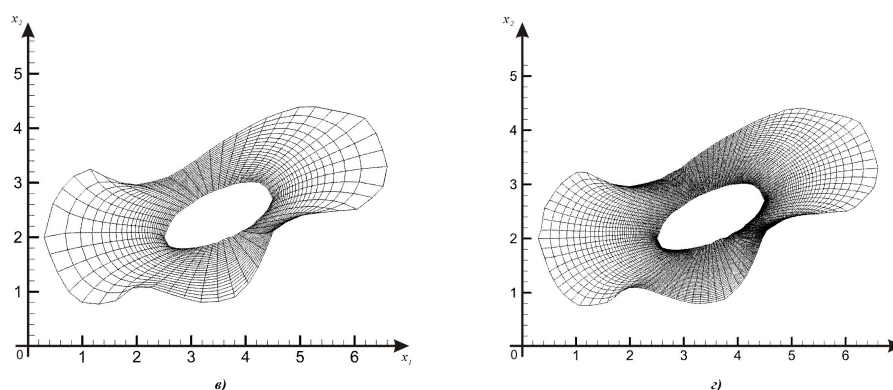


Рисунок 3 Физическая область построение сетки с размерностью в) 50x25, г) 100x50

С помощью полученных криволинейных сеток можно моделировать течение сжимаемых и несжимаемых жидкостей при различных условиях в двусвязных криволинейных областях. Описанная методика построения сеток позволяет автоматически менять количество узлов сетки и обеспечить непрерывность криволинейной границы.

Список литературы

- [1] Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // ЖВМ и МФ, 1967. – Т.7, №5, – С.1032-1059.
- [2] Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, – 1977. – Т.8, №4 – С.157-163.
- [3] Данаев Н.Т. Об одной возможности численного построения ортогональных сеток // Числен. методы механ. сплошной среды. Новосибирск, 1983. – Т.14. – №3. – С. 42-53.
- [4] Вабищевич П.Н. Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики // ЖВМ и МФ, 1989. – Т.29. – №6. – С.902-914.
- [5] Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical grid generation, foundations and applications. New York, etc.: Elsevier, 1985.
- [6] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. – 432 с.
- [7] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. – 616 с.
- [8] Смагулов Ш.С., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Численное решение уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в каналах с пористой стенкой // Прикладная механика и техническая физика. Новосибирск, 1995. – Т.36. – №5. – С.21-29.
- [9] Темирбеков Н.М., Мнафиянов Е.М., Малгаждаров Е.А. Баилова А. Тепло-массообмен несжимаемой жидкости в двусвязных областях с произвольной криволинейной границей // Математическое моделирование научно-технологических и нефтегазодобывающей промышленности: Материалы VI Казахстанско-Российской международной научно-практической конференции 11-12 октября 2007 г, г. Астана / ЕНУ им. Л. Гумилёва. – Астана, 2007. – С.317-322.

УДК 519.6+517.9

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА

Л.Н. Темирбекова

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы

Abstract. In this paper considers two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation to restore power to more information on the solution of the direct problem. The formulation of the direct problem, in which one of the initial condition is the Dirac delta function. Direct problem replaced the Goursat problem, which has classical derivatives. Goursat problem with the data on the characteristics of numerically solved the finite-difference method. Two-dimensional inverse problem is solved numerically using the integral equation of Gelfand-Levitan. The numerical solution of the integral equation of Gelfand-Levitan, which is a special case of a integral Fredholm equation of the first kind, the method of regularization M.M. Lavrentiev, combined with the Landweber iteration method.

Keywords: hyperbolic equation, two-dimensional inverse problem, the method of Gelfand-Levitan, the Fredholm equation of the first kind, the Landweber iteration method, regularization method M.M. Lavrentiev, regularization parameter, Heaviside step function, Dirac delta function.

Аңдатпа. Бұл жұмыста екі өлшемді гиперболалық теңдеу үшін кері есеп қарастырылған, кері есеп тура есептің шешімінің қосымша мәліметі арқылы коэффициентті орынына келтіру болып табылады. Бастапқы шарттың бірі Дирак дельта-функциясы болатын тура есеп берілген. Тура есеп Гурса есебімен алмастырылған. Ол классикалық туындылардан тұрады. Характеристикаларда берілген мәндерімен Гурса есебі ақырлы-айырымды әдіспен сандық шешілген. Екі өлшемді коэффициентті кері есеп Гельфанд-Левитан интегралдық теңдеуі арқылы сандық шешілген. Гельфанд-Левитан интегралдық теңдеуі бірінші реттік Фредгольм интегралдық теңдеуінің жеке түрі болып табылады. Бұл теңдеудің сандық шешімін алу үшін М.М. Лаврентьев регуляризациясымен Ландвебер итерация әдісі қолданылады.

Кілттік сөздер: гиперболалық теңдеу, екі өлшемді коэффициентті кері есеп, Гельфанд-Левитан әдісі, бірінші реттік Фредгольм теңдеуі, Ландвебер итерация әдісі, регуляризация параметрі, Хэвисайд тэта функциясы, Дирак дельта функциясы.

Аннотация. В данной работе рассматривается двумерная обратная задача для уравнения гиперболического типа по восстановлению источника по дополнительной информации о решении прямой задачи. Дана постановка прямой задачи, в которой одним из начальных условий является дельта-функция Дирака. Прямая задача заменена задачей Гурса, которая имеет классические производные. Задача Гурса с данными на характеристиках численно решена конечно-разностным методом. Двумерная коэффициентная обратная задача численно решена методом интегрального уравнения Гельфанда-Левитана. Численное решение интегрального уравнения Гельфанда-Левитана, которая является частным случаем интегрального уравнения Фредгольма первого рода, применяются метод регуляризации М.М. Лаврентьева в сочетании с методом итерации Ландвебера.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, двумерная коэффициентная обратная задача, метод Гельфанда-Левитана, уравнение Фредгольма первого рода, метод итерации Ландвебера, метод регуляризации М.М. Лаврентьева, параметр регуляризации, тэта-функция Хэвисайда, дельта - функция Дирака.

Наиболее важные результаты по определению коэффициента одномерной обратной задачи для уравнения гиперболического типа является работа И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [1]. В работе рассматривается спектральный вариант постановки, даются методы восстановления дифференциального уравнения второго порядка по его спектральной функции. Решение этой обратной задачи сводится к решению некоторого линейного интегрального уравнения, называемого уравнением Гельфанда-Левитана. Подробной библиографией работ по двумерным коэффициентным обратным задачам для уравнения гиперболического типа можно ознакомиться в монографии В.Г. Романова [2], С.И. Кабанихина [3]. Отметим, что из результатов В.Г. Романова [2] для двумерной обратной задачи для гиперболического уравнения следует теорема о локальной однозначной разрешимости и теорема единственности в классе функции, аналитических по переменной и непрерывных по переменной x . Также в работе А.С. Благовещенского [4] доказаны теоремы об однозначной разрешимости. Для многомерной постановки необходимо отметить подход к определению коэффициента волнового уравнения, изложенный в работе М.И. Белишева [5]. Предлагаемый подход к обратным задачам основан на схеме по восстановлению спектральной функции в трехмерной области с границей ограниченной кривизны. Статья А.С. Благовещенского и М.И. Белишева [6] посвящена некоторым аспектам теории многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, описывающих, главным образом, волновые процессы.

В выше изложенной работе излагаются некоторые результаты, связанные с применением многомерных аналогов уравнения Гельфанда-Левитана (интегральных, сокращенно МАУГЛИ) и М.Г. Крейна к обратным начально-краевым задачам теории распространения волн. Методика исследования в существенном использует:

- 1) идею локальности, основанную на конечности скорости распространения;
- 2) связь обратных задач с теорией граничного управления.

В работе С.И. Кабанихина [7] построено семейство линейных интегральных уравнений Фредгольма, зависящее от параметра N , по решению которого определяется функция $a_N(x, y)$, сходящаяся к $q(x, y)$ при N , стремящемся к бесконечности. С.И. Кабанихиным и Г.Б. Бакановым [8] был исследован дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения. Данная работа посвящена разработке численных методов решения коэффициентной обратной задачи с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа входящих в вышеприведенные группы. При использовании схем регуляризации М.М. Лаврентьева или А.Н. Тихонова приближенное решение находится из систем уравнений с положительно определенной и хорошо обусловленной матрицей. Разработан и численно реализован итерационный метод с регуляризацией М.М. Лаврентьева [9].

Настоящая работа посвящена разработке численного метода решения коэффициентной обратной задачи для двумерного уравнения гиперболического типа, основанная на методе Гельфанда-Левитана.

Постановка и решение двумерной коэффициентной обратной задачи

Рассмотрим последовательность прямых задач [3]

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} + q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad k \in Z, \quad (1)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \quad (2)$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}. \quad (3)$$

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x, y)$ по дополнительной

информации о решении прямой задачи (1)-(3)

$$u^{(k)}(o, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in Z, \quad (4)$$

где R - множество вещественных чисел, Z - множество всех целых чисел, δ - дельта-функция Дирака, k - некоторое фиксированное целое число, $h(y) = e^{iky}$.

Необходимое условие существования решения задачи (1)-(4) является следующим:

$$f^{(k)}(y, 0) = 0.$$

Обобщенное решение прямой задачи (1)-(3) является кусочно-непрерывным решением интегрального уравнения

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2} \theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) u^{(k)}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau \quad (5)$$

Здесь $\theta(t)$ - тэта - функция Хэвисайда. Из интегрального уравнения (5) следует

$$u(x, y, t) \equiv 0, \quad t < |x|, \quad (x, t) \in R \times R_+ \quad (6)$$

При $t > |x|$ имеем формулу

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2} - \frac{1}{2} \iint_{\square(x, y, t)} q(\xi, y) u^{(k)}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \quad (7)$$

здесь $\square(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : |\xi| \leq \tau \leq t - |x - \xi|\}$. Из формулы (6) следует, что

$$u^{(k)}(x, y, |x|) = \frac{h(y)}{2} \quad (8)$$

Таким образом, для решения прямой задачи в классе обобщенных функций имеем задачу Гурса (1), (8) которое определяет классическое решение задачи (1)-(3) (Рис.1).

Введем последовательность вспомогательных прямых задач:

$$\omega_{tt}^{(m)} = \omega_{xx}^{(m)} + \omega_{yy}^{(m)} + q(x, y) \omega^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad m \in Z, \quad (9)$$

$$\omega^{(m)}(0, y, t) = e^{imy} \delta(t), \quad \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (10)$$

$$\omega^{(m)}|_{y=\pi} = \omega^{(m)}|_{y=-\pi}. \quad (11)$$

Решение задачи (9)-(10) удовлетворяет следующему уравнению

$$\omega^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{imy} [\delta(x + t) + \delta(x - t)] + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) \omega(\xi, y, \tau) d\xi d\tau \quad (12)$$

где $\Delta(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : 0 < \xi \leq x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi\}$ треугольник образованный характеристиками, проходящими через точку (x, y, t) и осью t .

В работе [3] показано, что

$$\omega(x, y, t) \equiv 0, \quad 0 < x < |t|. \quad (13)$$

Поэтому фактической областью интегрирования в уравнении (12) для точек $(x, y, t) \in D = \{(x, y, t) : x \geq |t|\}$ будут прямоугольники $\square(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) | \tau \leq \xi \leq x - |t - \tau|\}$, образованный характеристиками, выходящими из точек $(0, y, 0)$, (x, y, t) (Рис.2).

Обозначим

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = \omega^{(m)}(x, y, t) - \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x - t) + \delta(x + t)]. \quad (14)$$

Кусочно-непрерывная функция $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t)$ есть решение уравнения

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{4}\theta(x - |t|) \left[\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi \right] + \frac{1}{2} \iint_{\square(x, y, t)} q(\xi, y) \tilde{\omega}^{(m)}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \quad x > 0 \quad (15)$$

Таким образом

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{h(y)}{4} \int_0^x q^{(m)}(\xi, y) d\xi, \quad x > 0. \quad (16)$$

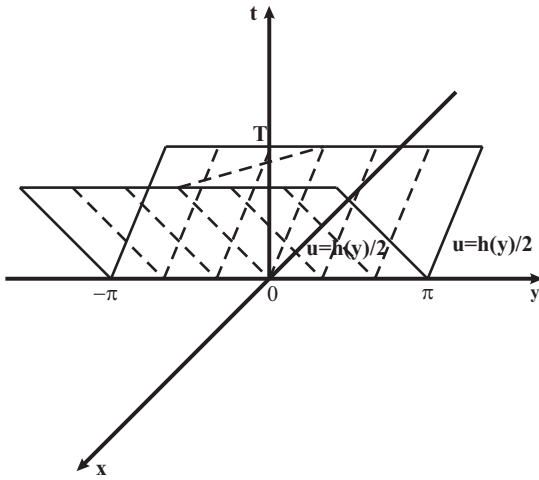


Рисунок 1 Схема решения прямой задачи (1),(8)

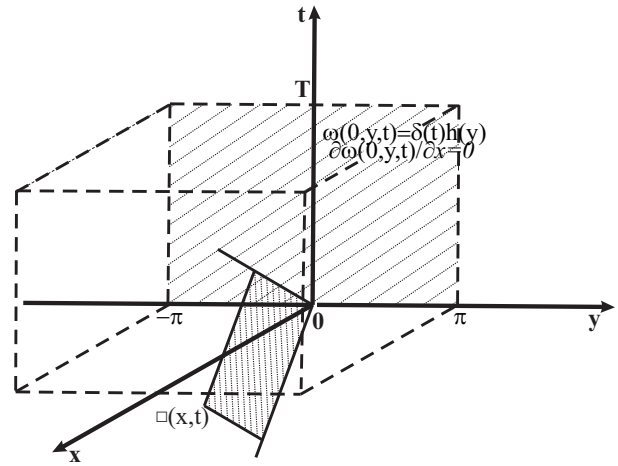


Рисунок 2 Область решения обратной задачи (1)-(4)

Решение задачи (1), (4) может быть представлено в виде

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t - s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds, \quad (17)$$

Используя (8), получим

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t - s) \{e^{(imy)}(\delta(x + t) + \delta(x - t)) + \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s)\} ds$$

Учитывая (9) и (10), преобразуем формулу (12)

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2}[f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x)] + \int_{-x}^x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds,$$

При $x > |t|$ имеем

$$\frac{1}{2}[f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x)] + \int_{-x}^x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds = 0. \quad (18)$$

При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (18) является интегральным уравнением первого рода относительно функции $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t)$, $t \in (-x, x)$.

Дискретизация уравнения Гельфанда - Левитана

В уравнений Гельфанда-Левитана (18) интеграл заменим суммой и при $t = t_j, j = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N$ получим систему, состоящую из $(2N+1)$ уравнений с $M \times (2N+1)$ неизвестными $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i)$, $m = 1, 2, \dots, M; i = -N, -N+1, \dots, N-1, N$;

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=-N}^N f_m^{(k)} \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i) \tau = -\frac{1}{2}[f^{(k)}(y, t_j+x) + f^{(k)}(y, t_j-x)]. \quad (19)$$

Уравнение (19) в матричной форме можно записать в следующем виде

$$\sum_{m=1}^M F_m \vec{\omega}^{(m)} = \vec{f}^{(k)}, \quad (20)$$

где $F_m = \{f_m^{(k)}(t_j - s_i)\}_{i=-N, N, j=-N, N}$, $m = 1, 2, \dots, M$, матрица размерности $(2N+1) \times (2N+1)$.

Искомые векторы

$$\vec{\omega}^{(m)} = \{\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i)\}_{i=-N, N}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (21)$$

Правая часть

$$\vec{f}^{(k)} = \{-0.5(f^{(k)}(y, t_j+x) + f(y, t_j-x))\}_{j=-N, N}. \quad (22)$$

Перепишем уравнение (19) в операторной форме при $m = 1$

$$A^{(k)} \tilde{\omega}(x, y, t) = f^{(k)} \quad (23)$$

Для численного решения уравнения Гельфанда-Левитана (19) используется метод простой итерации (в теории некорректных задач - метод итераций Ландвебера) в сочетании с регуляризацией М.М. Лаврентьева, метод сопряженных градиентов, метод квадратного корня. Уравнение (23) заменяется следующим корректным уравнением

$$(\mu E + A^{(k)}) \tilde{\omega} = f_{\gamma}^{(k)} \quad (24)$$

где $f_{\gamma}^{(k)} = f^{(k)} + \mu \tilde{\omega}_0$, E -единичная матрица, ν - положительный параметр регуляризация М.М.Лаврентьева, $\tilde{\omega}_0$ - пробное решение, т.е. некоторое приближение к искомому решению.

Итерационный процесс с регуляризацией М.М. Лаврентьева примет вид

$$\frac{\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n}{\tau} + (\mu E + A^{(k)})\tilde{\omega} = f_{\gamma}^{(k)}.$$

Численные эксперименты

На основе методов итерации Ландвебера, сопряженного градиента и квадратного корня решения двумерной коэффициентной обратной задачи по восстановлению источника $q(x, y)$ разработаны эффективные алгоритмы численной реализации и написаны программные коды. Проведены многочисленные расчеты нахождения искомой функции $\tilde{\omega}(x, y, t)$, $t \in (-x_L, x_L)$, $x \in (0, x_L)$, $y \in (0, x_L)$ и по нему восстановлены коэффициенты $q(x, y)$.

Прямая задача (1)-(3) заменяется эквивалентной задачей, которая состоит из множества задач Гурса (1), (8) для каждого заданного y . Для получения дополнительной информации (4) о решении прямой задачи, при численном решении задачи (1), (8) разностной схемой, необходимо использовать более мелкую сетку разбиения расчетной области (Рис.1).

В ходе реализации численного эксперимента по алгоритму метода итерации Ландвебера начальное приближение было выбрано равным правой части системы линейных уравнений (24). В качестве задаваемых данных были взяты следующие параметры: отрезок $[-x_L, x_L]$ по оси t , отрезок $[0, x_L]$ по оси x , количество слоев n , параметр регуляризации μ метода М.М. Лаврентьева (выбирается способом подбора).

На рисунках 3, 4, 5 показаны результаты численных расчетов при $e = 0,001$ функции

$$q(x, y) = \frac{e}{(x - 0.51)^2 + (y - 0.51)^2},$$

и

$$\tilde{\omega}(x, y, x - 0) = \frac{e}{4(y - 0.51)} \left(\operatorname{arctg} \frac{x - 0.51}{y - 0.51} - \operatorname{arctg} \frac{-0.51}{y - 0.51} \right).$$

В ходе вычисления в данном примере количество слоев n было взято равным 40, параметр регуляризации $\mu = 0.5$, $x_L = 1$ при этом были получены следующие данные: погрешность $\|\tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{gh}\| = 0.00037957728$, количество итерации 214, количество машинного времени 2 мин. 10,48 сек.

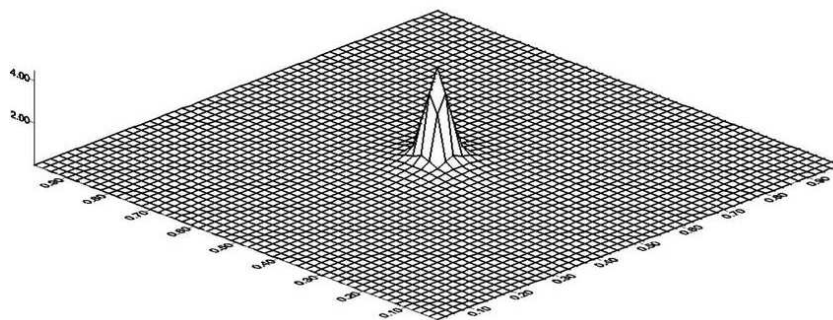


Рисунок 3 График функции $q(x, y)$ при $n = 40$

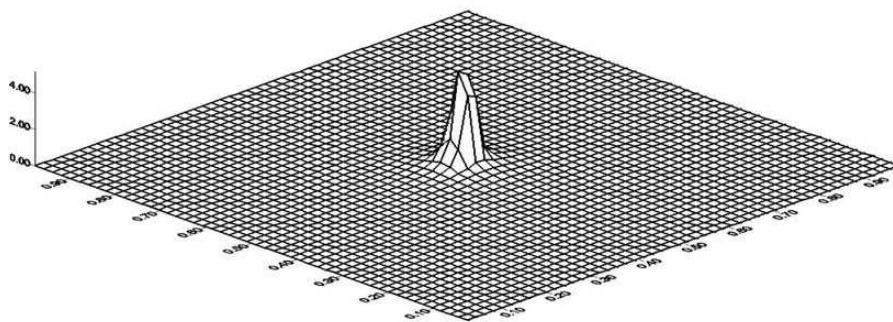


Рисунок 4 График приближенного решения функции $q(x, y)$ при $n = 40$

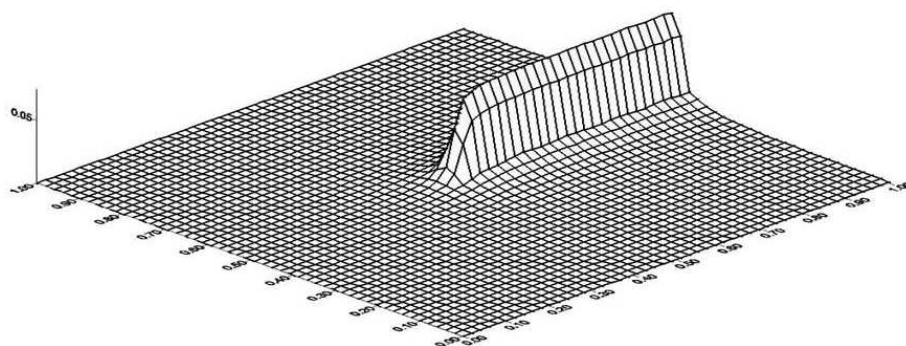


Рисунок 5 График приближенного решения функции $\tilde{w}(x, y, x)$ при $n = 40$

Результаты расчетов показывают, что по количеству итерации метод сопряженных градиентов является наиболее эффективным из тех методов, которые были реализованы, для решения методом квадратного корня требуется меньшее количество машинного времени, а метод Ландвебера с регуляризацией М.М. Лаврентьева является простым в реализации.

Список литературы

- [1] Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1951. Т.15, -№4, с.309-360.
- [2] Обратные задачи математической физики. / Романов В.Г. М.: Наука, 1984-263 с.
- [3] Обратные и некорректные задачи. / Кабанихин С.И. Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2009-457с.
- [4] О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. А.С. Благовещенский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1971. Т. 115. с. 28-38.
- [5] Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения. М.И. Белишев // Докл. АН СССР. 1987. Т.297, -№3. с.524-527.

- [6] Многомерные аналоги уравнений типа Гельфанда-Левитана-Крейна в обратной задаче для волнового уравнения. М.И. Белишев, А.С. Благовещенский // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1992. с.50-63.
- [7] О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболического уравнений. С.И. Кабанихин // Докл. АН СССР. 1989. Т.309, №4. с.791-795.
- [8] Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения. С.И. Кабанихин, Г.Б. Баканов // Сибирский математический журнал, 1999, Т.40, №2, с. 307-324.
- [9] Некорректные задачи для дифференциальных уравнений. / Лаврентьев М.М. Учебное пособие. НГУ, 1981 - 75 с.

УДК 681.5.015

ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ СМАЗАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

А.С. Тлебалдинова, Н.Ф. Денисова, Д.Ж. Касымханова, М.А. Ракишева, К.Ж. Байгелов

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева
Казахский национальный аграрный университет, г. Алматы

Abstract. In paper linear methods of reconstruction blurry (distortion and/or noisy) images are considered. The problem is reduced to the solution of one-dimensional Fredholm integral equations of convolution type I sort. On the basis of the conducted research justification of a choice of a method for processing of images of fast-moving objects in real time is given.

Keywords: image distortion, ill-posed problems.

Аңдатпа. Бұл мақалада көмескі (бұрмаланған, шуылды) кескіндерді реконструкциялаудың сызықтық әдістері қарастырылады. Есеп Фредгольмнің I текті бірөлшемді интегралдық теңдеулерін шешуге негізделеді. Жасалған зерттеулер нәтижесінде шынайы уақыт режимінде жылдам қозғалатын объект кескіндерін өңдеу әдісін таңдауға негіздеме жасалған.

Кілттік сөздер: көмескі кескіндер, жаңылыс есептер.

Аннотация. В работе рассматриваются линейные методы реконструкции смазанных (искаженных и/или зашумленных) изображений. Задача сводится к решению одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода типа свертки. На основании проведенного исследования дано обоснование выбора метода для обработки изображений быстро движущихся объектов в режиме реального времени.

Ключевые слова: искажение изображения, некорректные задачи.

Цель работы заключается в исследовании методов реконструкции смазанных (искаженных и/или зашумленных) изображений и в разработке алгоритмов реконструкции смазанных изображений, которые позволят обрабатывать изображения быстро движущихся объектов в режиме реального времени.

Математически задача реконструкции смазанных изображений сводится к уравнению Фредгольма I рода типа свертки [1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x - \xi)w(\xi, y) = g(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty \quad (1)$$

где $w(\xi, y), g(x, y)$ - распределение интенсивностей по исходному и смазанному изображениям; $k(x - \xi)$ - ядро уравнения, физически функция рассеяния точки (PSF – point spread function):

$$k(x) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{при } x \in [-\Delta, 0], \\ 0, & x \notin [-\Delta, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

Δ - величина смаза.

Задача решения уравнения (1) является некорректной (неустойчивой). Для решения представленной некорректной задачи были исследованы следующие методы, которые относятся к классу линейных методов восстановления: инверсная фильтрация, параметрическая фильтрация Винера, метод преобразования Фурье с регуляризацией Тихонова и метод квадратур также с регуляризацией Тихонова. Одним из самых простых методов реконструкции смазанного изображения является метод инверсной фильтрации. Смысл этого метода в том, что идеальное изображение $w(\xi, y)$ проходит через линейную искажающую систему с ФРТ $k(x)$ и повреждается аддитивным шумом. Предполагается, что между шумом и идеальным изображением корреляция отсутствует [2, с. 393]. Инверсная фильтрация предполагает получение оценки Фурье-преобразования исходного изображения делением Фурье-преобразования искаженного изображения на частотное представление искажающей функции. То есть метод можно выразить с помощью приближения [3, с. 183]:

$$w_\alpha(\xi, y) = \frac{g(x, y)}{k(x - \xi)} \quad (3)$$

затем следует выполнить обратное преобразование Фурье к функции $w_\alpha(\xi, y)$, где $g(x, y)$ - спектр искаженного изображения. В виде формулы инверсный фильтр можно выразить так [4, с. 183]:

$$w_\alpha(\xi, y) = W_\alpha(\omega, y) + \frac{g(x, y)}{k(x - \xi)} \quad (4)$$

Методы обратной фильтрации имеют ряд недостатков:

- при синтезе восстанавливающего фильтра не учитывается факт влияния объектов, расположенных вне поля зрения объектива, на значение яркости на краях искаженного изображения. При восстановлении реально искаженных изображений таким фильтром возникают краевые эффекты, компенсация которых является отдельной задачей при реализации алгоритмов восстановления изображения на основе пространственной фильтрации;
- на практике изображение обычно бывает зашумлено. Это связано с особенностями регистрации. Полное выражение, определяющее спектр изображения, имеет следующий вид:

$$\tilde{g}_y = g_y(x) + k_y(x) \quad (5)$$

где $k(x)$ спектр шума. Инверсная фильтрация приведет к тому, что спектр шума будет отмасштабирован. Это означает, что на частотах, в которых значение невелико значение спектра существенно возрастет. Изображение, которое должно быть восстановлено, окажется существенно

зашумлено. Для устранения неустойчивости и сингулярности в методе инверсной фильтрации существует типичный подход, именуемый псевдоинверсной фильтрацией, в котором осуществляется ограничение частотного диапазона “малой” окрестностью начала отсчета, а затем выполняется обратное ПФ. Псевдоинверсная фильтрация не решает проблем краевых эффектов и наличия нулей передаточной функции формирующей системы в рабочем диапазоне частот.

В отличие от инверсной фильтрации метод оптимальной (в частности, параметрической) фильтрации Винера (также фильтр минимального среднеквадратического отклонения [3, с.391]) в процессе восстановления помимо свойств искажающей функции учитывает и статические свойства шума. Рассмотрим данный метод более подробно.

Существует множество методов восстановления изображений, одним из которых и, довольно распространенным, является фильтр Винера. Метод фильтрации Винера (в частности, параметрической) в процессе восстановления помимо свойств искажающей функции также учитывает и статические свойства шума. В методе фильтрации Винера [5, с.105-109; 6, с.48] изображения и шум рассматриваются как случайные процессы, и поиск решения обратной задачи идет исходя из условия минимума среднеквадратического отклонения найденного приближения (оценки) от неискаженного изображения. Решение интегрального уравнения (1) с помощью фильтра Винера имеет вид

$$w_y(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-\omega)}{|H(\omega)|^2 + S_{ny}(\omega)/S_{wy}(\omega)} G_y(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega, \quad (6)$$

Выражение (6) легко решается с помощью преобразования Фурье с приведением в дискретную форму. Действительно, после преобразования Фурье выражение (6) можно записать в следующем виде:

$$W(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_{\eta\eta}(u, v)/S_{ff}(u, v)} = \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_{\eta\eta}(u, v)/S_{ff}(u, v)} \quad (7)$$

где W , $S_{\eta\eta}$ и S_{ff} соответствует двумерному дискретному преобразованию Фурье линейного фильтра $w(x, y)$, энергетическому спектру шума и спектру неискаженного изображения. В результате получаем дискретный аналог интегрального уравнения Винера-Хопфа в виде системы уравнений. Данную систему уравнений решаем с помощью матрицы размера $(n+1) \times (n+1)$ и вектора-столбца.

Для реализации фильтра Винера необходимо оценить энергетические спектры шума и неискаженного изображения $S_{\eta\eta}(u, v)$ и $S_{ff}(u, v)$. Во многих случаях энергетический спектр неискаженного изображения вычисляется приблизительно при помощи либо периодограммы или метода Блэкмана-Тьюки (Blackman-Tukey).

При постоянстве спектральной функции шума $S_{\eta\eta}$ (уровень «белого шума») происходят соответствующие упрощения. На практике спектр неискаженного изображения S_{ff} редко бывает известен. Поэтому часто, особенно если спектры шума и неискаженного (истинного) изображения оценить невозможно, прибегают к аппроксимации выражения (7) [3, с.392]. При этом соотношение $S_{\eta\eta}(u, v)/S_{ff}(u, v)$ в выражении (7) заменяется константой (параметром) K , а фильтр называется параметрическим винеровским фильтром [4, с.184]. Таким образом, примем:

$$K(u, v) = K_c = const, \quad (8)$$

получаем

$$W(u, v) \approx W^K(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + K_c}. \quad (9)$$

Существует множество научных исследований по определению регуляризирующего параметра K_c [7][8], но большинство из них требуют очень сложные математические вычисления и непригодны для практической реализации. Поэтому необходимым является представить более эффективный метод определения данного параметра NSPR, схема алгоритма которого представлена ниже (Рисунок 1).

Используя понятие «дисперсия шума» σ_η^2 , представляется возможным найти подходящую функцию для данной дисперсии, которая бы позволяла рассчитать параметр K_c наиболее близкий к тому значению, который был выбран в ходе моделирования с различными уровнями шума.

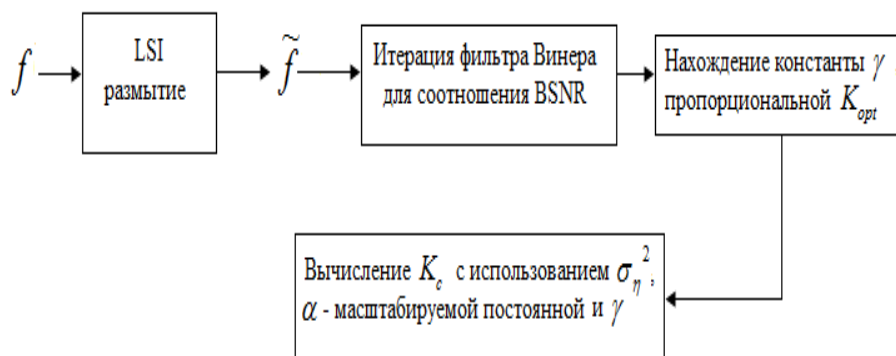


Рисунок 1 Схема алгоритма нахождения параметра для фильтра Винера

Устойчивость метода параметрической фильтрации Винера повышается с увеличением отношения $S_{\eta\eta}(u, v)/S_{ff}(u, v)$, играющего роль отношения помеха/сигнал. При этом усиление влияния помехи не только стабилизирует решение, но также и вызывает рост погрешности решения. Применение параметрического фильтра Винера позволяет эффективно восстанавливать искаженные изображения, однако использование константы в качестве оценки для отношения энергетических спектров не всегда приводит к удовлетворительному решению обратной задачи [3, с.395]. Таким образом, для решения задачи реконструкции смазанных изображений быстро движущихся объектов в режиме реального времени метод параметрической фильтрации Винера является недостаточным. В общей практике наилучшие результаты данный фильтр помогает достичь для подавления шума в аудио. Также одним из решающих факторов является то, что фильтр Винера показывает себя ненадежным методом при реконструкции именно быстро движущихся объектов [9].

Для повышения устойчивости решения задачи в сочетании с преобразованием Фурье (ПФ) используется регуляризирующий алгоритм Тихонова, который составляет основу метода регуляризации Тихонова.

Обратная задача. Решение уравнения (1) методом ПФ с регуляризацией Тихонова может быть записано в виде обратного ПФ [2,3,4]:

$$w_\alpha(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(\omega, y) e^{-i\omega\xi} d\omega, \quad (10)$$

где регуляризованный одномерный Фурье-спектр решения (при некотором y равен)

$$W_\alpha(\omega, y) = \frac{K(-\omega)G(\omega, y)}{L(\omega) + \alpha M(\omega)}, \text{ причем} \quad (11)$$

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{i\omega x} dx = \frac{\sin(\omega\Delta)}{\omega\Delta} + \frac{\cos(\omega\Delta) - 1}{\omega\Delta}i \quad (12)$$

$$G(\omega, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)e^{i\omega x} dx \quad (13)$$

Здесь $K(\omega)$ и $G(\omega, y)$ - одномерные Фурье-спектры ядра и правой части уравнения (1). $\alpha \geq 0$ - параметр регуляризации, $M(\omega)$ - регуляризатор.

$$L(\omega) = |K(\omega)|^2 = K(\omega)K(-\omega) = Re^2K(\omega) + Im^2K(\omega) \quad (14)$$

Фурье-спектр ядра $K(\omega)$ (не зависящего от y) можно вычислить аналитически согласно формуле (12), а $G(\omega, y)$ можно найти для каждого значения y с помощью дискретного преобразования Фурье.

Решение большого числа примеров показывает [5,6], что метод ПФ дает менее неустойчивое решение. Это обусловлено, тем, что метод ПФ дает аналитическое решение и при численной реализации метода преобразования Фурье автоматически срабатывает усечение спектра частот.

Для устойчивого решения обратной задачи интегрального уравнения (1) воспользуемся более адекватным методом, использующий лишь арифметические операции - методом квадратур с регуляризацией Тихонова.

Полагая y параметром, интегральное уравнение типа свертки (1) можно записать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x - \xi)w_y(\xi)d\xi = g_y(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (15)$$

Полагаем, что правая часть $g_y(x)$ уравнения задана при $x \in [c, d]$ при некотором фиксированном значении y , причем пределы $[c, d]$ не зависят от y , а функция $w_y(\xi)$ ищется при $\xi \in [a, b]$ (обычно $[a, b] \subseteq [c, d]$). При этом уравнение (8) будем рассматривать как уравнение общего вида:

$$Kw_y \equiv \int_a^b k(x, \xi)w_y(\xi)d\xi = g_y(x), \quad c < x < d, \quad (16)$$

где

$$k(x, \xi) = k(x - \xi) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{при } -\Delta \leq x - s \leq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (17)$$

Здесь K - интегральный оператор.

Уравнение (9) заменяем конечной суммой по формуле прямоугольников. Получим [1]:

$$Kw_j \equiv \sum_{l=1}^n k_{il}w_{j,l} = g_{j,i}, \quad i = \overline{1, n + \Delta}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (18)$$

где

$$k_{il} = \begin{cases} 1/\Delta & \text{при } -i - \Delta \leq l \leq i - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (19)$$

для простоты опустив индекс j , получим

$$Kw \equiv \sum_{l=1}^n k_{il}w_l = g_i, i = \overline{1, n + \Delta}, \quad (20)$$

Здесь K -ленточная матрица.

В результате при каждом фиксированном номере строки j имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (20). Причем система избыточная, так как в ней $n + \Delta$ уравнений и n неизвестных w_l .

(20) уравнение запишем в кратком виде:

$$Kw = g. \quad (21)$$

Здесь g – вектор-столбец размера $(n + \Delta) \times 1$, K - матрица размера $(n + \Delta) \times n$ из коэффициентов k_{il} , w - искомый вектор-столбец размера $n \times 1$.

Так как система является избыточной, ее решение осуществляется методом наименьших квадратов Гаусса, согласно которому вместо СЛАУ (21) решается следующая СЛАУ:

$$K^T K w = K^T g \quad (22)$$

(22) система из n уравнениями и с n неизвестными, K^T - транспонированная матрица (размер матрицы $n \times (n + \Delta)$).

Задача решения СЛАУ (22) является неустойчивой. Для получения устойчивого решения применяется метод регуляризации Тихонова [1,6,7]. В этом методе вместо (22) СЛАУ решается следующая система:

$$(\alpha I + K^T K)w_\alpha = K^T g, \quad (23)$$

где I - единичная матрица размером $n \times n$, α – параметр регуляризации.

$$w_\alpha = (\alpha I + K^T K)^{-1} K^T g. \quad (24)$$

Решение (24) нужно выполнить для каждого значения $j = \overline{1, m}$ - номера строки в изображении. В результате получим регуляризованное решение в виде матрицы w_α с элементами $(w_\alpha)_{jl}$.

В работе исследованы линейные методы реконструкции смазанных изображений и среди них выбран метод квадратур с регуляризацией Тихонова, который позволяет эффективно обрабатывать изображения быстро движущихся объектов в режиме реального времени. Наилучшая реконструкция изображений получается в том случае, когда прямая и обратная задачи решаются в одинаковом ключе, а именно, с использованием метода квадратур [10].

Список литературы

- [1] Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.
- [2] Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. - М.: Мир, 1982.-Кн. 2.-480 с.
- [3] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. - М.: Техносфера, 2005. - 1072 с.

- [4] Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. Москва: Техносфера, 2006.-616 с.
- [5] Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов: О редукции к идеальному прибору в физике и технике. — М.: Сов. радио, 1979. — 272 с.
- [6] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наук. Думка, 1986.
- [7] R. Neelamani, H. Choi, and R. Baraniuk, "ForWaRD: Fourier-Wavelet Regularized Deconvolution for Ill-Conditioned Systems," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 52, no. 2, pp. 418-433, February 2004.
- [8] A. Tikhonov and V. Arsenin Solutions of Ill-Posed Problems, Washington DC, Winston, 1977.
- [9] Сизиков В.С., Белов И.А. Реконструкция смазанных и дефокусированных изображений методом регуляризации // Оптический журнал. – 2000. – Т. 67. – № 4. – С. 60–63.
- [10] Римских М.В. Методы преобразования Фурье и квадратур с регуляризацией для восстановления смазанных изображений в MATLAB'e. Сборник тезисов V Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. -С. 39-51.

УДК 532.533

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ БАКТЕРИЙ НА ОБРАЗОВАНИЕ МЕТАНА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ХРАНЕНИИ ВОДОРОДА

А.Е. Толеуханов¹, М.Б. Панфилов², А. Калтаев¹

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы

²Университет Лотарингии, Нанси, Франция

Abstract. A hydrogen storage in aquifers or depleted gas reservoirs behaves as the natural chemical reactor due to high activity of the methanogenic bacteria which consume hydrogen as the source of energy. In the present paper we develop the new mathematical model of gas-water multicomponent flow with biotic reactions coupled with the system of equations of population dynamics.

Keywords: porous media, hydrogen, bacteria, neuston, chemotaxis, population dynamics, oscillations.

Аңдатпа. Бұл жұмыста сутегін жер астында суы бар резервуарда сақтау процесі қарастырылған. Онда бактериялардың бастапқы қоспаға әсері ескеріледі. Сонымен қатар жер асты суы бар резервуарда сутегін сақтаудың бактериялардың динамикасын ескере отырып екі фазалы моделі алынған.

Кілттік сөздер: кеуек орта, сутегі, бактерия, нейстон, хемотаксис, популяция динамикасы, осцилляция.

Аннотация. В данной работе исследован процесс образования метана при подземном хранении водорода с учетом взаимодействия бактерий, влияющих на состояние начальной

смеси. Получена двухфазная модель хранения водорода с биотической реакцией, связанной с динамической системой уравнений популяций в водоносном резервуаре.

Ключевые слова: пористая среда, водород, бактерия, нейстон, хемотаксис, динамика популяций, осцилляция.

Введение

Проблема подземного хранения водорода (ПХВ). На сегодняшний день одна из очень острых проблем современной мировой энергетики является накопление и аккумуляирование полученной избыточного большого объема энергии. Эта проблема связана с необходимостью сглаживания суточных и сезонных колебаний энергопотребления (фактор так называемых пиковых нагрузок), и с тем, что ТЭС, ГЭС, АЭС очень критичны к быстрым изменениям нагрузки. По указанным причинам для обеспечения потребителей в периоды пиковых нагрузок большинство стран вынуждены постоянно держать в готовности значительные резервы мощности электростанций, обеспечивать для них запасы топлива и т.д.

Одним из наиболее перспективных решений проблемы аккумуляирования большого объема энергии считается так называемая водородная энергетика, в которой в качестве резервного топлива используется водород. Главные достоинства водорода как топлива в том, что его удельная теплота сгорания втрое выше, чем у нефти, а при сгорании образуется экологически абсолютно безопасная вода.

Таким образом избыток энергии из ТЭС, ГЭС, АЭС можно использовать для получения водорода из воды. Но на сегодняшний день производство водорода и его распределение уже не представляют серьезных технических проблем. Однако, если получим много водорода то в связи с этим неизбежно ставится вопрос о необходимости хранения больших объемов водорода. Одним из самых эффективных и недорогих способов хранения большого объема водорода, является его закачка в геологические формации, такие как водоносные пласты, истощенные газовые месторождения или соляные каверны [1]. Несколько подземных хранилищ водорода имеется в Великобритании, в США, в России, в Германии, в Чехии и во Франции.

Весьма необычное поведение водорода при подземном хранении было обнаружено по данным наблюдений за составом смеси, добываемой из ПХВ (в ходе цикла "добыча последующего за закачкой). Эти наблюдения выявили существование сильных осцилляций состава добываемого газа во времени и по пространству [2-3]. В частности на хранилище Lobodice (Чехия) было обнаружено снижение во времени концентрации закачиваемых газов H_2 и CO_2 , но значительное увеличение концентрации CH_4 [2].

Исходная закачанная смесь содержала 55 процентов H_2 , 20 процентов $CO_2 + CO$ и 20 процентов CH_4 . Однако после нескольких месяцев закачки, хранения и начала цикла извлечения добываемый газ содержал 37 процентов H_2 , 12 процентов $CO_2 + CO$ и 40 процентов CH_4 . Таким образом, речь идет не о долях процентов и случайных ошибках измерений, а об удвоении количества в пласте и уменьшении в 2 раза количества $CO_2 + CO$. Характерный период изменения состава хранимого газа составил от 5 до 7 месяцев. Одновременно было обнаружено избыточное уменьшение давления в пласте на 15 процентов по сравнению с расчетами материального баланса. Одной из возможных интерпретаций этого-утечка газа- была в итоге отвергнута.

Последующий изотопный анализ продукции из скважин [3] показал, что изотопный состав части добываемого CH_4 отличен от CH_4 закачиваемого. Речь идет, таким образом, о внутрипластовых генераторах CH_4 . Дальнейшие наблюдения выявили еще более нетривиальные процессы

в ПХВ, такие как образование чередующихся в пространстве зон, предпочтительно насыщенных H_2 или CH_4 . Назовем этот эффект естественной внутрипластовой сепарацией химических компонентов.

Работы [2-3] посвящены объяснить высшее указанные наблюдаемые эффекты. В нем констатируется, что в ПХВ имеет место реакция:



В ходе этой реакции наблюдается сокращение количества CO_2 и H_2 и одновременное увеличение количества CH_4 . Подобная реакция между H_2 и CO_2 может происходить в условиях ПХВ и для столь заметного изменения начального состава смеси требуется годы. Существенное изменение концентрации смеси можно объяснить влиянием метаногенных бактерий, которые участвуют в реакции (1) и являются ее катализатором. Присутствие метаногенных бактерий в пластовой воде ПХВ Lobodice было подтверждено измерениями [2-3].

Механизм воздействия бактерий представляет собой процесс метаболизма, при котором бактерии поглощают углерод из CO_2 и электроны H_2 в качестве энергии. В результате многостадийных процессов окисления CO_2 в теле бактерии происходит образование метана, который в итоге и "выдыхается" [4].

Таким образом, процесс ПХВ представляет собой естественный химический реактор, поглощающий CO_2 и частично H_2 и удваивающем массу CH_4 . Ясно, что данная проблема имеет промышленное значение, затрагивая как энергетику, так и экологию. Экономическая эффективность такого процесса можно оценить только после проведения физического и математического моделирования всех возможных вариантов поведения ПХВ. Разработка таких моделей является основной целью данной работы.

Первая попытка исследования образования метана при подземном хранении водорода проведена в работе [5], в которой бактерия рассматривалась как однородная среда в однофазной газовой среде без учета присутствия воды. В качестве модели рассмотрена модель Моно роста популяции, но в результате исследований были обнаружены лишь мелкие быстро затухающие флуктуации концентраций метана в пласте, которые не объяснили многообразия наблюдаемых явлений.

В работе [6] рассматривается модель Тюринга, учитывающая существование различных структур колоний бактерий в зависимости от их численности.

В данной работе мы развиваем новую математическую двух фазную модель многокомпонентных потоков с биотической реакцией, связанный с динамической системой уравнений популяций. Двухфазность течения приводит к дополнительной нелинейности, которая приводит к появлению нового нелинейного поведения популяции, что в свою очередь порождает необходимость рассмотрения новой формы бактерий, существующих в нейстон. Нейстон - это тонкая пленка живущий на границе между водой и газом.

Модель хемотаксиса и нейстона в двухфазной жидкости

Рассматривается водоносный пласт, который содержит воды и хранимый газ, а также начальные популяции бактерии. В подземный водоносный пласт закачивается смесь H_2 в избытке с небольшим содержанием CO_2 т.е. закачиваемый газ двух компонентный, а газ в пласте состоит из трех компонентов закачиваемых H_2 и CO_2 а также CH_4 образующегося в ходе реакции.

Присутствующие в пласте метаногенные бактерии детектирует питательные вещества, содержащиеся в газе и двигаются к направлению газового контакта с водой. Далее мы разрабатываем математическую модель такого движения.

Нейстон

Особенность движения бактерий в двухфазной жидкости состоит в том, что раздел области между водой и газом становится лучшим местом для жизни бактерий. **Нейстон** это тонкий слой бактерий, живущие в воде одновременно использующие питательные вещества из газа (CO_2 и H_2) которое показано на рис.1

Чтобы объяснить образование нейстона, давайте предположим, что бактерии живут в воде но газовая фаза содержит питательные вещества, которые являются слабо растворимым в воде. Следовательно, бактерии перемещаются в контакт образуют там тонкий слой (нейстон). Это может быть биопленка, который представляет собой некий субстрат созданные самими бактериями в воде. Движение бактерий живущей в воде определяется хемотаксисом. **Хемотаксис** это внутренний химический механизм благодаря которому бактерии обладают способностью детектировать наличие питательных веществ на расстоянии и двигается в этом направлении.

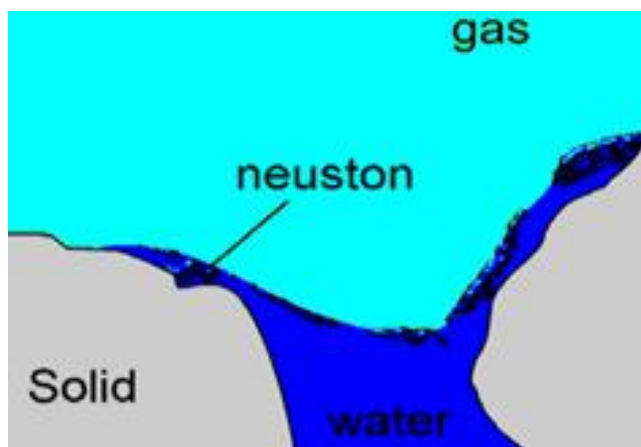


Рисунок 1 Нейстон

Математическая модель хемотаксиса в двух фазной жидкости

Если бактерия находится в точке А и двигается к питательным веществам, которые расположены в точке В, то это означает, что концентрация питательных веществ в точке В выше, чем в точке А. Другими словами, поток бактерии q_{ch} ориентирована на направление увеличение концентраций питательных веществ. Мы предлагаем следующий закон для потока бактерии, вызванного хемотаксисом в двухфазной жидкости:

$$q_{ch} = -D_{ch}(C) \cdot S \cdot n \cdot gradC \quad (2)$$

где $D(ch)$ -коэффициент хемотаксиса, который имеет размерность $[\frac{m^2}{s}]$, S -насыщенность воды, C - общая молярная доля питательных веществ, n -безразмерное количество бактерий в единица объема среды.

В начальном состоянии все бактерии живут в воде, но все питательные вещества присутствуют в газе и медленно диффундируют к воду. Следующие особенности присущи этой системе:

1. Движение патока бактерии вызывается градиентом от общей молярной концентрации питательных веществ C , $q_{ch} \sim -gradC$.

2. Поток бактерий пропорционально к числу бактерий, $q_{ch} \sim n$.
3. Поток бактерии прямо пропорционально к насыщенности воды, $q_{ch} \sim S$.
4. $D(ch)$ - коэффициент хемотаксиса должно быть убывающей функцией от C .

Общая модель динамики популяции

Рассмотрим следующую физическую двух фазную модель (газ и вода): в подземный водоносный пласт закачивается смесь H_2 с небольшим содержанием CO_2 , т.е. закачиваемый газ двух-компонентный. Обе фазы содержит несколько химических компонентов как (1) = H_2 , (2) = CO_2 , (3) = H_2O , (4) = CH_4 . Газовая фаза в пласте состоит из трех химических компонентов, как H_2 и CO_2 а также CH_4 , а жидкая фаза состоит из воды с низкими концентрациями H_2 , CO_2 и CH_4 . Далее рассмотрим только цикл закачки как наименее тривиальное. Присутствующие в пласте метаногенные бактерии выступают в роли активатора химической реакций (1) между H_2 и CO_2 с образованием CH_4 и небольшого количества воды. Рассматривается два вида бактерии:

1) Бактерии присутствующие в воде как планктоны или биофильмы, которые прикрепленные к стенам поры и покрыты водой;

2) Бактерии присутствующие в Нейстоне; Бактерии живущие в воде используют растворенные H_2 и CO_2 в воде. Но бактерии живущие в нейстоне использует воду в качестве биологической необходимости а питательные вещества CO_2, H_2 непосредственно из газовой фазы. Это определяет специфические ситуации, когда бактерии живут в воде, но основные части питательных веществ сосредоточена в газовой фазе.

Пусть $n_w(x, t)$ и $n_{ns}(x, t)$ число бактерии соответствующие в воде и в нейстоне в единице объема пористой среды. Принимая во внимание выше упомянутый все предположения, можно сформулировать следующие уравнение динамики популяции:

$$\frac{\partial n_{ns}(1-S)}{\partial t} = \eta_{ns}(1-S) \frac{c_g^{(2)} n_{ns}}{t_{e,ns}} - (1-S) \frac{n_{ns}}{t_d} + \text{div}(D_b(1-S) \text{grad} n_{ns}); \quad (3)$$

$$\frac{\partial n_w S}{\partial t} = \eta_w S \frac{c_w^{(1)} c_w^{(2)} n_w^2}{t_{e,w}} - S \frac{n_w}{t_d} + \text{div}(D_b S \text{grad} n_w) - \text{div}(D_{ch}(C^{(1)}) S n_w \text{grad} C^{(1)}); \quad (4)$$

где S -насыщенность воды, $t_{e,w}$ и $t_{e,ns}$ -характерный скорость роста популяции при малом количестве питательных веществ, t_d -характерное время вымирания, η -коэффициент пропорциональности между скорости роста и поедание, D_b -коэффициент диффузии бактерии, $D_{ch}(C)$ - коэффициент хемотаксиса бактерии, $c_i^{(k)}$ -молярная доля химических компонентов k в фазе i , $C^{(k)}$ -общая молярная доля химических компонентов k в обе фазе.

Зависимость между $c_i^{(k)}$ и $C^{(k)}$ определяется следующим виде:

$$C^{(k)} = \frac{\rho_w c_w^{(k)} S + \rho_g c_g^{(k)} (1-S)}{\rho_w S + \rho_g (1-S)}; \quad (5)$$

где ρ_i -молярная плотность в фазе i .

Уравнения баланса для химических компонентов

Кинетика реакций зависит от концентрации нескольких компонентов, которые приведет к рассмотрению большие системы, связанные с уравнением переноса. В случае неизменяемой реакции, ситуация упрощается, так как кинетика реакции зависит только от реагентов и не зависит от реакции продуктов. Это достаточно, чтобы сформулировать уравнения переноса только для H_2 и CO_2 . Скорость реакции полностью контролируется бактериями и, таким образом, она опреде-

ляется скоростями поедания бактерии. В соответствии с формулой химической реакции (1), один моль потребляемого питательных веществ содержит $1/5$ часть CO_2 и $4/5$ часть H_2 . В результате, модель переноса для H_2 и CO_2 имеет следующий вид: $k = 1, 2$, $i = g, w$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g c_g^{(k)} (1 - S) + \rho_w c_w^{(k)} S) + \text{div}(\rho_g c_g^{(k)} V_g^{(k)} + \rho_w c_w^{(k)} V_w^{(k)}) = \frac{1}{\Omega} G^{inj} c^{(k), inj} - \\ - \frac{\phi \Upsilon^k (1 - \theta) c_g^{(2)} n}{t_{e,ns} (1 + a_{ns} c_g^{(2)})} - \frac{\phi \Upsilon^k \theta^2 c_w^{(1)} c_w^{(2)} n^2}{t_{e,w} (S^2 + \frac{\theta^2 n^2}{n_{wm}^2}) (1 + a_{w1} c_w^{(1)}) (1 + a_{w2} c_w^{(2)})}; \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g (1 - S) + \rho_w S) + \text{div}(\rho_g V_g + \rho_w V_w) = \frac{1}{\Omega} G^{inj}; \quad (6)$$

$$V_g = -\lambda_g (\text{grad} P_g - \rho_g^m g); \quad (7)$$

$$V_w = -\lambda_w (\text{grad} P_w - \rho_w^m g); \quad (8)$$

где S -насыщенность воды, $P_w = P_g - P_c(S)$ -давления, ρ -молярная плотность, μ -динамическая вязкость, K -абсолютная проницаемость, ϕ -пористость, $k_k(S)$ -фазовая проницаемость, ρ^m -массовая плотность, g -ускорения силы тяжести, $P_c(S)$ -капиллярное давление, G^{inj} -молярная скорость закачиваемого газа, Ω -общий объем хранилища, V_i -скорость Дарси, $V_i^{(k)} = V_i + V_{iD}^{(k)}$ -скорость переноса компоненты k в фазе i , $V_{iD}^{(k)} = -\frac{\phi D_i^{(k)} S_i}{c_i^{(k)}} \text{grad} c_i^{(k)}$ -скорость диффузии компоненты k в фазе i , $c^{(k), inj}$ -концентрация компоненты k в закачиваемом газе, $\Upsilon^{(k)} = \begin{cases} 4 & 5, k=1 \\ 1 & 5, k=2 \end{cases}$.

Численные результаты

Рассматривается следующая тестовая двухмерная задача. В подземный водоносный пласт закачивается растворенный H_2 . Таким образом даем не большое возмущение, область движения прямоугольник, а изменение передается через малую окрестность начало координаты. На границе поддерживается условия непроницаемости. В начальном состоянии имеется непрерывно распределенная во всем пласте колония бактерий и постоянная начальная концентрация H_2 . Пусть параметры $D_b = 0,001$, $D_{ch} = 0,0001$, $D_w^{(H_2)} = 0,01$, $q = 0,95$

$$\begin{cases} \frac{\partial c_w^{(H_2)}}{\partial t} = q - c_w^{(H_2)} N^2 + D_w^{(H_2)} \cdot \Delta_{x,y} \cdot c_w^{(H_2)}, \\ \frac{\partial N}{\partial t} = -N + c_w^{(H_2)} N^2 + D_b \cdot \Delta_{x,y} \cdot N - D_{ch} \cdot \nabla_{x,y} \cdot (\exp(-c_w^{(H_2)}) \cdot N \cdot \nabla_{x,y} \cdot c_w^{(H_2)}), \end{cases} \quad (9)$$

$$N|_{t=0} = 1, c_w^{(H_2)}|_{t=0} = 1, \frac{\partial c_w^{(H_2)}}{\partial \nu}|_{\partial \Omega} = 0, \frac{\partial N}{\partial \nu}|_{\partial \Omega} = 0; \quad (10)$$

Численные решение задачи (9), (10):

Конкретные значения концентрации в этом задаче не имеют значения, так как выбор параметров задачи был формальным. Но при $0,90032 < q < 1$ то система (9) имеет предельного цикла. Где q - молярный дебит закачки H_2 . Возникновение незатухающих осцилляций во времени, асимптотически стремящихся к периодическим, означает что в системе происходит самоорганизация новых структур. Это показано на рис.2. Существенно, что эти структуры образуются лишь при не очень малых и не очень больших темпах закачки H_2 согласно $0,90032 < q < 1$.

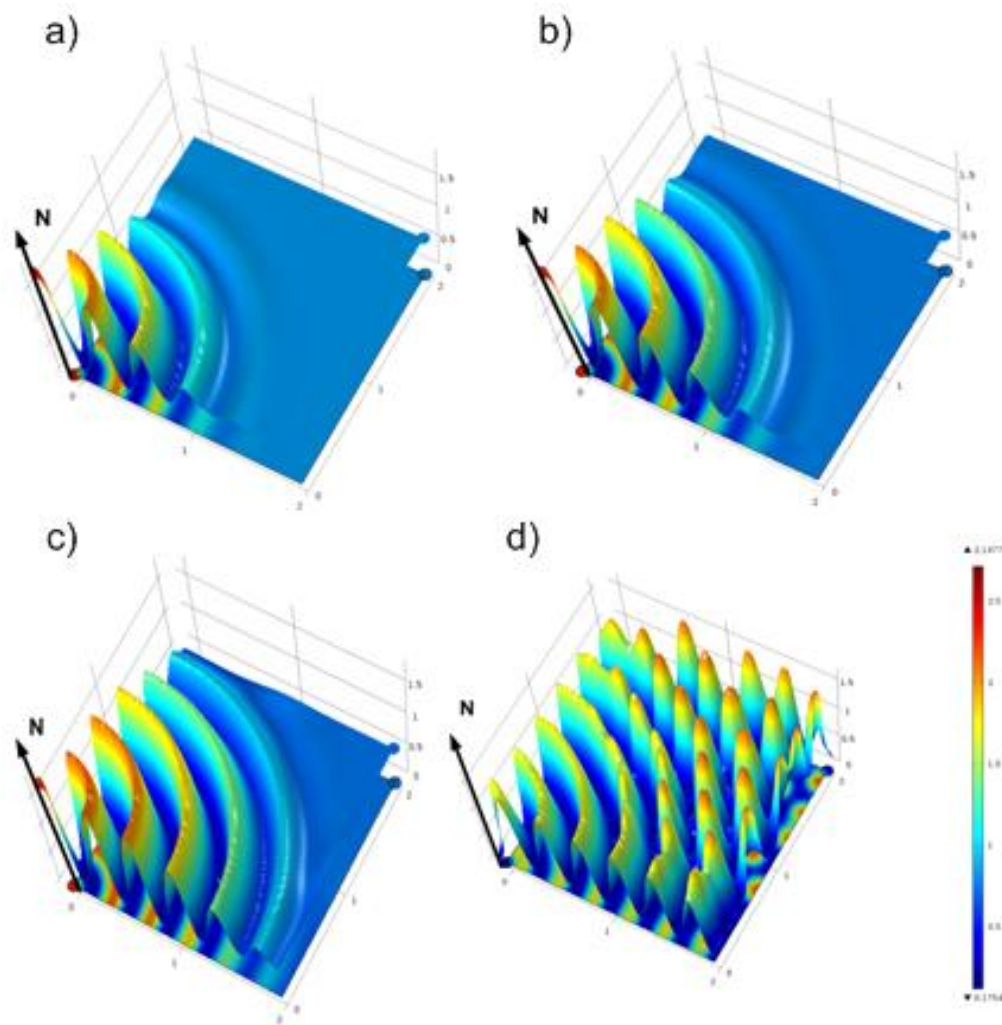


Рисунок 2 Изменения количество бактерии при $t=0..500$

Заключение

Уравнения (3), (4), (6), (7) и (8) представляют собой связанную систему, которая описывает двухфазное хранение водорода с биотической реакцией, связанной с динамической системой уравнений популяций в водоносном резервуаре. Поведение подземного хранилища водорода очень сложное и чувствительное к кинетическим параметрам. Полученная концептуальная физическая и математическая модель процесса могут быть использованы для управления ПХВ и следить за образованием метана в водоносном пласте.

Список литературы

- [1] Bulatov G.G. Underground storage of hydrogen. Ph.D. Thesis, Moscow Gubkin Oil and Gas University, 1979 (in Russian).
- [2] Smigai, P., Greksak, M., Kozankova, J., Buzek, F., Onderka, V., Wolf, I.: Methanogenic bacteria as a key factor involved in changes of town gas in an underground reservoir. FEMS Microbiol. Ecol. 73, 1990: P 221–224.
- [3] Buzek, F., Onderka, V., Vancura, P., Wolf, I.: Carbon isotope study of methane production in a town gas storage reservoir. Fuel 73(5), 1994: 747–752.
- [4] Gusev, M.V., Mineeva, L.A. (eds.): Microbiology. Moscow Lomonosov University, Moscow (1992) (in Russian).
- [5] Panfilov, M., Gravier, G., Fillacier, S.: Underground storage of H₂ and H₂-CO₂-CH₄ mixtures. In: Proc. ECMOR-X: 10th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, 4-7 September 2006 Amsterdam, the Netherlands, Ed. EAGE, 2006, paper A003.
- [6] Panfilov M. Underground storage of hydrogen: self-organisation and methane generation. Transport in Porous Media, 85, 2010: P 841 - 865.

УДК 519.633

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ «СКОРОСТЬ-ДАВЛЕНИЕ»

Б.А. Урмашев, Н.Т. Данаев¹, Е.С. Алимжанов

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби,

¹НИИ Математики и механики при КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

Abstract. The main feature of the proposed method of computation is effective finding solutions of algebraic equations of auxiliary difference equations. Numerous computations of thermal convection problems for different values of parameters Gr , Re , Pr and isothermal flow ($Gr = 0$) demonstrates the reliability of the algorithm of solving the auxiliary difference equations using for the computation of Navier-Stokes equations.

Keywords: Navier-Stokes equations, thermal convection, numerical method.

Аңдатпа. Ұсынылған есептеу әдістемесінің басты ерекшелігі көмекші торлық теңдеулердің алгебралық теңдеулер жүйесі шешімін ұтымды табу болып табылады. Gr , Re , Pr параметрлерінің әр түрлі мәндеріне сәйкес жылу конвекциясының және изотермиялық ағынның ($Gr = 0$) көптеген есептеулері Навье-Стокс теңдеуін есептеу үшін көмекші торлық теңдеулерді шешу алгоритмінің сенімділігін көрсетті.

Кілттік сөздер: Навье-Стокс теңдеуі, жылу конвекциясы, сандық әдіс.

Аннотация. Главной особенностью предложенной методики расчетов является эффективное нахождение решения системы алгебраических уравнений вспомогательных сеточных уравнений. Многочисленные расчеты задач тепловой конвекции при различных параметрах Gr , Re , Pr и изотермического течения ($Gr = 0$) показали надежность алгоритма для решения вспомогательных сеточных уравнений при использовании для проведения расчетов уравнений Навье-Стокса.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, тепловая конвекция, численный метод.

В трехмерной области, показанной на рисунке 1, рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, которое описывается уравнениями Навье-Стокса и они представлены в следующем безразмерном виде [1]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}, \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) T = \frac{1}{Pr Re} \Delta T, \quad (3)$$

где $\vec{u} = (u, v, w)$, p – давление, T – температура, $\vec{g} = (0, 0, -g)$, $Gr = \frac{g \beta \Delta \theta L^3}{\nu^2}$ – число Грасгофа, $Re = \frac{L \sqrt{\rho \Delta p}}{\mu}$ – число Рейнольдса, $Pr = \frac{\nu}{\lambda}$ – число Прандтля, $\Delta \theta$ – характерная разность температур, ν – кинематический коэффициент вязкости, μ – коэффициент динамической вязкости, λ – коэффициент температуропроводности.

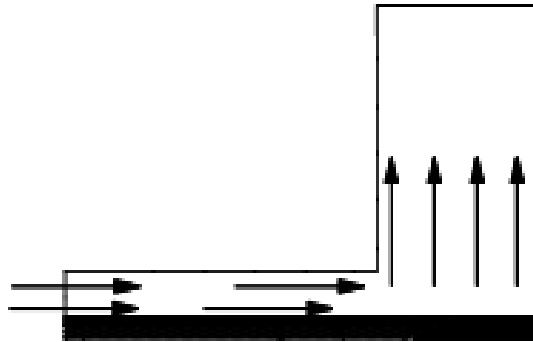


Рисунок 1 Расчетная область

Граничные условия заданы в следующем виде:

на входе: $p = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $v = 0$, $w = 0$, на выходе: $p = 0$, $u = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $w = 0$, во всех частях твердой стенки: $T = T_2$, $u = v = w = 0$, и на горизонтальной нижней стенке $T = T_1$.

Для решения уравнений (1)-(2) используем схему расщепления, которая приводит к следующим разностным уравнениям:

$$\frac{\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^n}{\tau} = \vec{R}, \quad \vec{R} = (G, Q, S)' \quad (4)$$

$$\vec{u}^{n+1} + \tau \overline{\text{grad}}_h (p^{n+1} - p^n) = \vec{u}^{n+1/2}, \quad (5)$$

$$\underline{\text{div}}_h \vec{u}^{n+1} = 0, \quad (6)$$

Вычисление уравнения (4) производится по явной схеме, уравнения (5)-(6) вычисляются с

помощью итерационного процесса, который приведен ниже:

$$u_m^{n+1,s+1} + \tau(p^{n+1,s} - \tau_0 \operatorname{div}_h \bar{u}^{n+1,s})_{x_m} = \tau \tau_0 \delta(u_{m,x_m}^{n+1,s+1} - u_{m,x_m}^{n+1,s})_{x_m} + u_m^{n+1/2}, m = 1, \bar{N}$$

$$\frac{p^{n+1,s+1} - p^{n+1,s}}{\tau_0} + \operatorname{div}_h \bar{u}^{n+1,s+1} = 0$$

На основе предложенного итерационного алгоритма, проведены численные расчеты и получены картины течения при различных числах Рейнольдса.

Список литературы

- [1] Данаев Н.Т., Урмашев Б.А. Итерационные схемы для решения вспомогательных сеточных уравнений Навье-Стокса // Вестник КазГУ, серия математика, механика, информатика. 2000, №4. – С. 74-78.
- [2] Калтаев А.Ж., Урмашев Б.А.. Численное решение одной задачи тепловой конвекции // Вестник КазГУ, серия математика, механика, информатика. 2000. №1. – С. 162-170.

УДК 519-7

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ (ТРЕХКАМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ФАРМАКОКИНЕТИКИ)

Б.А. Урмашев, А.Т. Турсынбай, Е.П. Макашев

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби

Abstract. The three-chamber model of pharmacokinetics is considered. A method for finding multiple solutions of the inverse problem which described by the dependence $C(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + A_3 e^{-\lambda_3 t} - A_4 e^{-k_1 t}$ is proposed. The existence of multiple solutions of this equation is analytically proved and an algorithm for finding them is given.

Keywords: pharmacokinetic model, inverse problem, numerical calculation.

Аңдатпа. Үш камералы фармакокинетика моделі қарастырылған. Кері есептің $C(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + A_3 e^{-\lambda_3 t} - A_4 e^{-k_1 t}$ тәуелділігімен өрнектелетін бірнеше шешімін табу әдісі ұсынылған. Осы теңдеудің бірнеше шешімі бар екені аналитикалық дәлелденген және оларды табу алгоритмі берілген.

Кілттік сөздер: фармакокинетика моделі, кері есеп, сандық есеп.

Аннотация. Рассмотрена трехкамерная модель фармакокинетики. Предложен метод выявления нескольких решений обратной задачи, описываемый зависимостью $C(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + A_3 e^{-\lambda_3 t} - A_4 e^{-k_1 t}$. Аналитически доказано существование нескольких решений этого уравнения и представлен алгоритм их нахождения. Теоретическое

доказательство неединственности решения подтверждено численными расчетами. Математический аппарат, использованный при анализе моделей фармакокинетики и разработке ПО, абсолютно корректен. Выводы, полученные на его основе, совершенно надежны. Это касается, в первую очередь, проблемы неоднозначности решений обратной задачи.

Ключевые слова: модель фармакокинетики, обратная задача, численный расчет.

Ранее, в работах [1-2] нами исследовалась кинетика системы реакций $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$, $B \xrightleftharpoons[k_4]{k_3} D$. В данной работе рассматривается расширенная схема с добавлением третьей камеры, представленная через реакцию $B \xrightleftharpoons[k_6]{k_5} E$. Было показано, что уравнение зависимости концентрации от времени для компонента имеет не одно решение. Результатом настоящей работы стало строгое аналитическое обоснование количества решений этого уравнения и выявление условий реализации каждого из них.

На основе дифференциальных уравнений с начальными условиями искомая зависимость $C_2(t) = f(t)$ – динамика изменения концентрации компонента, может быть представлена в виде уравнения [1].

$$C_2(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + A_3 e^{-\lambda_3 t} - A_4 e^{-k_1 t}, \quad (1)$$

Решение прямой задачи в данном случае не представляет никакой сложности.

Решение обратных задач моделирования объектов и процессов различной природы включает в себя стандартный критерий:

$$\sum_{i=1}^n (C_i^{exp} - C_2(t_i))^2 \rightarrow \min.$$

Проблема адекватности модели объекту обычно решается наложением дополнительных условий, таких как, например пределы изменения отдельных параметров в соответствии с их физическим смыслом, порядок их взаимного расположения друг относительно друга и т. д.

Обратная задача – расчет величин k_1 , λ_i и A_i на основе некоторой совокупности измеренных значений C_i^{exp} в моменты времени t_i , по сравнению прямой задачи, представляет собой гораздо более сложную проблему [3].

Авторы хорошо знакомы с основными моделями фармакокинетики и могут предложить комплексные методы обработки экспериментальных данных с привлечением моделей разных типов. Разумеется, сложность привлекаемых моделей диктуется, в первую очередь, качеством экспериментальных данных. Представляемые результаты служат также критерием корректности предложенного математического аппарата и проведенных вычислений. Кроме того, результаты проведенного исследования полностью подтверждают достоверность данных, полученных нами ранее, где доказательство не единственности решения для обратной задачи получены иным способом.

Список литературы

- [1] J. Gabrielsson, D. Weiner Pharmacokinetic&Pharmacodynamic Data Analysis. Kristianstads Boktryckeri AB, Sweden 2006, 1255 p.
- [2] Урмашев Б.А., Турсынбай А.Т. О существовании трех решений для кинетической кривой промежуточного соединения // Горение и плазмохимия, 2009, том 7, №3. – С. 243-250.

- [3] С.И. Кабанихин, К.Т. Исаков Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. – Алматы, 2007. – 330 с.

УДК 681.5.015

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ПРИМЕРЕ ТОО «БИПЭК АВТО»

С.Б. Усенова

Восточно-Казахстанский государственный технический университет имени Д. Серикбаева

Abstract. In this article the tasking of consideration of problems which arise at creation of optimum strategy of development of the enterprise is set. The author opens conditions, tasks, solutions and impulses of strategic development. As a result of the analysis of financial fund of the enterprise it was revealed the most generalizing functionality of development profitability of assets, and as revenue (expected) from realization of strategic and tactical groups of goods is represented. With realization of these optimum parameters observance of the major economic and financial proportions is reached, and rather high rates of a financial solvency are provided, as well as was, is provided by the offered problem definition of optimization of a choice of the directions of strategic development of the enterprise.

Keywords: optimization, enterprise strategy

Аңдатпа. Берілген мақалада кәсіпорынның түбегейлі жоспарларының дамуын ұтымды құру кезінде пайда болатын түйінді мәселелерді қарастыратын міндеттер қойылады. Автор түбегейлі жоспарлардың дамуының шарттарын, міндеттерін, шешімін табудың жолдарын және итермеші күштерін ашады. Кәсіпорынның қаржыландыру қорын талдау нәтижесінде дамуының ең қорытынды тәуелділігі (функционалы) болып активтердің рентабельділігі, сонымен қатар товарлардың түбегейлі және тактикалық топтарын ақшаға айналдырудан түскен (божамды) түсім болып табылады. Осы қолайлы параметрлерді жүзеге асырудан шаруашылық-қаржылық пропорциясын сақтауға қол жеткізіледі, және кәсіпорынның түбегейлі жоспарларының дамуына бағытталған таңдаудың жақсы жағдайларын міндеттерін қоюға қарастырылғандай қаржылық орнықтылықтың айтарлықтай жоғарғы көрсеткіштеріне қол жеткізу қамтамасыз етіледі.

Кілттік сөздер: үйлесімділеу, кәсіпорынның түбегейлі жоспарлар.

Аннотация. В данной статье ставится задача рассмотрения проблем, которые возникают при построении оптимальных стратегий развития предприятия. Автор раскрывает условия, задачи, пути решения и импульсы стратегического развития. В результате анализа финансового фонда предприятия было выявлено, что наиболее обобщающим функционалом развития представляется рентабельность активов, а так же выручка (прогнозная) от реализации стратегической и тактической групп товаров. С реализацией этих оптимальных параметров достигается соблюдение важнейших хозяйственно-финансовых пропорций, и обеспечиваются достаточно высокие показатели финансовой состоятельности, как и было, предусмотрено предложенной постановкой задачи оптимизации выбора направлений стратегического развития предприятия.

Ключевые слова: оптимизация, стратегия предприятия

Одними из первоочередных экономико-организационных задач построения оптимальных стратегий развития предприятия являются следующие условия:

1. Четко сформулированная и обоснованная генеральная цель — корпоративная миссия предприятия по конкретным направлениям деятельности и развития;
2. Удовлетворительная структура баланса, а также достаточный уровень финансовой устойчивости (платежеспособности);
3. Возможность развития производства стратегической группы товаров за счет привлечения на цели развития как внешних, так и собственных источников инвестиций.

Первоочередным импульсом стратегического развития могут выступать средства внешнего кредитования — долгосрочные кредиты и займы (α), которые в концепции финансового анализа трактуются как собственные средства предприятия, а также источники собственных средств: фонд накопления, нераспределенная прибыль предыдущих периодов, сальдо результатов прочей реализации — в суммарном объеме X_i (предполагается, что все денежные потоки дисконтированы по фактору времени и темпам инфляции). Эти средства распределяются по двум направлениям.

В размере x_2 — на собственно цели развития, связанные с перепрофилированием предприятия, модернизацией и расширением производственных мощностей, технической подготовкой производства и маркетингом продукции стратегической группы, реализация которых требует прироста внеоборотных активов (β). Другая часть этих источников средств — на прирост оборотных активов (χ), прежде всего запасов и затрат, обусловленных освоением производства стратегической группы продукции и производством тактической группы.

Предполагается, что инвестиционный проект обоснован возможностью достижения (за счет реализации содержащихся в нем направлений развития) достаточной нормы прибыли на инвестируемый капитал, т. е. в размере, не меньшем средней расчетной ставки процента (δ) по заемным средствам, а это означает, что результатом инвестиций должно быть получение нераспределенной (чистой) прибыли в размере, не меньшем αx_i (где $\alpha = \delta$).

Наряду с долгосрочными кредитами и займами в качестве краткосрочных кредитов и займов (ϵ) служат средства кредиторской задолженности (ϕ) — в размере x_3 , которые также распределяются: в объеме x_4 — на цели развития (прирост β); в объеме $(x_3 - x_4)$ — на цели текущего производства (восполнение и прирост запасов χ).

В свою очередь, вновь образованная прибыль может быть распределена уже по трем направлениям: в размере b — на погашение наиболее срочных обязательств по платежам в бюджеты всех уровней и внебюджетные фонды, кредиторской задолженности поставщикам, подрядчикам и персоналу предприятия, уплате процентов за пользование банковским кредитом: в размере x_6 — на цели развития, требующие прироста β ; в размере $(\alpha x_1 - x_5 - x_6)$ — на прирост χ .

Предполагается, что результатом использования кредитных средств в объеме x_3 должно быть получение нераспределенной прибыли αx_3 .

Полученная прибыль αx_3 также подлежит последующему распределению по трем направлениям: в объеме x_7 — на очередные и своевременные погашения краткосрочной задолженности; в объеме x_8 — на цели развития (прирост β); в объеме $(\alpha x_3 - x_7 - x_8)$ — на цели текущего производства (прирост χ).

В соответствии с этой схемой могут быть формализованы ограничения и граничные условия. Они определяют область таких значений параметров стратегия развития, которые были

бы допустимы по требованиям обеспечения финансовой устойчивости. Наиболее обобщающим функционалом развития представляется рентабельность активов:

$$RA = \frac{x_1 + a(x_1 + x_3)}{\beta + \chi + x_1 + a(x_1 + x_3) + x_3 - x_5 - x_7} \quad (1)$$

где, RA - рентабельность активов, x_1, x_3, x_5, x_7 - средства на цели развития, a - прибыль, β - внеоборотные активы, χ - оборотные активы. или прирост чистой рентабельности активов:

$$\Delta R'A = \frac{a(x_1 + x_3)}{x_1 + a(x_1 + x_3) + x_3 - x_5 - x_7} = \frac{a(x_1 + x_3)}{(1 + a)(x_1 + x_3) - x_5 + x_7} \quad (2)$$

где, $\Delta R'A$ - прирост чистой рентабельности активов, x_1, x_3, x_5 - средства на цели развития, a - прибыль, x_7 - средства на очередные и своевременные погашения краткосрочной задолженности.

В качестве целевой функции формирования стратегии развития могут быть использованы и другие функционалы, например:

Выручка (прогнозная) от реализации стратегической и тактической групп товаров:

$$B = \frac{B_{t-1}(\chi - \phi + x_1 + x_2 + ax_1 + ax_3 - x_4 - x_6 - x_8)}{\chi - \phi} \quad (3)$$

где, B - выручка (прогнозная), $B_{t-1}(\chi - \phi)$ - соответственно выручка и чистые оборотные активы отчетного периода, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_8$ - средства на цели развития, a - прибыль, χ - оборотные активы, ϕ - кредиторская задолженность. Как константы, могут быть исключены на время решения задачи оптимизации стратегии развития; тогда можно принять целевую функцию прогнозной выручки несколько иного вида:

$$B' = x_1 + x_2 + ax_1 + ax_3 - x_4 - x_6 - x_8 \quad (4)$$

где, B' - выручка (прогнозная), x_1, x_2, x_3, x_4 - средства на цели развития, a - прибыль, x_8 - средства на очередные и своевременные погашения краткосрочной задолженности.

Имущество предприятия, его технический потенциал за срок реализации соответствующего инвестиционного проекта увеличится и составит:

$$A + x_1 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_5 - x_7$$

Корректность предложенной схемы формирования и использования инвестиционных средств подтверждается соблюдением основного балансового тождества, а также включением в эту схему ряда других балансовых соотношений и пропорций хозяйственного развития моделируемого производственного объекта.

Уменьшение оборотных активов в процессе стратегического развития не предусматривается:

$$x_1 - x_2 = 0 \quad (5)$$

Размер погашаемой кредиторской задолженности не должен превышать ожидаемой от использования всех источников инвестиций нераспределенной прибыли, причем величина погашения вновь образованной краткосрочной задолженности не должна превышать соотношения:

$$ax_1 + ax_3 - (x_5 + x_7) = 0.5(\phi + x_3) \quad (6)$$

где, a - прибыль, x_1, x_3, x_5 - средства на цели развития, x_7 - средства на очередные и своевременные погашения краткосрочной задолженности, ϕ - кредиторская задолженность.

Непревышение труднореализуемых внеоборотных активов над постоянными пассивами – капиталом и резервами, что обеспечит соблюдение и других важнейших балансовых пропорций устойчивого бескризисного развития:

$$x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_2 - x_4 - x_6 - x_8 = 0; \quad (7)$$

Оборачиваемость активов не может быть снижена в результате реализации стратегии развития:

$$B = \frac{B(\chi + x_1 - x_2 + ax_1 + ax_3 - x_5 - x_6 - x_7 - \phi)}{(\chi - \phi)(\beta + \chi + x_1 + ax_1 + x_3 + ax_3 - x_4)} = \frac{B}{(\beta + \chi)} \quad (8)$$

где, B -выручка (прогнозная), x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 - средства на цели развития, x_7 -средства на очередные и своевременные погашения краткосрочной задолженности, χ оборотные активы, ϕ -кредиторская задолженность, β - внеоборотные активы.

С реализацией этих оптимальных параметров достигается соблюдение важнейших хозяйственно-финансовых пропорций обеспечиваются достаточно высокие показатели финансовой состоятельности, как и было предусмотрено предложенной постановкой задачи оптимизации выбора направлений стратегического развития предприятия.

Пример: Исходя из отчетного агрегированного нетто-баланса (млн тг.) ТОО «Бипэк Авто» и принятой схемы комбинированного инвестирования стратегии развития. Где, внеоборотные активы (β) равны сумме, взятой из нетто-баланса (44 млн. тг) предприятия плюс средства на цели развития, средства кредиторской задолженности (ϕ) равны сумме, взятой из нетто-баланса (46 млн. тг) предприятия плюс средства на цели развития, а также учитывая значения констант, принимаемых статистическими и отчетными данными, избавляясь от дробности в ограничениях, в результате дальнейших упрощений конкретно для ТОО «Бипэк Авто» задача запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \max \Delta RA &= 0.5(x_1 + x_3)/(1.5x_1 + 1.5x_3 - x_5 - x_7) \\ 1.5x_1 - x_2 - 1.5x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 + x_7 - x_8 &\geq 0 \\ 33.75x_1 - 23.5x_2 + 10.25x_3 - 23.5x_4 + x_5 - 23.5x_6 + x_7 &\geq 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_7 &\leq 0 \\ 1.5x_1 - x_2 + 0.5x_3 - x_4 - x_6 - x_8 &\geq 0 \\ 1.5x_1 + 15x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ 0.5x_1 + 0.5x_3 - x_4 &= 0 \\ 0.5x_1 - x_6 &= 0 \\ 0.5x_3 - x_7 &= 0 \\ x_3 - x_5 &= 0 \\ x_1, \dots, x_8 &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, максимальная рентабельность ТОО «Бипэк Авто» будет равна отношению произведений средств на развития предприятия: Здесь ограничения (1), (2) введены в систему условий задачи дополнительно. Ограничение (1) обусловлено требованием обеспечения рентабельности деятельности предприятия при реализации стратегии развития на уровне не ниже средней расчетной ставки процента:

$$(ax_1 + ax_3)/(x_1 + ax_1 = x_3 + ax_3 - x_5 - x_7) = (0.5x_1 + 0.5x_3)/(1.5x_1 + 1.5x_3 - x_5 - x_7) \geq a = 0.5$$

Ограничение (2) означает реальность стратегических преобразований предприятия, обусловленную невозможностью освоения в реальной перспективе таких чрезмерно больших объемов

инвестиционных средств, которые превышали бы действующую (балансовую) стоимость самого предприятия. К тому же это условие ограничивает область допустимых решений задачи, снимая тем самым неопределенность ее оптимума.

Для приведения данной постановки к линейному виду обозначим:

$$y_0 = (1.5x_1 + 1.5x_3 - x_5 - x_7)^{-1} \text{ и введем новые переменные: } y_j = y_0 x_j, (j = \overline{1,8})$$

В результате приходим к задаче:

$$\max \Delta RA = 0.5y_1 + 0.5y_3$$

$$1.5y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 \geq 0$$

$$1.5y_1 - y_2 - 1.5y_3 - y_4 + 2y_5 - y_6 + 2y_7 - y_8 \geq 0$$

$$33.75y_1 - 23.5y_2 + 10.25y_3 - 23.5y_4 + y_5 - 23.5y_6 + y_7 \geq 0$$

$$y_1 - 2y_5 - 2y_7 - y_0 \geq 0$$

$$1.5y_1 - y_2 + 0.5y_3 - y_4 - y_6 - y_8 \geq 0$$

$$0.5y_1 + 0.5y_3 - y_5 - y_7 \geq 0$$

$$1.5y_1 + 1.5y_3 - y_5 - y_7 - 47y_0 \geq 0$$

$$y_1 - y_2 = 0$$

$$0.5y_1 + 0.5y_3 - y_4 = 0$$

$$0.5y_1 - y_6 = 0$$

$$0.5y_3 - y_7 = 0$$

$$y_3 - y_5 = 0$$

$$1.5y_1 + 1.5y_3 - y_5 - y_7 = 1$$

$$y_0, y_1,$$

$$x_1, \dots, x_8 = 0$$

Оптимальный план задачи, полученный с помощью QSB:

$$y_0^0 = 0.0213; y_1^0 = y_2^0 = 0.4787;$$

$$y_3^0 = 0.5213; y_4^0 = y_5^0 = 0.4787; y_6^0 = 0.4574; y_7^0 = 0.2394$$

$$y_8^0 = 0; y_9^0 = 0.2606; y_{10}^0 = 0; \text{ при этом плане } \Delta RA(y_0, y_j) = 0.5$$

Учитывая также, что $x_j = y_j/y_0 (j = 1, \dots, 8)$, находим оптимальный план и оптимум исходной задачи:

$$x_1^0 = y_1^0/y_0^0 = 0.4787/0.0213 = 22.47$$

$$x_2^0 = 22.47; x_3^0 = 24.47; x_5^0 = 11.24$$

$$x_6^0 = 0; x_7^0 = 12.23..; x_8^0 = 0$$

$$\max \Delta RA(x_j) = 0.5$$

Список литературы

- [1] Математические методы и модели для менеджмента. Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б. // Вопросы образования. 2008. - №1 с. 528.

УДК 004.9

МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ¹

А. М. Федотов, О. А. Федотова

Институт вычислительных технологий СО РАН,
Государственная публичная научная библиотека СО РАН

Abstract. This paper describes a model of information systems to support research and education activities organized in the form of an electronic library. We describe the architecture of the information system and the principles of integration with digital depository rules for presentation and transformation metadata. The focus is on dealing with a dictionary of key terms that are used to organize and classify information resources and model the relationships with the facts.

Keywords: information system, electronic library, dictionary catalog, classification of information resources, database, digital depository, information retrieval thesaurus, key terms, DSpace, the protocol OAI-PMH, metadata.

Аннотация. Работа посвящена описанию модели информационной системы для поддержки научно-образовательной деятельности, организованной в виде электронной библиотеки. Описываются архитектура информационной системы и принципы интеграции с цифровым депозитарием, правила представления и преобразования метаданных. Основное внимание уделяется работе со словарями ключевых терминов, которые используются для систематизации и классификации информационных ресурсов и моделирования связей с фактами.

Ключевые слова: информационная система, электронная библиотека, словарь-справочник, классификация информационных ресурсов, база данных, цифровой депозитарий, информационно-поисковый тезаурус, ключевые термины, DSpace, протокол OAI-PMH, метаданные.

Введение

Одним из основных результатов созидательной, социальной и интеллектуальной человеческой деятельности является создание и накопление информационных ресурсов с целью их дальнейшего использования и недопущения утраты опыта предыдущих поколений. Не будет преувеличением сказать, что уровень развития технологий накопления информации и эффективности использования накопленной ранее информации на протяжении всей истории человечества значительно влиял на уровень развития производительных сил. Утеря информации приводила к отбрасыванию цивилизации на века назад. Однако, чтобы эффективно пользоваться накопленной ранее информацией, необходимы специальные инструменты и специальные технологии, при помощи которых могут быть реализованы специальные приемы работы с информацией. Одним из таких приемов является поиск информации.

Наверное, не будет большим преувеличением утверждение о том, что проблема поиска информации является одной из вечных проблем человеческого сообщества. На протяжении многих

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-07-00472а, 11-07-00561а, 13-07-00258а), а также в рамках программы Государственной поддержки научных школ РФ (грант НШ-6293.2012.9) и интеграционных проектов СО РАН.

тысяч лет его представители неустанно находятся в поиске того, где находится что-либо: *пища, жилища, пастбища, дороги, сокровища* и т. п. Обобщая задачи поиска можно сказать, что человечество постоянно находится в поиске **знаний**, в частности, «информации о том, где лежат сокровища».

Великий аргентинский писатель Хорхе Луис Борхес² в своем эссе «Четыре цикла» писал, что в мировой литературе вечными являются четыре темы:

1. Падение города.
2. Возвращение героя.
3. Поиск.
4. Самопожертвование бога.

Нетрудно заметить, что наиболее часто встречающейся как в литературе, так и в реальности является третья тема — **поиск**, ибо четвертая тема выходит за рамки обычного человеческого опыта, а две первые проявляются лишь в «минуты мира роковые».

Современные информационные технологии предоставляют исследователю мощный аппарат для «манипулирования данными», а не информацией. Данные, переведенные в электронную форму, приобретают новое качество, обеспечивая им более широкое распространение и эффективное использование. На первый взгляд, может сложиться впечатление, что развитие информационных технологий уже само по себе способно вывести работу с научной информацией на качественно новый уровень, но, к сожалению, это совсем не так. Современные информационные технологии пока не могут предоставить адекватный аппарат для оперирования с «информацией» и информационными ресурсами [1, 2]. Однако сами по себе данные (как набор битов) не представляют никакой информационной ценности без соответствующих описаний или моделей. Применение информационных технологий должно основываться на использовании различных моделей (феноменологических, информационных, математических и др.). Как неоднократно отмечал А. А. Ляпунов (см., например, [3]): «нет модели — нет информации». Для возможности продуктивной работы нужны данные, превращенные в «информацию», представленную в виде «знаний» — «адекватного отражения действительности в сознании человека в виде представлений, понятия, суждений теорий».

С появлением новой экономической категории³, какой являются информационные ресурсы, проблема поиска переключалась и в эту область. Человечество все больше начинает использовать для поиска необходимых знаний информационные ресурсы. Чтобы решить проблему доступа к информации человечество создало, библиотеки — как универсальную систему хранения «знаний», их систематизации и каталогизации [4]. На современном этапе информационная поддержка научно-образовательной деятельности осуществляется посредством специализированных информационных систем, организованных в форме электронной библиотеки.

Систематизация и классификация имеющихся информационных ресурсов в соответствии с имеющимися потребностями является одной из важнейших задач поддержки как научной, так и педагогической деятельности. Для этого необходима поддержка различных уровней абстракции при описании информации от кратких описаний до очень подробных описаний информационных объектов. Для поддержки сложных функций поиска и классификации информации недостаточно

²Хорхе Франсиско Исидоро Луис Борхес Асеведо — Jorge Francisco Isidoro Luis Borges Acevedo.

³Информация и информационные ресурсы существовали всегда, но эти ресурсы из-за своей специфичности не рассматривались ранее как отдельная экономическая категория, несмотря на то, что информация всегда использовалась людьми для управления и решения насущных задач.

хранить только полнотекстовые описания. Необходимы поддержка поиска по атрибутам, полнотекстового поиска, а также просмотр ресурсов по категориям и словарям-классификаторам. Наиболее важной задачей является задача систематизации ресурсов, для решения которой необходимо четко определить состав логико-семантических категорий (фасетов) и ключевых терминов (тезаурус), покрывающих избранную предметную область.

Другой важнейшей проблемой является идентификация ресурсов, определяющая конкретно для каждого факта, кто является его автором, где и когда он получен, с какими другими фактами он связан. В этой сфере деятельности часто необходимо установить связи между конкретными научными фактами (например, «что означает термин кибернетика») и сущностями информационной системы (персоны, документы, публикации и т.п.). Для этого необходима поддержка различных уровней абстракции при создании метаописаний (метаданных) информационных объектов: от кратких описаний до очень подробных. Далее будем использовать следующее понимание факта: «входящая в текст документа характеристика сущности, описываемой в онтологии информационной системы, представляемая как единичное значение данных». Факт может быть извлечен из информационного содержания объекта, либо определен экспертом. Факт может определять как свойства (атрибуты) объекта, так и его связь с другими объектами.

В классической монографии [5], изданной ВИНТИ еще в 1976 году, выделено два типа информационных потребностей исследователя: потребности в сведениях об источниках необходимой научной информации и потребности в самой необходимой научной информации (фактах). Для удовлетворения информационных потребностей первого предназначены информационные системы, получившие название «документальных» (библиографических), второго типа — «фактографических». В настоящее время наиболее востребованным средством информационного обеспечения научно-образовательной деятельности становятся интеллектуальные системы, сочетающие возможности информационных систем обоих названных типов и позволяющие удовлетворять информационные потребности квалифицированного пользователя в соответствии со схемой «документ → факт → рассуждение» [2]. В интеллектуальных информационных системах в качестве составного компонента выступают рассуждающая система, формализующая правила логического вывода, и интеллектуальный интерфейс.

Для уточнения смысла, вкладываемого в термин «факт» применительно к информационным системам поддержки научно-образовательной деятельности, представляется целесообразным использование семиотического подхода, подобно тому, как это было сделано в работе [6] для терминов «информация», «знание», «тезаурус», «онтология». В этой работе, в частности, показано, что данные соответствуют синтаксическому уровню сообщения (в том числе документа), информация (в узком смысле!) — семантическому, а знания — прагматическому. Отсюда вытекает, что функционирование интеллектуальной информационной системы (ИС) основано на двух противоположных процессах: при пополнении ИС новыми сведениями происходит преобразование семантической информации в данные, однако непосредственно потребности пользователя удовлетворяет обратный процесс — извлечение из данных нужной пользователю информации и знаний.

Согласно «Логико-философскому трактату» Л. Витгенштейна [7] мир состоит не из предметов (вещей), а из фактов. Факт выступает как нечто отличное от вещи, как некоторое отношение, как взаимодействие двух предметов. Мир рассматривается как нечто, определяемое связями (взаимодействиями). Любой факт при этом — фиксация некоего отношения. Все факты фиксируются фразами, например «молоток забивает гвоздь». Любое предложение структурировано вполне конкретным образом: оно может быть представлено как 2 (или 3, 4...) объекта, которые как-то

связаны между собой. Элементарное предложение связывает 2 объекта, а вещь – нечто общее совокупности фактов. Таким образом, отношения и факты объявляются первичными, а вещи представляют собой пересечение, совокупность возможных отношений. То есть с вещью можно соотнести общую область «пересечения» множества фактов. Атомарный факт есть соединение (двух) объектов. Анализ фактов дает объекты или предметы. При этом по мере накопления фактов представление о вещи может меняться. Благодаря такой трактовке мира вещь выступает не как нечто данное, застывшее, вполне определенное, а как некоторая сущность с размытыми границами, и эти границы уточняются по мере выявления класса возможных для данной сущности отношений (фактов). Чтобы определить вещь, надо зафиксировать все факты (положительные — где может встречаться эта вещь и отрицательные, где не может).

Ввиду того, что информация в ИС является отображением реальных или материальных сущностей (предметов, процессов, явлений, персон, публикаций, фактов, ключевых терминов и т. п.), следует рассматривать информационную систему как множество информационных объектов — наборов данных, представляющих (описывающих) эти сущности в ИС. Эффективным средством описания информационных объектов в ИС являются метаданные — данные, являющиеся неотъемлемой частью информационного объекта и описывающие реальный объект или группу объектов (см. рис. ??).

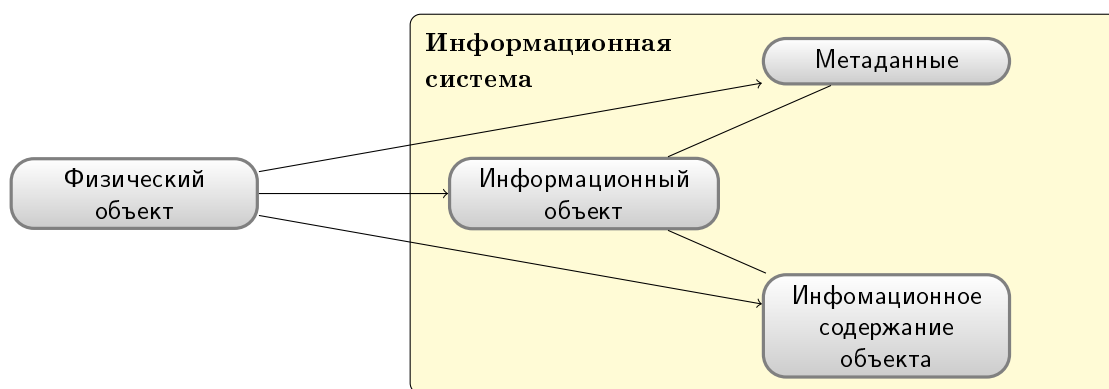


Рисунок 1 Структура информационной системы

В работе [8] был определен базовый профиль стандартов информационной системы для поддержки научных исследований, организованной в виде электронной библиотеки. Под профилем метаданных понимается адаптация существующей схемы метаданных к нуждам конкретной задачи, решаемой информационной системой [9]. Исходя из анализа существующих форматов метаданных, предназначенных для работы с публикациями, документами и другими информационными ресурсами, можно сделать вывод, что для исследовательской и преподавательской работы наиболее подходящим является формат ГОСТ 7.19-2001 (МЕКОФ) [10]. По сравнению с другими общеупотребительными форматами метаданных (форматы семейства MARC, см., например, [11, 12]) данный формат обладает наиболее полной системой классификации типов документов и других информационных ресурсов и достаточно большим набором словарей-справочников, необходимых для описания и идентификации информационных ресурсов.

В настоящей работе рассматривается технологический подход к созданию типовой модели информационной системы, предназначенной для обеспечения научно-образовательной деятельности. Разрабатываемая модель информационной системы для работы с информационными материалами должна решать задачи долговременного хранения информации, организации абстракт-

ного поиска по атрибутам, организации сбора и обмена метаданными и информацией между удаленными хранилищами информационных ресурсов.

Для поддержки сложных функций поиска и классификации информации недостаточно хранить только полнотекстовые описания. Необходимы поддержка поиска по атрибутам, полнотекстового поиска, а также просмотр ресурсов по категориям и словарям-классификаторам.

В существующих разработках электронных библиотек, как правило, поиск и доступ к информации обеспечивается только посредством визуальных графических интерфейсов. Это хорошо для пользователя-человека, но очень плохо для пользователя-приложения (например, для проведения различных аналитических исследований).

Для обеспечения функций поиска вне графических интерфейсов требуется поддержка специальных сетевых сервисов и языков запросов. В идеальном случае все информационные системы должны поддерживать единый поисковый профиль и единый язык запросов. Реализация парадигмы абстрактного поиска сегодня существует в виде нескольких моделей организации поисковых сервисов, например, модель Z39.50 [13, 14] и более простая модель SRW/SRU [14, 15]. Практическая реализация сервисов типа SRW/SRU дает существенно новое качество электронной библиотеки — возможность включения ее ресурсов в глобальные поисковые системы на более высоком уровне, нежели уровень внешней индексации статических WEB страниц другими системами.

Другие возможные типы поиска связаны с поиском по заданным шаблонам и с поиском с привлечением онтологии. Поиск с привлечением онтологии является более интеллектуальным. Для его реализации требуется дополнительная информация — информация о предметной области, включающая определения терминов, сущностей и связей. Следует отметить, что представление этой дополнительной информации должно соответствовать глобальным договоренностям — международным стандартам, иначе, поиск с привлечением словарей, тезаурусов и онтологии всегда будет ограничен текущей системой, а интероперабельность не будет реализована [2].

Определение электронной библиотеки

Решить проблему поиска и систематизации информации в информационной системе, предназначенной для поддержки научно-образовательной деятельности, нашей точки зрения возможно, если строить такую систему в виде электронной библиотеки [16].

Электронная библиотека (ЭБ) — это структурированная каталогизированная коллекция разнородных электронных документов, снабженная средствами навигации и поиска (в отличие от печатных изданий, микрофильмов и других носителей). ЭБ способна не только обеспечить многосторонний поиск в каталоге, но и предоставить пользователю непосредственно найденный ресурс (публикацию, документ, фотографию, описание факта и др.), а также дополнительные сведения о нем, например, информацию об авторах, библиографию, организации и т. п.

За высокой популярностью слов «электронная библиотека» стоит не только и не столько дань моде, сколько попытка охарактеризовать новый феномен — возникновение принципиально нового класса систем, призванных аккумулировать и распространять информацию в электронной форме. А большой интерес к самим системам данного класса объясняются потребностями общества и наличием развивающихся возможностей по их удовлетворению. В связи с этим можно сформулировать основные цели, стоящие перед ЭБ:

- обеспечение доступа к информации;
- сохранение научного и культурного наследия;
- повышение эффективности научных исследований и обучения.

В существующих разработках ЭБ, как правило, поиск и доступ к информации обеспечиваются только посредством визуальных графических интерфейсов. Это хорошо для пользователя-человека, но не годится для пользователя-системы. Для обеспечения функций поиска вне графических интерфейсов требуется поддержка специальных сетевых сервисов и языков запросов. В идеальном случае все ИС должны поддерживать единый поисковый профиль и единый язык запросов.

Однако в общем случае под словосочетанием «электронная библиотека» могут фигурировать совершенно различные объекты, такие как архивы цифрового контента и наборы программного обеспечения для управления этим контентом. Электронной библиотекой может называться система сетевых сервисов, предоставляющих доступ к цифровому контенту, объединенных единой системой управления этим доступом [17]. Такое определение ЭБ полностью соответствует определению традиционной библиотеки как организации в системе, например, министерства культуры [16].

В настоящее время нет какой-либо универсальной системы поддержки ЭБ, которая отвечала бы всем требованиям и ожиданиям пользователей. Анализ существующих систем ЭБ (см., например, [18]) показывает их разнородность на нескольких уровнях:

- на уровне информационной модели, которую они обеспечивают;
- на уровне поддержки пользователей и групп пользователей;
- на уровне функциональных возможностей.

Из-за этой разнородности и игнорирования нужд пользователей возникает ряд проблем:

- интеграция информации из различных ЭБ;
- сравнение ЭБ по предоставляемой функциональности;
- оценка и сравнение производительности различных систем ЭБ;
- добавление новых типов хранимых объектов;
- добавление новых функциональных возможностей;
- резервное копирование.

В настоящее время существуют достаточно мощные ИС, удовлетворяющие в той или иной степени потребности научных работников и преподавателей, однако основной недостаток большинства систем — ограниченность возможностей обеспечения интеграции ресурсов как внутри каждой из систем, так и с внешними системами. Основу разработки ЭБ составляют стандарты и международные рекомендации, формирующие профиль ЭБ, под которым понимается набор из одного или нескольких базовых нормативно-технических документов (стандартов и спецификаций), ориентированных на решение определенной задачи (реализацию заданной функции либо группы функций приложения или среды) с указанием, при необходимости, выбранных классов, подмножеств, опций базовых стандартов, которые являются необходимыми для выполнения конкретной функции [9]. Наиболее важным является профиль метаданных информации, циркулирующей в системе. Выбор профиля должен основываться на выполнении следующих требований:

- включать в себя основные типы информации, требующейся для поддержки научной работы;
- быть открытым, т. е. обеспечивать доступ к соответствующей информации по этим описаниям;
- быть расширяемым, т. е. обеспечивать возможность детализации описаний;

- обеспечивать возможности интеграции информации;
- обеспечивать возможности уникальной идентификации информации;
- обеспечивать возможности размещения и поиска информации в распределенной среде;
- быть ориентированным на современные и перспективные технологии описания и использования информации;
- обеспечивать возможности интероперабельности с внешней средой.

При работе с цифровыми объектами человечество уже выработало определенный набор стереотипов, отсутствие которых вызывает дискомфорт [16]. Одним из элементов этого набора является требование наличия взаимных ссылок между цифровыми объектами, проявляющихся, например, в виде гиперсвязей в пользовательских графических интерфейсах просмотра информации. Реализация взаимных ссылок в цифровых документах не представляет большой сложности, однако при этом проявляются специфические моменты. Во-первых, электронный объект с реализованными связями уже не совсем соответствует своему печатному оригиналу. Во-вторых, внедренные в объект связи должны быть гарантировано актуальными. Так появляется требование обеспечения ссылочной целостности данных. Это очень жесткое требование, которое трудно обеспечить даже в хорошо формализованных системах управления базами данных. Результат — новый цифровой объект как самосогласованное хранилище цифрового контента, или база данных цифровых объектов.

С другой стороны, в ЭБ объекты хранения могут содержать информацию, которая не имеет к объектам хранения традиционных библиотек вообще никакого отношения. Речь может идти об электронных копиях элементов хранения традиционных архивов, о видео-, аудио- информации, полученной разными способами, о научных или других фактах и т. п.

Существует достаточно много технологических разработок информационных систем для электронных библиотек, так или иначе ориентированных на поддержку научных исследований, обладающих как достоинствами, так и недостатками. Среди них следует отметить информационные системы, близкие к фактографическим, например, ИСИР (ЕНИП) РАН [19], ИРИС СО РАН [17], euroCRIS⁴, и документальные, например, eLibrary⁵, Информика⁶, MathNET⁷.

Функциональные требования к модели электронной библиотеки

Как уже отмечалось выше, основными целями создания ЭБ являются:

- предоставление научным работникам быстрого доступа к информационным ресурсам;
- предоставление результатов фундаментальных научных исследований мировому сообществу;
- предотвращение утраты ценных научных коллекций для будущих поколений ученых;
- создание новых технологий научных исследований, эффективного инструментария для их проведения.

Как известно большая часть научной информации быстро устаревает. Для этого типа информационных ресурсов важно хранить описание жизненного цикла этих ресурсов и иметь возможность восстановить состояние ресурса на любой момент времени. Кроме того, существуют

⁴<http://www.eurocris.org/>

⁵<http://elibrary.ru/>

⁶<http://www.informika.ru/>

⁷<http://www.mathnet.ru/>

информационные ресурсы, которые могут быть доступны длительное время. К таковым, например, относятся документы, имеющие длительную юридическую силу, патенты, мультимедийная информация об исторических событиях, которая может быть востребована через любой период времени. Кроме того, научные отчеты институтов, речи ученых, письма и служебные записки могут также иметь огромную историческую значимость, становясь более ценной со временем. Поэтому ЭБ должна поддерживать возможность длительного хранения информационных ресурсов с возможностью восстановления их.

Для документов, связанных с научно-педагогической деятельностью, важной проблемой является идентификация информационных ресурсов [20, 21], определяющая конкретно для каждого факта, кто является его автором, где и когда он получен, с какими другими фактами он связан. Для этого необходима поддержка различных уровней абстракции при описании информации от кратких описаний, до очень подробных описаний информационных объектов.

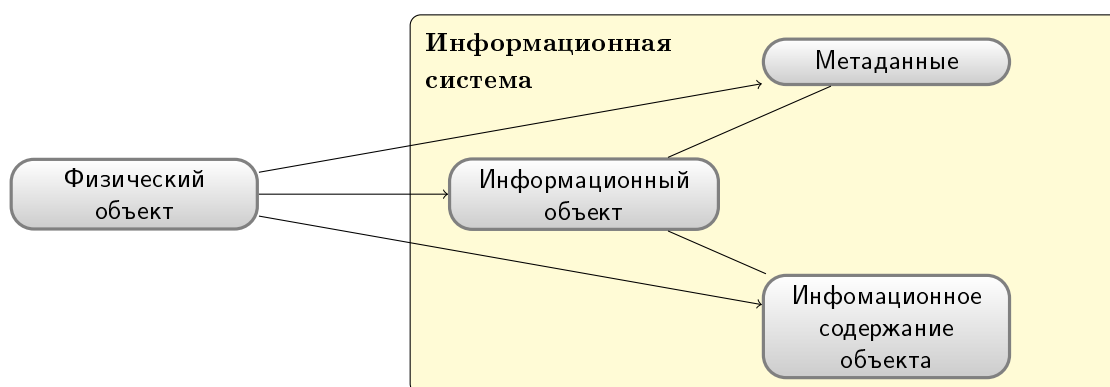


Рисунок 2 Архитектура электронной библиотеки

Исходя из целей ЭБ и анализа существующих систем, направленных на поддержку научных исследований, можно сформулировать следующие функциональные требования к модели ЭБ, предназначенной для поддержки научно-образовательной деятельности:

- надежное долговременное и защищенное от исчезновения хранение информации;
- актуальность, полнота, достоверность происхождения документов;
- историчность информации;
- географическая привязка информации;
- наличие большого числа словарей-классификаторов (справочников), для обеспечения идентификации и классификации ресурсов;
- поддержка неоднородных и слабо структурированных информационных ресурсов;
- поддержка взаимосвязей информационных ресурсов;
- предоставление информации пользователю в виде, выбранном пользователем;
- наличие интеллектуальных служб обслуживания запросов пользователя;
- наличие программных интерфейсов для поддержки аналитической работы пользователя с помощью программных приложений;
- поддержка требований интероперабельности как на программном, так и на семантическом уровне;
- поддержка работы с внешними источниками.

Наиболее важным выводом из вышесказанного является то, что информационная модель ЭБ должна быть многоуровневой и состоять как минимум из следующих компонент [22, 23]: хранилище данных — репозиторий, сервер метаданных, сервер приложений, словари-справочники (см. рис. ??).

Концептуальные модели электронных библиотек

Основу разработки электронной библиотеки составляют, прежде всего, стандарты и международные рекомендации, формирующие профиль ЭБ. Наиболее важным являются профили метаданных информации, циркулирующей в системе.

Другим не менее важным аспектом описания ЭБ является онтология основных понятий, фактов, субъектов и объектов присутствующих в системе — задание основных классов и свойств, описывающих предметы, документы, понятия, персон, события, место, время и их отношения.

Основу или ядро модели составляют несколько базовых или главных сущностей (объектов) в данной предметной области. Это — Публикация, Документ, Организация, Персона, Проект и Событие. Для каждой из этих базовых сущностей определяются наборы собственных атрибутов или свойств.

Имеется несколько основных концептуальных эталонных моделей⁸ электронных библиотек (сравнительный их анализ можно посмотреть в [24]):

- Модель CIDOC CRM⁹, разработанная Международным комитетом по документации Международного совета музеев¹⁰ и предназначена для интеграции и обмена информацией в области мирового культурного наследия и связанных областей.
- Модель FRBR — разработана Международной федерацией библиотечных ассоциаций и учреждений¹¹ была разработана концептуальная модель FRBR¹² — «Функциональные требования к библиографическим записям» [25]. В основу модели FRBR положена ER-модель как обобщенное представление библиографического универсума, независимого от какого-либо кода каталогизации или реализации. В 2009 году модель FRBR была расширена концептуальной моделью FRAD¹³ — «Функциональные требования к авторитетным данным» [26].
- Модель DELOS DLRM. Международная ассоциация электронных библиотек DELOS¹⁴ представила свою модель в программном документе The DELOS Digital Library Reference Model Foundations for Digital Libraries [27], где приводится современная концептуальная модель ЭБ, с определениями важнейших представлений об архитектуре, ресурсах и функциональности электронных библиотек (ЭБ). Под эгидой DELOS объединились большинство европейских проектов создания ЭБ, такие как Europeana¹⁵ и UKOLIN.
- Проект Библиотеки конгресса США использует эталонную модель OAIS¹⁶, разработанную NASA [28].

В рамках проекта Библиотеки Конгресса США создан стандарт кодирования и передачи

⁸CRM — Conceptual Reference Model.

⁹<http://www.cidoc-crm.org/>

¹⁰ICOM-CIDOC — The International Committee for Documentation of the International Council of Museums.

¹¹IFLA — International Federation of Library Associations and Institutions, <http://www.ifla.org/frbr-rg>

¹²FRBR — Functional Requirements for Bibliographic Records.

¹³FRAD — Functional requirements of authority data.

¹⁴<http://www.delos.info>

¹⁵Europeana Digital Library: <http://www.europeana.eu/>

¹⁶OAIS-RM — Open Archival Information System Reference Model.

метаданных METS¹⁷. В METS для описания метаданных используется язык XML. Стандарт позволяет создать иерархическую структуру различных цифровых объектов, названий и местоположения файлов, которые представляют эти объекты, связанные метаданными.

Документ METS состоит из четырех частей: описательных данных (указывающих на описательные метаданные, внешние по отношению к конкретному документу или внутренние метаданные, или оба типа данных вместе), административных метаданных (представляющих информацию о создании и хранении файла, свойствах объекта, интеллектуальных правах), группы файлов (перечисляются все файлы, содержащие данные на оцифрованный объект) и элемента структурной карты, создающего иерархическую структуру объекта и связь всех элементов. Документ METS может использоваться в роли модулей передаваемой, архивной, распространяемой информации или в рамках модели OAIS Reference Model (Open Archival Information System Reference Model).

METS широко используется в библиотеках, особенно имеющих тенденцию создания разнородных электронных коллекций и электронных библиотек, например в Калифорнийской электронной библиотеке, Электронном архиве OCLC, библиотеках Гарвардского, Стенфордского университетов, а также в библиотеках университетов Беркли, Чикаго, в Национальной библиотеке Португалии, в Библиотеке Конгресса США и в других очень известных организациях. Постепенно METS начинает использоваться и в российских библиотеках.

Резюмируя рассмотрение этих моделей, отметим, что для наших целей это — нужный и полезный стандарт. Важным преимуществом стандарта является его формальный подход. Обобщая все многообразие коллекций и задач, модель содержит широкий набор универсальных понятий. Важную роль здесь играют временные сущности, так как они связывают объекты (концептуальные или физические) с временным диапазоном, местом и субъектами. Этот стандарт вполне может служить основой для информационной составляющей концептуальной модели ЭБ.

Отметим, что существует одно существенное различие в перечисленных моделях и потребностях наших пользователей — это реализация сущностей. Например, переиздание публикации в рамках библиотечных моделей это два разных объекта, то для нас это один объект, имеющий две реализации сущности.

Цифровые репозитории

Для организации системы долговременного хранения информационных ресурсов (депозитариев) международной организацией по стандартизации (ISO) предложен стандарт ISO-14721 (OAIS — Open Archive Information System) [28]. Эталонная модель для стандарта OAIS — это концептуальная модель, которая была использована многими организациями для разработки наборов метаданных и организации крупных хранилищ цифровых объектов.

Отметим, что для долговременного сохранения цифровых объектов необходимо, чтобы метаданные хранились отдельно от объектов, в системе, независимой от той, которая была использована при их создании.

Наиболее популярные в мире системы Цифровых репозитариев (ЦД), такие как DSpace [29], E-Prints [30], Fedora [31], GreenStone [32] и др., строятся в рамках модели OAIS на основе технологий открытых систем, что дает принципиальную возможность их использования при построении информационных систем.

В качестве репозитария для информационной системы выбран ЦД, созданный на основе

¹⁷METS — Metadata Encoding and Transmission Standard

DSpace. Выбор обусловлен тем, что данная система уже эксплуатируется в СО РАН (а так же в ряде других институтах и университетах России) на протяжении нескольких последних лет.

Процесс интеграции ЦД в среду электронной библиотеки для этих систем отличается только в несущественных деталях и основан на модели агрегирования и распространения метаданных. Применение этой модели закреплено в протоколе OAI Protocol for Metadata Harvesting (далее OAI или OAI-PMH) [33], который поддерживается большинством систем, предназначенных для хранения информационных ресурсов.

Отметим основные существенные особенности в использовании ЦД как хранилища информационных ресурсов:

- автоматизированная привязка к географии [34];
- автоматизированная индексация ресурсов поисковыми системами;
- полнотекстовый контекстный поиск;
- разграничение доступа к информационным ресурсам на основе протокола LDAP [35], что позволяет при создании информационной системы не разрабатывать собственную систему аутентификации, а использовать уже существующую в СО РАН систему аутентификации пользователей, и достаточно легко разграничить ресурсы на публичные и служебные.

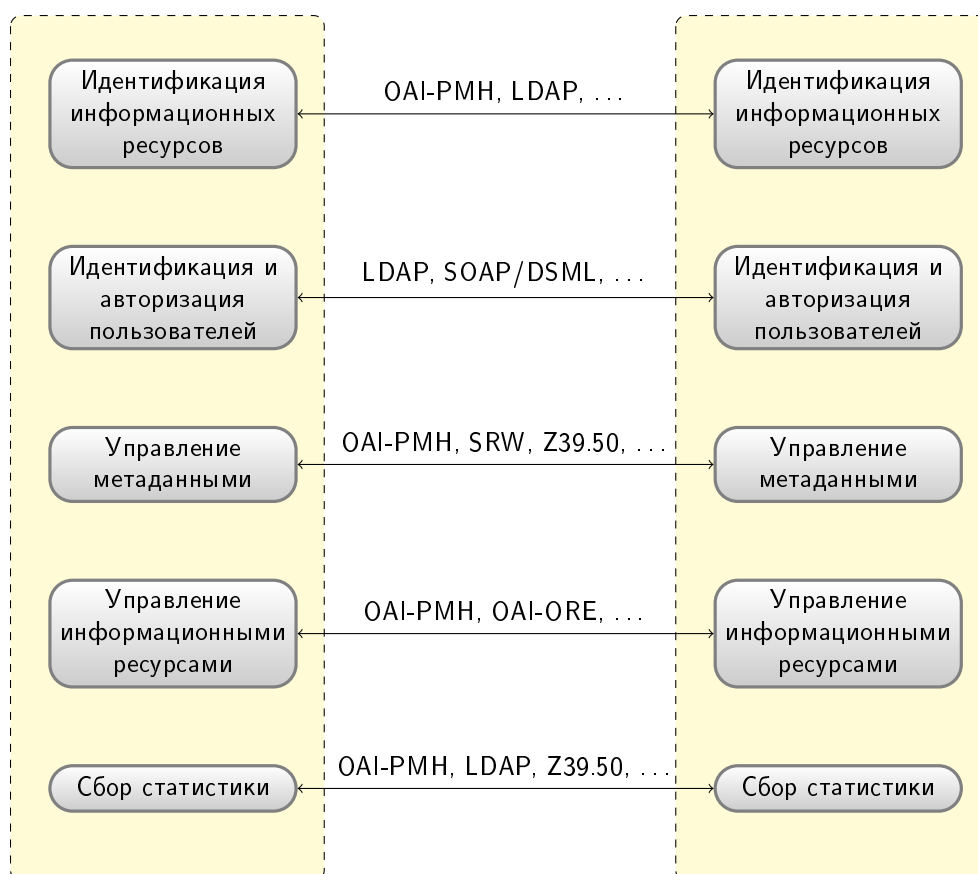


Рисунок 3 Сетевое взаимодействие подсистем

Исходя из вышеперечисленных требований, информационная система для поддержки научно-образовательной деятельности должна содержать следующие функциональные компоненты:

- систему идентификации информационных ресурсов;

- систему идентификации, аутентификации и авторизации пользователей;
- систему контроля доступа к данным и метаданным;
- систему управления метаданными;
- систему управления информационными ресурсами, в том числе полнотекстовыми;
- систему сбора статистики;
- систему мониторингу доступности сервисов и ресурсов.

Реализация этих подсистем должна основываться на открытых спецификациях, связанных с международными стандартами. В распределенной среде должны быть задействованы механизмы синхронизации данных, например, на основе репликаций. При этом в качестве протоколов сетевого взаимодействия должны выступать стандартные протоколы, например, OAI [23], Z39.50 [14], SRW/SRU [36], LDAP [37, 35] и др. (см. рис. ??).

Выбор метаданных для ЭБ

В работах [8, 20] был определен профиль ЭБ как необходимый набор стандартов и компонент ИС, ориентированной на научные исследования.

В настоящее время существует большое количество систем метаданных, предназначенных для описания различных классов информационных объектов. Использование систем метаданных (схем данных) пока еще недостаточно формализовано. Информационные системы, ориентированные на одинаковые классы информационных объектов, используют различные, часто оригинальные схемы и форматы метаданных, а также разные подходы к решению прикладных задач. Решением этих проблем занимаются многие организации во всем мире, например, W3C, DCMI, OCLC, IFLA, IETF, ISO.

Под интероперабельностью любой ИС, в том числе и ЭБ, понимается степень ее способности взаимодействовать с другими ИС, в том числе и с человеком. Но если при взаимодействии с человеком (как с информационной системой) основная нагрузка на обеспечение взаимопонимания ложится на человека, который в состоянии обработать даже плохо организованную информацию, то для обеспечения эффективного взаимодействия между собственно информационными системами требуются специальные технологические методы и общие соглашения.

Метаданные необходимы для решения следующих задач:

- предоставление сведений об объекте для получения представления о его содержании, структуре, способах использования и т. д.;
- сбор и систематизация информации об объектах описания;
- выбор из множества объектов определенного подмножества по формальным признакам и сопоставление объектов по формальным признакам;
- внутрисистемные технологические задачи, связанные с обеспечением подготовки объектов, размещением объектов в информационном фонде и т. п.;
- внешние технологические задачи, связанные, прежде всего, с обменом данными с внешними информационными системами.

Как мы уже отмечали, основу содержания электронной библиотеки по научному наследию составляют информационные объекты, которые представляют следующие основные типы сущностей [8, 20, 23]:

- субъекты: персоны, организации и т. п.;

- объекты – единицы хранения: публикация, документ, факт, научный результат, мероприятие, фотография и др.;
- отношения: понятие, ключевой термин, событие, время, место.

В отличие от общепринятых документных (библиографических) ЭБ указание на субъекты дается ссылкой на экземпляр сущности субъект, что позволяет корректно решать задачу идентификации объектов. Схема отношений в ЭБ по научному наследию является персоноцентричной: все объекты и отношения, понятия, факты, мероприятия, публикации и др. жестко привязываются к персонам.

Используемый профиль определяет список элементов данных (полей), необходимых для создания записи соответствующего типа и раскрывает содержание элементов данных [16, 8]. Для эффективной работы сервера приложений необходимо использовать набор словарей-классификаторов, содержащих как классификационные признаки, так и наборы ключевых терминов (с отношениями порядка), по которым производится систематизация и классификация материала.

Для формирования метаданных применяются несколько стандартов, являющихся расширениями рекомендаций Dublin Core¹⁸, Qualified Dublin Core (QDC). Для документов нами была расширена стандартная схема метаданных QDC полями, включающими основные требования государственного стандарта МЕКОФ [10].

Словари (ключевые признаки, ключевые термины) — это особый вид метаданных, которые отражают наиболее существенные свойства объекта, имеющие наибольшее значение с точки зрения ИС, и их специфика определяются терминологией конкретной предметной области, которой посвящена ЭБ. Необходимо рассматривать различные типы ключевых терминов, а именно:

- ключевые термины в стандартном понимании;
- ключевые термины, описывающие персону;
- ключевые термины, описывающие организацию;
- ключевые термины, описывающие временные периоды;
- ключевые термины, описывающие географические понятия,

а также тематические словари-классификаторы, тезаурусы, описания предметной области данной научной школы и классификаторы документов в соответствии с МЕКОФ [10].

Имеется ряд российских (например, УДК, ГРНТИ) и международных (например, MSC-2000¹⁹, ORTELIUS²⁰) словарей для классификации научных данных. Однако в целом эти словари содержат только общенаучную информацию и не годятся для систематизации материалов по научному наследию конкретной научной школы.

Метаданные существенным образом зависят от природы и структуры объектов реального мира, от способа представления их в виде информационных объектов и от специфики ИС. Учитывая это, необходимо классифицировать описываемые объекты. Законченная совокупность правил, достаточная для формирования метаданных в определенном классе ИС и/или для решения определенного класса задач над информационными объектами представляет собой систему метаданных.

Функционирование ИС связано с разнообразными процессами по созданию метаданных, их модификации, проверке корректности, предоставлению метаданных конечному пользователю и

¹⁸Dublin Core Metadata Initiative — <http://www.dublincore.org/>

¹⁹<http://www.ams.org/msc/>

²⁰<ftp://ftp.cordis.lu/pub/cerif/docs/ortelius.doc>

решению прикладных задач. Все эти процессы являются взаимосвязанными, их выполнение усложняется, как правило, большим количеством объектов, на представление и работу с которыми нацелена ИС. Реализация этих процессов и управление ими требуют специальных средств и методов, которые в совокупности с метаданными можно рассматривать как отдельную подсистему — систему метайнформационного сопровождения.

Реализация

Рассмотренная модель информационной системы, работающей с материалами научного наследия, реализована на примере научной школы Алексея Андреевича Ляпунова — основателя теоретического программирования и российской (советской) кибернетики, ЭБ по моделям динамики биосферы, а также как учебные пособия по курсам «Современные проблемы информатики и вычислительной техники», «Вычислительные системы», «Информатика» и «Экология».

Основной каталог информационных ресурсов сервера метаданных информационной системы строится в соответствии со схемой метаданных МЕКОФ. Для долговременного хранения документов использовался репозиторий DSpace²¹. Нами была расширена стандартная схема метаданных DSpace полями, включающими основные требования МЕКОФ. Для поддержки процесса наполнения полнотекстовых баз, созданные профили метаданных были зарегистрированы в системе DSpace и в соответствии с ними были настроены рабочие процессы и пользовательский интерфейс системы. Для того, чтобы выполнять обмен метаданными между DSpace в соответствии с расширенным профилем, был создан сервис, выполняющий преобразование схем метаданных из внутренней схемы DSpace в схему сервера метаданных и в схему Dublin Core с использованием квалификаторов. Реализован также OAI [33] сервис, который в пакетном режиме периодически, в соответствии с расписанием, проводит синхронизацию метаданных репозитория и сервера метаданных.

Для заполнения основного каталога метаданных в соответствии с созданными схемами метаданных используется контролируемые словари из справочного блока системы.

Заключение

Разработанная модель информационной системы может быть использована как типовая модель системы для работы с документами, связанных с научным наследием, поскольку решает основные задачи, предъявляемые к этим системам: обеспечение системы надежного долговременного хранения цифровых (электронных) документов с сохранением всех смысловых и функциональных характеристик исходных документов; обеспечение «прозрачного» поиска и доступа к документам пользователей как для ознакомления, так и для анализа и проведения научной работы; организация сбора информации по удаленным ЦД, поддерживающих протокол OAI.

Список литературы

- [1] Федотов А. М. Парадоксы информационных технологий // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. — 2008. — Т. 6, вып. 2. — С. 3–14.

²¹<http://www.dspace.org/>

-
- [2] Шокин Ю. И., Федотов А. М., Барахнин В. Б. Проблемы поиска информации. Новосибирск: Наука, 2010. — 198 с.
- [3] Ляпунов А. А. О соотношении понятий материя, энергия и информация // В кн.: Ляпунов А.А. Проблемы теоретической и прикладной кибернетики. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 320–323.
- [4] Федотов А. М., Барахнин В. Б. Проблемы поиска информации: история и технологии // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. — 2009. — Т. 7. — Вып. 2. — С. 3–17.
- [5] Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Научные коммуникации и информатика. // М.: Наука, 1976. — 436 с.
- [6] Барахнин В. Б., Федотов А. М. Уточнение терминологии, используемой при описании интеллектуальных информационных систем, на основе семиотического подхода // Известия вузов. Проблемы полиграфии и издательского дела. — 2008. № 6. С. 73–81.
- [7] Витгенштейн Л. Логико-философский трактат / Пер. с нем. Добронравова и Лахути Д.; Общ. ред. и предисл. Асмуса В. Ф. — М.: Наука, 1958 (2009). — 133 с.
- [8] Федотов А. М., Барахнин В. Б., Жижимов О. Л., Федотова О. А. Технология создания корпоративных информационных систем учета трудов научных работников // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2011. — т. 9. вып. 2. С. 31–41.
- [9] ГОСТ Р ИСО / МЭК ТО 10000-2-99. Информационная технология. Основы и таксономия функциональных стандартов. Часть 2. Принципы и таксономия профилей ВОС.
- [10] ГОСТ 7.19-2001 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Формат для обмена данными. Содержание записи.
- [11] MARC Standards / Library of Congress, Network Development and MARC standards Office // The Library of Congress [web-сайт] / Library of Congress. — 2007.
<http://www.loc.gov/marc/>.
- [12] RUSMARC [Электронный ресурс]: Российский коммуникативный формат // Российская Библиотечная Ассоциация [web-сайт] / Российская Библиотечная Ассоциация.
<http://www.rba.ru:8101/rusmarc/>
- [13] ANSI/ISO Z39.50-2003. Information Retrieval (Z39.50): Application Service Definition and Protocol Specification // NISO Press, Bethesda, Maryland, U.S.A. — ISBN 1-880124-55-6. — 267 p.
- [14] Жижимов О. Л., Мазов Н. А. Принципы построения распределенных информационных систем на основе протокола Z39.50. Новосибирск: ОИГТМ СО РАН; ИВТ СО РАН, 2004. — 361 с.
- [15] SRU — Search/Retrieval via URL / The Library of Congress. — USA —
<http://www.loc.gov/standards/sru>

- [16] Жижимов О. Л., Мазов Н. А., Федотов А. М. Некоторые заметки об эволюции цифровых репозитариев традиционных библиотек к полнофункциональным электронным библиотекам // Вестник Владивостокского государственного университета экономики и сервиса. Территория новых возможностей. – 2010. Т. 7, № 3. С. 55–63.
- [17] Шокин Ю. И., Федотов А. М., Жижимов О. Л., Гуськов А. Е., Столяров С. В. Электронные библиотеки - путь интеграции информационных ресурсов Сибирского отделения РАН // Вестник КазНУ, специальный выпуск. — г. Алматы, Казахстан, Казахский национальный университет им. аль-Фараби. 2005. № 2. С. 115–127.
- [18] Candela L., Castelli D., Fuhr N., Ioannidis Y., Klas C.-P., Pagano P., Ross S., Saidis C., Schek H.-J., Schuldt H., Springmann M. Current Digital Library Systems: User Requirements vs Provided Functionality. IST-2002-2.3.1.12. Technology-enhanced Learning and Access to Cultural Heritage. March 2006.
- [19] Бездушный А. Н. Интеграция метаданных Единого Научного Информационного Пространства РАН / Бездушный А. Н., Бездушный А. А., Серебряков В. А., Филиппов В. И. — М.: Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына РАН, 2006. — 238 с.
- [20] Федотов А. М., Барахнин В. Б., Жижимов О. Л., Федотова О. А. Проблемы создания информационных систем учета трудов научных сотрудников СО РАН // Труды IV Междунар. конф. «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2011) (Абзаково, Россия, 17–23 августа 2011). — Челябинск: ЧелГУ, 2011. С. 85–91.
- [21] Федотов А. М., Жижимов О. Л., Князева А. А., Колобов О. С., Мазов Н. А., Турчановский И. Ю., Федотова О. А. Проблемы авторитетного контроля для распределенных электронных библиотек и библиографических баз данных // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2011. — Т. 9. Вып. 1. С. 89–101.
- [22] Федотов А. М. Методологии построения распределенных систем // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. С. 3–17.
- [23] Жижимов О. Л., Федотов А. М., Федотова О. А. Построение типовой модели информационной системы для работы с документами по научному наследию // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2012. — Т. 10, № 3. С. 5–14.
- [24] Резниченко В. А., Проскудина Г. Ю., Овдий О. М. Концептуальная модель научной публикации // Труды 14-й Всероссийской научной конференции «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции» — RCDL-2012, Переславль-Залесский, Россия, 15–18 октября 2012 г.
- [25] Функциональные требования к библиографическим записям: окончательный отчет / Рос. библ. ассоц., Рос. гос. б-ка; пер. с англ. [В. В. Арефьев; науч. ред. пер.: Т. А. Бахтурина, Н. Н. Каспарова, Н. Ю. Кулыгина]. — Москва: РГБ, 2006. — 150 с.
- [26] Функциональные требования к авторитетным данным: концептуальная модель: заключительный отчет, декабрь 2008 / под ред. Гленна Е. Патона; Рабочая группа ИФЛА по разработке функциональных требований к авторитетным записям и их нумерации (FRANAR); одобрено Постоянными комитетами Секции по каталогизации и Секции по классификации и

индексированию ИФЛА, март 2009; Междунар. федерация библиот. ассоц. и учреждений, Рос. библиот. ассоц.; [пер. с англ. О. А. Лаврёнова]. — Санкт-Петербург: Российская национальная библиотека, 2011. — 115 с.

- [27] Candela L., Castelli D., Dobрева M., Ferro N., Ioanni-dis Y., Katifori H., Koutrika G., Meghini C., Pagano P., Ross S., Agosti M., Schuldt H., Soergel D. The DELOS Digital Library Reference Model Foundations for Digital Libraries. IST-2002-2.3.1.12. Technology-enhanced Learning and Access to Cultural Heritage. Version 0.98, December 2007.
http://www.delos.info/files/pdf/ReferenceModel/DEL0S_DLReferenceModel_0.98.pdf
- [28] ISO 14721:2012 Space data and information transfer systems — Open archival information system (OAIS) — Reference model.
- [29] DSpace [Электронный ресурс] : an open source solution for accessing, managing and preserving scholarly works // dspace.org [web-сайт] / MIT Libraries; HP Labs. — 2007. <<http://www.dspace.org/>>
- [30] EPrints Free Software [Электронный ресурс] // EPrints for Digital Repositories [web-сайт] / School of Electronics and Computer Science, University of Southampton, UK. — 2008. <<http://www.eprints.org/>>
- [31] Fedora [Электронный ресурс] : Fedora Repository System // Fedora Commons [web-сайт] / Gordon and Betty Moor Foundation; Cornell University Information Science; University of Virginia Library; The Andrew W. Mellon Foundation. — 2007. <<http://www.fedora-commons.org/>>
- [32] <http://www.greenstone.org/>
- [33] The Open Archives Initiative Protocol for Metadata Harvesting [Электронный ресурс]: Protocol Version 2.0 of 2002-06-14 // Open Archives Initiative: [web-сайт] / The OAI Executive; OAI Technical Committee. — 2004. <http://www.openarchives.org/>.
- [34] Барахнин В. Б., Жижимов О. Л., Куперштох А. А., Скачков Д. М., Федотов А. М. Алгоритм извлечения из текстовых документов географических названий, отражающих содержание // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2012. — Т. 10, № 1. С. 109–120.
- [35] RFC 4510 [Электронный ресурс]: Lightweight Directory Access Protocol (LDAP): Technical Specification Road Map / OpenLDAP Foundation. — 2006. <<http://www.apps.ietf.org/rfc/rfc4510.html>>
- [36] Жижимов О. Л., Пестунов И. А., Федотов А. М. Структура сервисов управления метаданными для разнородных информационных систем [Электронный ресурс] // Электронные библиотеки: российский научный электронный журнал. — 2012. — Москва: Институт развития информационного общества. — Т. 15. — № 6. — ISSN 1562-5419.
- [37] Федотов А. М., Шокин Ю. И., Жижимов О. Л., Молородов Ю. И. Служба директорий LDAP как единая информационная среда // Открытое и дистанционное образование. — 2007. — Томск. — № 4(28). — С. 31–41.

УДК 51-72

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ В ГИДРОТУРБИНЕ С ЗАТВОРОМ

С.Г. Черный, А.Ю. Авдюшенко, Д.В. Чирков

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

Abstract. The ring seal is a turbine's protective organ for emergency closure and proofing device during stops. One of the major problems encountered in the operation of the ring seal is it's jamming. Therefore, it is important to take into account axial F_z and radial (F_x, F_y) forces acting on the ring seal in design. The power of servos and measures to prevent jamming of the seal depend on value of forces. In this paper the numerical model is developed and on its basis the modeling of hydro-turbine with ring seal in a fixed position or in the process of its moving is performed. As a result of the analysis of axial and radial forces acting on the ring seal, provide recommendations for its use.

Keywords: hydro-power, unsteady flows, ring seal.

Аңдатпа. Сақиналыу қақпақ гидротурбинаның апаттық жабуында қорғайтын және аялдау уақытына герметикаландыратын органы болып табылады. Сақиналық қақпақтың пайдаланудың жанында пайда болатын маңызды мәселелердің бірі – оның сыналауы. Сондықтан жобалауда қолданыстағы жақтан қақпақтарына тұрақсыз судың ағының (F_x, F_y) тарамдалған күштерін және білікті F_z күшін есептеу маңызды болып табылады. Олардың мөлшерінен сервомоторлардың қуатының есептеуі және сыналаудан сақтап қалуы бойымен өлшемдерді қабылдануы бағынышты болады. Осы жұмыста сандық үлгі және оның негізінде қақпақтың бекітілген жағдайда немесе оның ұсынуының процессінде ағымдардың пішіндеуі жасалған. Білікті және тарамдалған қақпаққа әсер етуші күштерін талдаудың нәтижесінде оның пайдалануы бойымен кепілдеме сипаттаған.

Кілттік сөздер: гидротурбина, тұрақты ағымдар, сақиналық қақпақ.

Аннотация. Кольцевой затвор является защитным органом гидротурбины при аварийном её закрытии и герметизирующим устройством во время остановок. Одна из серьезных проблем, возникающих при эксплуатации кольцевого затвора – его заклинивание. Поэтому при его проектировании важным является учет осевых F_z и радиальных сил (F_x, F_y), действующих на затвор со стороны нестационарного потока воды. От их величины зависит расчет мощности сервомоторов и принятие мер по предотвращению заклинивания затвора. В настоящей работе разработана численная модель и на её основе осуществлено моделирование течений в гидротурбине либо при выдвинутом фиксированном положении затвора, либо в процессе его выдвижения. В результате анализа осевых и радиальных сил, действующих на затвор, сформулированы рекомендации по его эксплуатации.

Ключевые слова: гидротурбина, нестационарные течения, кольцевой затвор.

Введение

Объектом исследований является проточная часть насос-турбины с кольцевым затвором и течение воды в ней.

На рис. 1, *а* изображена расчетная область, состоящая из спиральной камеры (СК) с 22 статорными колоннами и «зубом» (рис. 6), направляющего аппарата (НА) с 24 лопатками и рабочего колеса (РК), имеющего 8 лопастей. Там же приведены расчетные сетки в блоках СК, НА и РК, стрелкой показано направление потока воды. На рис. 1, *б* приведено меридиональное сечение расчетной области. Изображено положение затвора, выдвинутого в проточный тракт на 0.85 от высоты b_0 НА. Величину $s = \frac{b}{b_0}$, где b – высота выдвинутой части затвора, будем называть степенью закрытия.

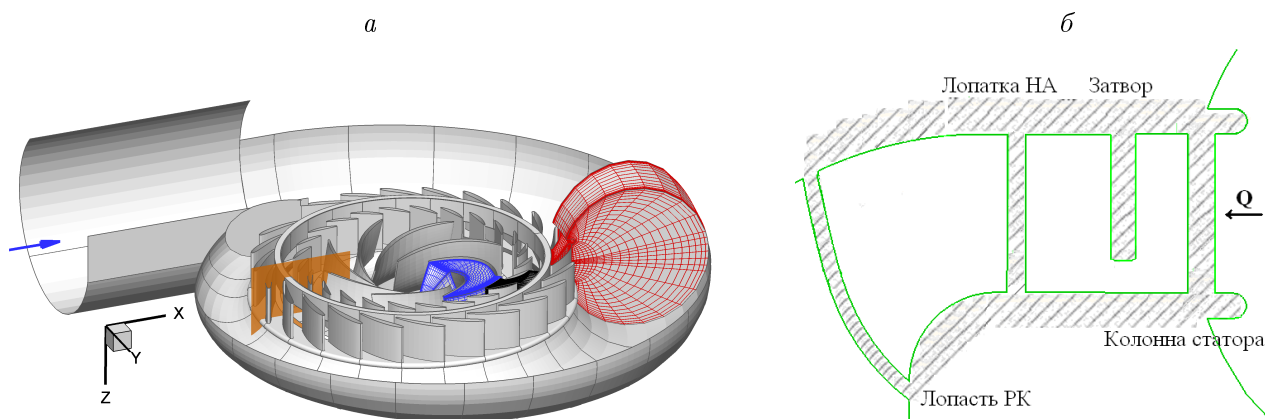


Рисунок 1 Проточная часть насос-турбины с кольцевым затвором: *а*) расчетная область с сетками в трех блоках; *б*) меридиональное сечение расчетной области

В работе проанализированы возможные постановки задачи моделирования течения в проточной части гидротурбины в процессе закрытия затвора. Предложены две основные модели: модель бесконечно тонкого затвора и модель затвора конечной реальной толщины. Каждая из этих моделей рассмотрена как в стационарной, так и в нестационарной постановке. При этом нестационарные расчеты проведены как при фиксированном, так и при движущемся затворе.

Для верификации процедур построения сеток в добавленной области под оголовком затвора и процедур передачи данных из неё в каналы статора и направляющего аппарата проведены расчеты течений в области, включающей один канал статора, один канал направляющего аппарата и один канал рабочего колеса (циклическая постановка). В расчетах менялось открытие направляющего аппарата, а также изменялась степень закрытия затвора от 0 до 99 %.

После этого была проведена адаптация имеющегося программного комплекса CADDRUN2 к задаче моделирования процесса закрытия затвора в полной постановке, описывающей течение в спиральной камере, во всех каналах статора, направляющего аппарата и рабочего колеса. В приближении уравнений Рейнольдса, замкнутых стандартной $k-\varepsilon$ моделью турбулентности, рассчитано течение для одного угла открытия направляющего аппарата и семи положений затвора. Исследовано влияние степени закрытия затвора на крутящие моменты лопаток направляющего аппарата и выталкивающую осевую силу F_z , действующую на оголовки затвора. Получены оценки радиальных сил (F_x, F_y) , действующих на боковую поверхность затвора, и других эффектов, связанных с неравномерностью потока в спиральной камере и ротор-статор взаимодействием.

Постановка задачи

Модели затвора

Модель бесконечно тонкого затвора

Известно, что толщина кольцевого затвора составляет около 2% от диаметра РК и около 10% от высоты НА. Учитывая малую толщину затвора по сравнению с высотой НА, можно считать, что хорошим приближением для моделирования процесса закрытия является модель тонкого затвора. В этом случае кольцевой затвор считается бесконечно тонкой цилиндрической поверхностью постоянного радиуса, расположенной за выходной кромкой статорных колонн (рис. 2).

Модель затвора реальной толщины

Также в работе рассмотрена модель затвора реальной толщины. В этом случае кольцевой затвор – цилиндр с заданной формой оголовка (рис. 3). Для реализации данной модели в программный комплекс введен новый элемент проточной части – кольцевая область между оголовком затвора и нижней крышкой НА.

Основные уравнения и численный метод их решения

Для моделирования течения жидкости в проточных частях гидротурбины используются нестационарные трехмерные уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу, имеющие в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) следующий вид

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i w_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

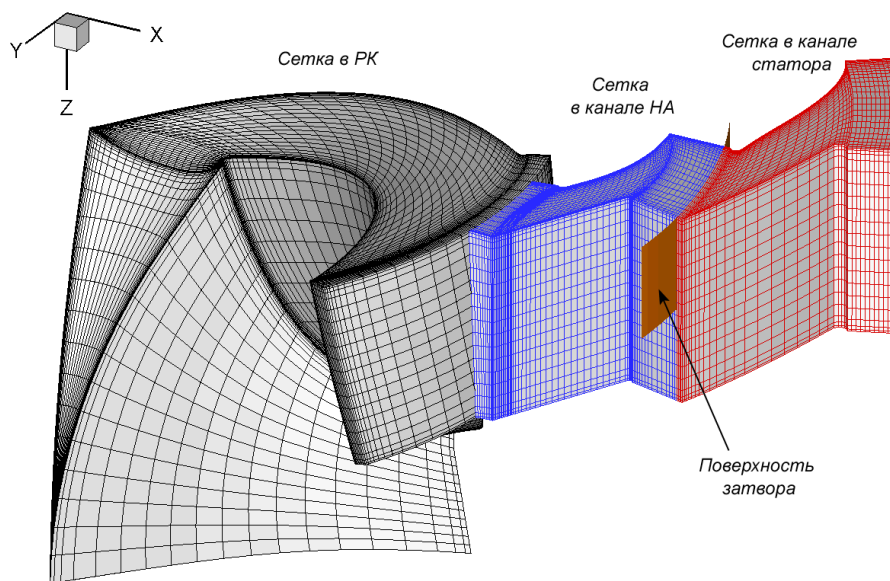


Рисунок 2 Расчетная область в циклической постановке для модели бесконечно тонкого затвора: $s = 0.5$

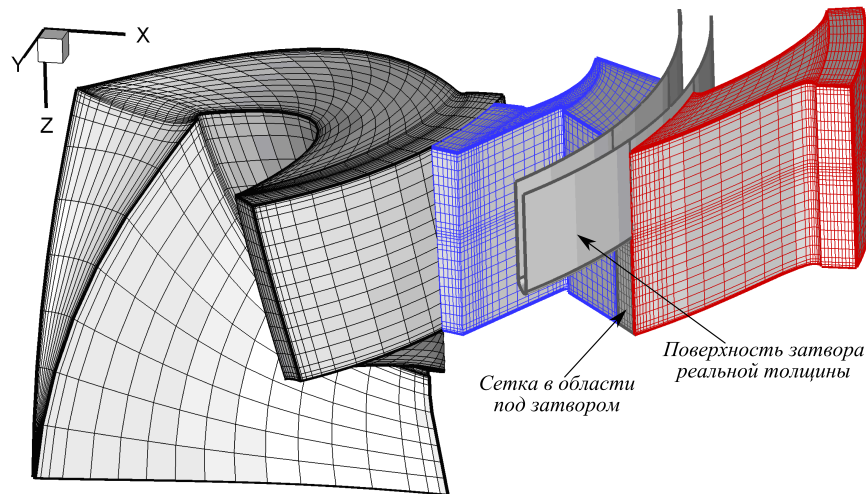


Рисунок 3 Расчетная область в циклической постановке для модели затвора конечной толщины:
 $s = 0.5$

где (w_1, w_2, w_3) – компоненты вектора скорости (м/с), $p = \frac{p_c}{\rho} + \frac{2}{3}k$, p_c – гидростатическое давление (Па), k – кинетическая энергия турбулентных пульсаций (м²/с²). При расчете течения во вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Ox_3 системе координат вектор массовых сил $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, помимо силы тяжести, включает центробежную и кориолисову силы: $\mathbf{f} = (x_1\omega^2 + 2w_2\omega, x_2\omega^2 - 2w_1\omega, g)$. Координату x_3 будем также обозначать буквой z , а давление p при анализе – делить на g и измерять в метрах водяного столба. Величина ν_{eff} есть сумма молекулярной ν и турбулентной ν_t вязкостей

$$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_t. \quad (3)$$

Для определения турбулентной вязкости $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ система (1)-(2) замыкается стандартной $k - \varepsilon$ моделью турбулентности.

Численный алгоритм решения уравнений (1)-(2) основан на методе искусственной сжимаемости, заключающемся во введении производной по псевдовремени τ от давления в уравнение неразрывности и производных по τ от соответствующих компонент скорости в уравнения сохранения количества движения. Полученные уравнения дискретизируются неявным методом конечных объемов с использованием MUSCL-схемы 3-го порядка аппроксимации для конвективных членов и центрально-разностной схемы 2-го порядка для вязких членов. Производные по физическому времени t аппроксимируются направленными разностями 2-го порядка, а введенные производные по псевдовремени – направленными разностями 1-го порядка. При этом на каждом шаге по t проводится установление решения по τ . Полученная в результате дискретизации система уравнений линеаризуется методом Ньютона. Система линейных алгебраических уравнений на приращение неизвестных при переходе со слоя s на слой $s + 1$ по псевдовремени приближенно LU -факторизуется и решается бегущим счетом. Детали численного алгоритма изложены в [1].

В случае движущегося затвора реальной толщины расчетная область под оголовком меняется. Это можно учесть использованием подвижных сеток. Обобщение метода на подвижные сетки, подстраивающиеся со временем под положения жёстких границ расчётной области проведено авторами в [2].

Краевые условия

На входе в область статора в циклической постановке задается полная энергия потока

$$E_{in} = H - h_{CK},$$

где H – напор на турбине, h_{CK} – потери энергии в спиральной камере. Предполагалось, что $h_{CK} = 0.01H$, поэтому на входе в статор задается полная энергия потока $E_{in} = 0.99H$ и угол входа потока $\delta = 30^\circ$. На выходе из РК держится полная энергия $E_{out} = h_{OT}$, где h_{OT} – потери энергии в отсасывающей трубе. Они оцениваются по инженерно-эмпирической формуле [3, 4]

$$h_{OT} = \xi_0 \frac{\bar{c}_z^2}{2g} + \frac{\bar{c}_u^2}{2g},$$

где $\xi_0 = 0.15$ – коэффициент потерь на трение в ОТ, $\bar{c}_u$, $\bar{c}_z$ – компоненты абсолютной скорости на выходе из рабочего колеса, усредненные по расходу (меняются в процессе расчета).

Кроме этого, на выходе из РК реализуется условие радиального равновесия на профиль давления

$$\frac{dp}{dr} = \frac{c_u^2}{r},$$

где c_u – окружная компонента скорости. Такие краевые условия позволяют определять расход Q в процессе расчета течения.

В отличие от расчетов в циклической постановке, расчеты в полной постановке проведены с использованием традиционных граничных условий «расход на входе – давление на выходе». На входе в спиральную камеру фиксировалось значение расхода Q , полученного для данного закрытия тонкого затвора в циклической постановке. На выходе из области РК задавалось постоянное давление $p = 0$.

Силы, действующие на кольцевой затвор

Выталкивающая сила, действующая на оголовек

Выталкивающая сила F_z , действующая со стороны жидкости на оголовек затвора, в модели тонкого затвора оценивалась по формуле

$$F_z = R_0 d \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi, \quad (4)$$

где $R_0 = 0.71435$ м – внешний радиус реального затвора, $d = 0.03174$ м – толщина реального затвора, $p(\varphi)$ – окружное распределение давления в потоке сразу под кончиком затвора.

В случае затвора реальной толщины выталкивающая сила рассчитывается по формуле

$$F_z = \int_S p n_z dS, \quad (5)$$

где p – давление воды, S – поверхность оголовка, n_z – z -я компонента вектора внутренней единичной нормали к поверхности оголовка затвора.

Радиальная сила, действующая на боковую поверхность затвора

Также представляет интерес радиальная сила (F_x, F_y) , действующая на боковую поверхность затвора. Она возникает вследствие окружной неравномерности потока в спиральной камере. Компоненты этой силы рассчитывались по формулам

$$F_x = \int_{S_1} p n_x dS + \int_{S_2} p n_x dS + \int_{S_3} p n_x dS, \quad (6)$$

$$F_y = \int_{S_1} p n_y dS + \int_{S_2} p n_y dS + \int_{S_3} p n_y dS, \quad (7)$$

где p – давление жидкости, S_1 – внешняя поверхность затвора (со стороны статора), S_2 – внутренняя поверхность затвора (со стороны НА), S_3 – поверхность оголовка, (n_x, n_y) – компоненты вектора внутренней единичной нормали к поверхности затвора.

Результаты исследования

Стационарная постановка

Рассмотрены три угла открытия лопаток НА $\alpha_0 = 12^\circ, 26.5^\circ, 40^\circ$ и десять степеней закрытия кольцевого затвора s от 0.00 до 0.95. На рис. 4 показано сравнение рассчитанных приведенных к $H = 1$ м, $D_1 = 1$ м расхода $Q_{11} = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}}$ и силы $F_{z,11} = \frac{F_z}{D_1^2 H}$ для двух рассмотренных моделей затвора. Видно заметное отличие расхода, полученного в двух постановках, уже при $s \geq 0.5$. В модели затвора реальной толщины расход выше. Отметим, что при $s \geq 0.9$ в этой модели выталкивающая сила становится отрицательной, т.е. затвор втягивается в проточную часть.

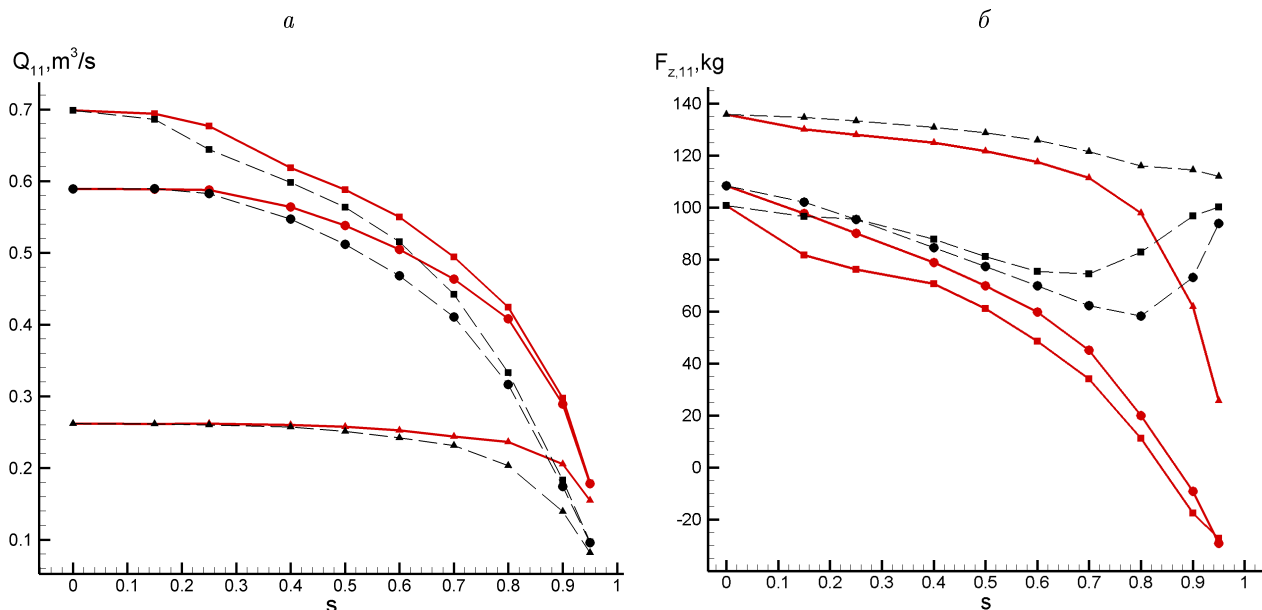


Рисунок 4 Зависимости приведенного расхода Q_{11} (а) и силы $F_{z,11}$ (б) от s для различных открытий НА: $\blacktriangle$ – $\alpha_0 = 12^\circ$; $\bullet$ – $\alpha_0 = 26.5^\circ$; $\blacksquare$ – $\alpha_0 = 40^\circ$. Пунктир – тонкий затвор; сплошные линии – затвор реальной толщины

Нестационарная постановка

В нестационарной постановке проведены расчеты с движущимся тонким затвором (циклическая постановка), также в модели затвора реальной толщины рассмотрены три степени закрытия кольцевого затвора $s = 0.5; 0.7; 0.9$ (полная постановка, угол открытия НА $\alpha_0 = 26.5^\circ$). На рис. 5 представлено сравнение зависимостей расхода Q_{11} от степени закрытия, полученных в различных постановках.

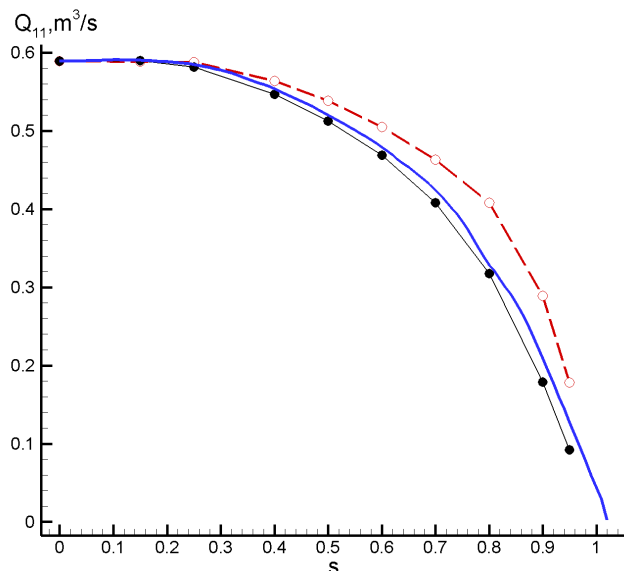


Рисунок 5 Зависимости приведенного расхода Q_{11} от s для открытия НА $\alpha_0 = 26.5^\circ$, циклическая постановка: $\bullet$ – фиксированные положения тонкого затвора; (сплошная) – тонкий движущийся затвор; $\circ$ – циклическая постановка, затвор реальной толщины

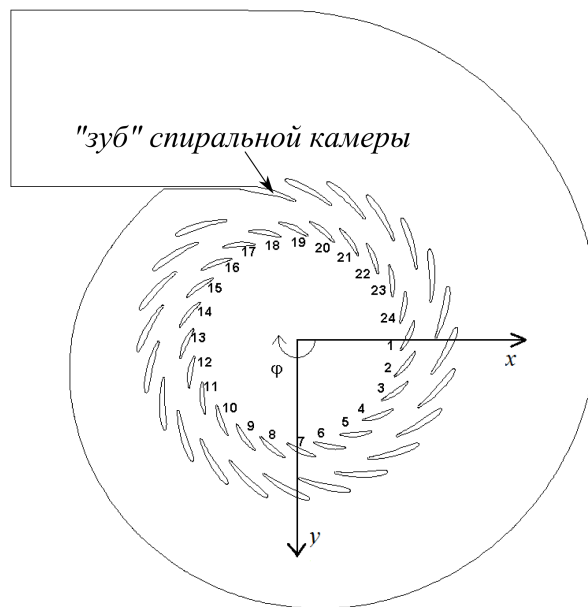


Рисунок 6 Взаимное положение лопаток направляющего аппарата и колонн статора. Показана нумерация лопаток НА

На рис. 7 приведены моменты на лопатках НА, рассчитанные в различных постановках с фиксированными положениями затвора. Выбросы момента на кривой, полученной в полной стационарной постановке при $s = 0.5$ находятся напротив лопастей РК. Максимальное значение крутящего момента получается на лопатке № 18, находящейся вблизи «зуба» СК. Необходимо отметить, что столь сильное влияние РК вызвано особенностями стационарной постановки: в процессе установления взаимное положение НА и РК остается неизменным. В действительности ротор-статор взаимодействие является более слабым, о чем свидетельствуют результаты расчетов в полной нестационарной постановке (—). Видно, что при больших закрытиях затвора ($s = 0.9$) исчезает влияние «зуба» спирали на моменты лопаток НА.

На рис. 8 показано сравнение осевых сил для всех проведенных расчетов. Приближение тонкого затвора дает завышенное значение силы $F_{z,11}$, в особенности при больших значениях s . Видно, что в диапазоне степеней закрытия $0 \leq s \leq 0.8$ все постановки с затвором реальной толщины дают очень близкие значения $F_{z,11}$. Отличие составляет $s = 0.9$, где полные стационарная и нестационарная постановки дают завышенное значение силы $F_{z,11}$. Из рис. 9 видно, что по мере закрытия затвора амплитуда пульсаций радиальных сил F_x и F_y возрастает.

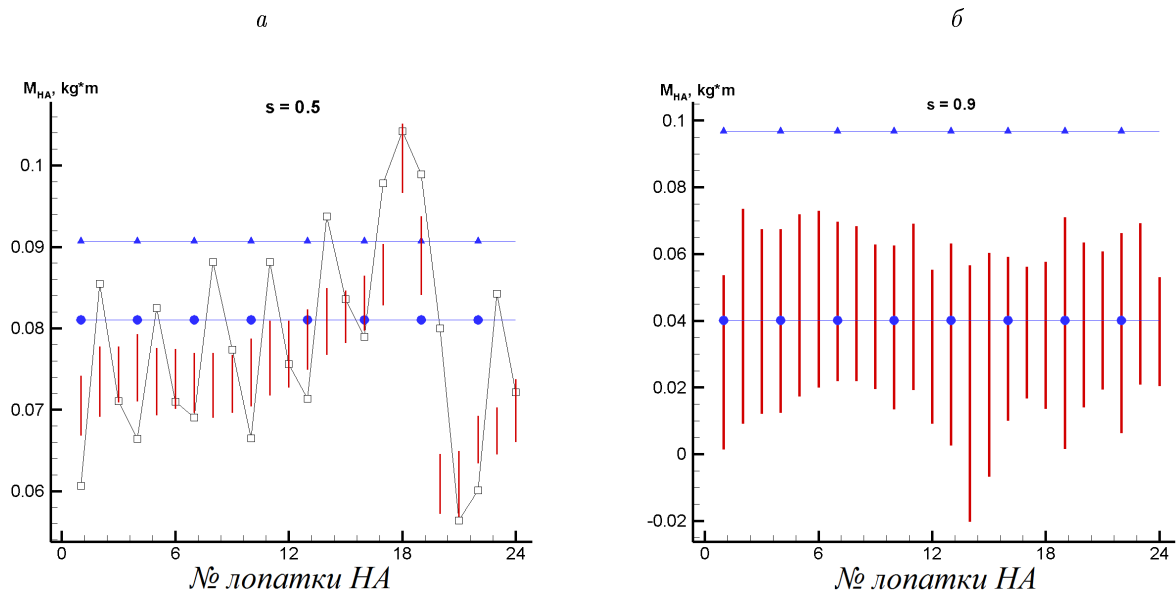


Рисунок 7 Гидравлический момент на лопатках направляющего аппарата: а) $s = 0.5$; б) $s = 0.9$. ● – циклическая постановка, тонкий затвор; ▲ – циклическая постановка, затвор реальной толщины; □ – полная стационарная постановка, затвор реальной толщины; вертикальными отрезками обозначена амплитуда колебаний, полная нестационарная постановка, затвор реальной толщины

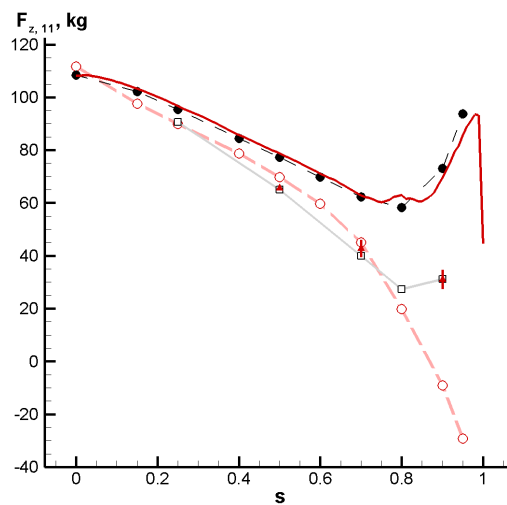


Рисунок 8 Осевая сила $F_{z,11}$, действующая на оголовки затвора: ● – циклическая постановка, тонкий затвор; сплошная линия – циклическая постановка, тонкий движущийся затвор; ○ – циклическая постановка, затвор реальной толщины; □ – полная стационарная постановка; ▲ – полная нестационарная постановка; вертикальными отрезками обозначена амплитуда колебаний в нестационарном расчете

Заключение

Построена новая численная модель течения воды в гидротурбине с затвором. Рассчитаны стационарные и нестационарные течения для различных фиксированных положений затвора реальной формы в области «статор-затвор-аппарат-колесо». Проведено сопоставление зависимостей сил, действующих на затвор, крутящих моментов лопаток, полученных в полной и циклической

постановках с затворами реальной толщины и бесконечно тонкими. Установлены интервалы наиболее достоверных значений этих параметров при различных положениях затвора. Показано, что амплитуды пульсаций резко возрастают, начиная от степени закрытия 0.7 и большей. Обнаружено сильное влияние окружной неравномерности потока, вызванной зубом спиральной камеры, на крутящие моменты лопаток направляющего аппарата, расположенных в окрестности зуба, при небольших степенях закрытия затвора. При степенях закрытия равных или больших 0.7 влияние зуба на моменты исчезает.

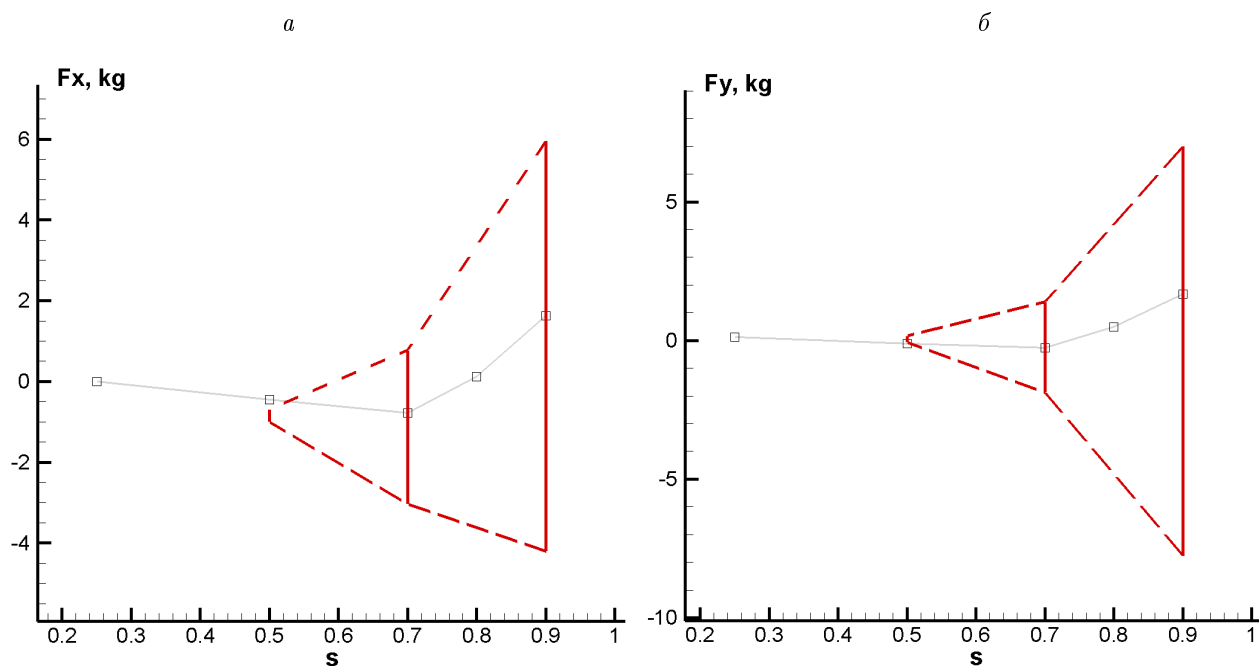


Рисунок 9 Компоненты радиальной силы, действующей на боковую поверхность затвора: $\square$ – полная стационарная постановка; вертикальные отрезки – полная постановка, амплитуда колебаний в нестационарном расчете

Список литературы

- [1] Чёрный С.Г., Чирков Д.В., Лапин В.Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006. 202 с.
- [2] Авдюшенко А.Ю., Черный С.Г., Чирков Д.В. Численный алгоритм моделирования пространственных течений несжимаемой жидкости на подвижных сетках // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 6. С. 3-25.
- [3] Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992, 672 с.
- [4] Этинберг И.Э., Раухман Б.С. Гидродинамика гидравлических турбин. Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние). 1978. 280 с.

УДК 519.6

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.В. Шайдуров, Г.И. Щепановская, М.В. Якубович

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Abstract. In this paper, algorithms are discussed for numerical solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations of viscous heat-conductive gas. Discretization of equations in time is realized by semi-Lagrangian method which often is called as the generalized method of characteristics or trajectories. And discretization in space is fulfilled by the finite element method. Particular attention is paid to the possible form of the boundary conditions for the closure of the computational domain and their implications for the numerical simulation in a test problem of gas flow in the channel as an example.

Аннотация. В работе обсуждаются алгоритмы численного решения двумерных уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа. Дискретизация уравнений по времени осуществляется полу-Лагранжевым методом, часто называемым обобщенным методом характеристик, иногда – методом траекторий. А дискретизация по пространству реализуется методом конечных элементов. Особое внимание уделяется возможному виду краевых условий для замыкания вычислительной области и последствий их использования при численном моделировании на примере тестовой задачи протекания газа в канале.

При решении уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа в ограниченной вычислительной области возникает проблема выбора краевых условий на границе истечения газа. К настоящему времени сложилось множество подходов к выбору таких краевых условий. Мы рассмотрим два из них на примере задачи протекания газа в канале. Для этого в качестве области определения возьмем единичный квадрат Q с границей Γ , состоящей из четырех сегментов:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : x = 1.0, y \in (0.0, 1.0)\}; \quad \Gamma_2 = \{(x, y) : x \in (0.0, 1.0], y = 0.0\};$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : x = 0.0, y \in [0.0, 1.0]\}; \quad \Gamma_4 = \{(x, y) : x \in (0.0, 1.0], y = 1.0\}.$$

Для аппроксимации задачи по времени введем равномерную сетку с шагом $\tau = T/M$:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, k = 0, \dots, M\}.$$

Для произвольной функции $\varphi(t, x, y)$ мы будем использовать обозначения $\varphi^k(x, y) = \varphi(t_k, x, y)$ и $\varphi_{l,m}^k = \varphi(t_k, x_l, y_m)$.

В этой работе мы опустим этап полу-Лагранжевой дискретизации уравнений Навье-Стокса по времени. Он подробно изложен в работе [1] и в настоящее время опубликован в ряде статей [4-7]. Его суть заключается в том, что совокупность первых производных (субстанциональная или Лагранжева производная) заменяется с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы. В итоге из четырех уравнений системы Навье-Стокса на каждом шаге по времени получается система стационарных уравнений, не содержащих производных по времени.

Кроме того, для обеспечения устойчивости и сходимости приближенных решений метода конечных элементов в норме пространства $L_2(Q)$ мы производим следующую замену искомых переменных

$$\sigma = \rho^{1/2}, \quad \varepsilon = e^{1/2}.$$

С учетом положительности плотности ρ и энергии e эта замена не производит комплексных чисел.

Итак, мы начинаем описание дискретизации уравнений Навье-Стокса по пространству с момента, когда дискретизация по времени на временном слое t_{k+1} уже проведена и полученные уравнения представляют собой систему эллиптических уравнений второго порядка для двух компонент скорости $v = (u, v)$ и «энергии» ε , а также одного уравнения первого порядка для «плотности» σ . Для них мы применим метод конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями и используем для интегрирования по ячейкам простые квадратурные формулы [1, 2].

В целях упрощения изложения возьмем равномерную квадратную сетку по пространству с координатами $x_l = lh$, $y_m = mh$, $l = 0, 1, \dots, n$, $m = 0, 1, \dots, n$, с шагом $h = 1/n$. Множество узлов этой сетки обозначим через $\bar{\Omega}_h = \{s_{l,m} = (x_l, y_m) : l = 0, 1, \dots, n, m = 0, 1, \dots, n\}$ и введем множество внутренних узлов $S_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega$.

Краевые условия в задачах газовой динамики играют важную роль, поскольку единственность решений исходных дифференциальных задач определяется, в том числе, граничными и начальными условиями. Кроме того, учет граничных условий существенно влияет на устойчивость и экономичность алгоритмов, а также на точность решения.

При решении уравнений Навье-Стокса на входе в канал Γ_3 обычно задаются условия невозмущенного потока:

$$v|_{\Gamma_3} = v_{\text{in}}, \quad e|_{\Gamma_3} = e_{\text{in}}.$$

А на твердых границах канала Γ_2 и Γ_4 задается условие прилипания

$$v|_{\Gamma_s} = 0, \quad s = 2, 4,$$

а также условие тепловой изоляции, то есть равенство нулю производной от внутренней энергии по нормали к твердой стенке

$$\left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_{\Gamma_s} = 0, \quad s = 2, 4.$$

На выходной границе Γ_1 предположим отсутствие возвратных течений. Тогда для уравнения плотности на этом участке не требуется краевых условий, но необходимо задать краевые условия для компонент скорости и внутренней энергии. Зачастую на практике применяются приближенные так называемые "мягкие" условия вида

$$\frac{\partial^s f}{\partial x^s} = 0, \quad \frac{\partial^s W}{\partial x^s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3),$$

предполагающие установление функций f или потоков W в продольном направлении x при подходе к выходной границе. Точность их использования и влияние на решение внутри области обычно исследуются численно варьированием положения входной границы и проверкой законов сохранения в расчетной области. Приведенные простейшие типы краевых условий, конечно, не описывают всего их многообразия.

Краевое условие Дирихле в методе конечных элементов может показаться экзотическим. Кажется, что для этого либо надо знать непростое поведение искомого решения на выходе из области, либо многократно увеличивать вычислительную область для достижения невозмущенного потока на выходе из нее. Между тем, с учетом полу-Лагранжевого подхода такие краевые условия уже не выглядят слишком экзотическими. В самом деле, предположим ситуацию, когда давление на выходе уже выровнялось, трение практически отсутствует, а главную роль играет лишь инерционный перенос газа и его свойств. Тогда за счет аппроксимации получающихся уравнений первого порядка [8] полу-Лагранжевым подходом на каждом слое по времени действительно получается краевое условие Дирихле.

Для узла, в котором ставится граничное условие Дирихле, значение искомой функции известно и соответствующее вариационное уравнение не возникает. Поэтому при проведении вычислений с этими условиями для каждой компоненты скорости получается $(n-1) \times (n-1)$ уравнений, а для «энергии» — $(n-1) \times (n+1)$ с учетом краевых условий Неймана, которые не устраняют необходимости построения вариационных уравнений в граничных узлах $\bar{\Omega}_h \cap \Gamma_2$ и $\bar{\Omega}_h \cap \Gamma_4$. Для примера выпишем вариационные уравнения только для внутренних узлов $(s_{l,m} \in S_h)$ вычислительной области.

Для $\sigma_{l,m}^{k+1}$ получаем схему следующего вида:

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{4h}(u_{l+1,m}^k - u_{l-1,m}^k) + \frac{1}{4h}(v_{l,m+1}^k - v_{l,m-1}^k) \right) \sigma_{l,m}^{k+1} = \frac{1}{\tau} \sigma^k(\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k),$$

$$l, m = 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Здесь и далее координаты $(\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k)$ означают точку выхода траектории частицы из плоскости $t = t_k$, приходящую в узел (x_l, y_m) на слое $t = t_{k+1}$.

Вариационные уравнения количества движения для продольной составляющей скорости u после дискретизации получаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m}^k) \right] u_{l-1,m}^{k+1} - \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + \mu_{l,m}^k) \right] u_{l,m-1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} + \frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) + \frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] u_{l,m}^{k+1} - \\ & \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] u_{l,m+1}^{k+1} - \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) \right] u_{l+1,m}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l-1,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{l,m-1}^k \right) \right] v_{l-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l,m+1}^k - \frac{1}{6} \mu_{l-1,m}^k \right) \right] v_{l-1,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l,m-1}^k - \frac{1}{6} \mu_{l+1,m}^k \right) \right] v_{l+1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l+1,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{l,m+1}^k \right) \right] v_{l+1,m+1}^{k+1} = \\ & \frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} u^k(\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{2h} (P_{l+1,m}^k - P_{l-1,m}^k), \quad l, m = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь μ — вязкость; P — давление.

Для компоненты скорости v после дискретизации получаются следующие алгебраические уравнения:

$$- \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m}^k) \right] v_{l-1,m}^{k+1} - \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + \mu_{l,m}^k) \right] v_{l,m-1}^{k+1} +$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} + \frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l-1,m}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) + \frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m-1}^k + 2\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] v_{l,m}^{k+1} - \\
& \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] v_{l,m+1}^{k+1} - \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) \right] v_{l+1,m}^{k+1} + \\
& \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l,m-1}^k - \frac{1}{4} \mu_{l-1,m}^k \right) \right] u_{l-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l-1,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{l,m+1}^k \right) \right] u_{l-1,m+1}^{k+1} + \\
& \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{l+1,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{l,m-1}^k \right) \right] u_{l+1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{l,m+1}^k - \frac{1}{4} \mu_{l+1,m}^k \right) \right] u_{l+1,m+1}^{k+1} = \\
& \frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} v^k(\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{2h} (P_{l,m+1}^k - P_{l,m-1}^k), \quad l, m = 1, \dots, n-1. \tag{3}
\end{aligned}$$

И наконец для ε во внутренних узлах получаем следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l,m}^k - \varepsilon_{l-1,m}^k) - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m}^k) \right] \varepsilon_{l-1,m}^{k+1} + \\
& \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l,m}^k - \varepsilon_{l,m-1}^k) - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l,m-1}^k + \mu_{l,m}^k) \right] \varepsilon_{l,m-1}^{k+1} + \\
& \left[\frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (4\varepsilon_{l,m}^k - \varepsilon_{l+1,m}^k - \varepsilon_{l-1,m}^k - \varepsilon_{l,m+1}^k - \varepsilon_{l,m-1}^k) + \right. \\
& \quad \left. \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (4\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k + \mu_{l-1,m}^k + \mu_{l,m+1}^k + \mu_{l,m-1}^k) \right] \varepsilon_{l,m}^{k+1} - \\
& \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l,m+1}^k - \varepsilon_{l,m}^k) + \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l,m+1}^k) \right] \varepsilon_{l,m+1}^{k+1} - \\
& \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (\varepsilon_{l+1,m}^k - \varepsilon_{l,m}^k) + \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{l,m}^k + \mu_{l+1,m}^k) \right] \varepsilon_{l+1,m}^{k+1} = \\
& \frac{\rho_{l,m}^{k+1}}{\tau} \varepsilon^k(\bar{X}_l^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{4h} \frac{P_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} (u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1} + v_{l,m+1}^{k+1} - v_{l,m-1}^{k+1}) + \\
& \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left((u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1})^2 + (u_{l,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1})^2 \right) + \\
& \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left((v_{l,m+1}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1})^2 + (v_{l,m}^{k+1} - v_{l,m-1}^{k+1})^2 \right) + \\
& \frac{1}{8h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left[(v_{l+1,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + u_{l,m+1}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1})^2 + (v_{l,m}^{k+1} - v_{l-1,m}^{k+1} + u_{l,m+1}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1})^2 + \right. \\
& \quad \left. (v_{l+1,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + u_{l,m}^{k+1} - u_{l,m-1}^{k+1})^2 + (v_{l,m}^{k+1} - v_{l-1,m}^{k+1} + u_{l,m}^{k+1} - u_{l,m-1}^{k+1})^2 \right] + \\
& \frac{1}{12 \text{Re}} \frac{\mu_{l,m}^k}{\varepsilon_{l,m}^k} \left[(u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1} - v_{l,m+1}^{k+1} + v_{l,m}^{k+1})^2 + (u_{l,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1} - v_{l,m+1}^{k+1} + v_{l,m}^{k+1})^2 + \right. \\
& \quad \left. (u_{l+1,m}^{k+1} - u_{l,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + v_{l,m-1}^{k+1})^2 + (u_{l,m}^{k+1} - u_{l-1,m}^{k+1} - v_{l,m}^{k+1} + v_{l,m-1}^{k+1})^2 \right], \quad l, m = 1, \dots, n-1. \tag{4}
\end{aligned}$$

Уравнения для граничных узлов на Γ_2 и Γ_4 с учетом условия Неймана имеют несколько другой вид.

Напомним, что краевые условия Неймана учитываются уже на этапе вывода слабой (интегральной) формулировки задачи, когда возникают (криволинейные) интегралы на соответствующих участках границы после интегрирования по частям некоторых слагаемых. Далее приведем вариационные алгебраические уравнения, соответствующие узлам $s_{l,m} \in \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_1$ для компонент скорости и «энергии» после использования граничных условий $\partial U / \partial n = 0$, где $U = (u, v, \varepsilon)$.

Для компоненты скорости u получаем

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) \right] u_{n-1,m}^{k+1} - \left[\frac{1}{4h^2 \text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m}^k) \right] u_{n,m-1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} + \frac{2}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) + \frac{1}{4h^2 \text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + 2\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] u_{n,m}^{k+1} - \\ & \left[\frac{1}{4h^2 \text{Re}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] u_{n,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n-1,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{n,m-1}^k \right) \right] v_{n-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n,m+1}^k - \frac{1}{6} \mu_{n-1,m}^k \right) \right] v_{n-1,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n,m-1}^k - \frac{1}{6} \mu_{n,m}^k \right) \right] v_{n,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n,m}^k - \frac{1}{4} \mu_{n,m+1}^k \right) \right] v_{n,m+1}^{k+1} = \\ & \frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} u^k(\bar{X}_n^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{2h} (P_{n,m}^k - P_{n-1,m}^k), \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5)$$

Для компоненты v получаем

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) \right] v_{n-1,m}^{k+1} - \left[\frac{1}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m}^k) \right] v_{n,m-1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} + \frac{1}{2h^2 \text{Re}} (\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m}^k) + \frac{1}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{n,m-1}^k + 2\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] v_{n,m}^{k+1} - \\ & \left[\frac{1}{3h^2 \text{Re}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] v_{n,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n,m-1}^k - \frac{1}{4} \mu_{n-1,m}^k \right) \right] u_{n-1,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n-1,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{n,m+1}^k \right) \right] u_{n-1,m+1}^{k+1} + \\ & \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{4} \mu_{n,m}^k - \frac{1}{6} \mu_{n,m-1}^k \right) \right] u_{n,m-1}^{k+1} + \left[\frac{1}{h^2 \text{Re}} \left(\frac{1}{6} \mu_{n,m+1}^k - \frac{1}{4} \mu_{n,m}^k \right) \right] u_{n,m+1}^{k+1} = \\ & \frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} v^k(\bar{X}_n^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{4h} (P_{n,m+1}^k - P_{n,m-1}^k), \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для «энергии» получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (\varepsilon_{n,m}^k - \varepsilon_{n-1,m}^k) - \frac{\gamma}{2h^2 \text{PrRe}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n-1,m}^k) \right] \varepsilon_{n-1,m}^{k+1} + \\ & \left[\frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (\varepsilon_{n,m}^k - \varepsilon_{n,m-1}^k) - \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} (\mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m}^k) \right] \varepsilon_{n,m-1}^{k+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} - \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (4\varepsilon_{n,m}^k - 2\varepsilon_{n-1,m}^k - \varepsilon_{n,m-1}^k - \varepsilon_{n,m+1}^k) + \right. \\
& \quad \left. \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} (4\mu_{n,m}^k + 2\mu_{n-1,m}^k + \mu_{n,m-1}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] \varepsilon_{n,m}^{k+1} - \\
& \left[\frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (\varepsilon_{n,m+1}^k - \varepsilon_{n,m}^k) + \frac{\gamma}{4h^2 \text{PrRe}} (\mu_{n,m}^k + \mu_{n,m+1}^k) \right] \varepsilon_{n,m+1}^{k+1} = \\
& \frac{\rho_{n,m}^{k+1}}{2\tau} \varepsilon_{n,m}^k (\bar{X}_n^k, \bar{Y}_m^k) - \frac{1}{8h} \frac{P_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (2u_{n,m}^{k+1} - 2u_{n-1,m}^{k+1} + v_{n,m+1}^{k+1} - v_{n,m-1}^{k+1}) + \\
& \frac{1}{6h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} (u_{n,m}^{k+1} - u_{n-1,m}^{k+1})^2 + \frac{1}{12h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} \left((v_{n,m+1}^{k+1} - v_{n,m}^{k+1})^2 + (v_{n,m}^{k+1} - v_{n,m-1}^{k+1})^2 \right) + \\
& \frac{1}{8h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} \left[(v_{n,m}^{k+1} - v_{n-1,m}^{k+1} + u_{n,m+1}^{k+1} - u_{n,m}^{k+1})^2 + (v_{n,m}^{k+1} - v_{n-1,m}^{k+1} + u_{n,m}^{k+1} - u_{n,m-1}^{k+1})^2 \right] + \\
& \frac{1}{12h^2 \text{Re}} \frac{\mu_{n,m}^k}{\varepsilon_{n,m}^k} \left[(u_{n,m}^{k+1} - u_{n-1,m}^{k+1} - v_{n,m+1}^{k+1} + v_{n,m}^{k+1})^2 + \right. \\
& \quad \left. (u_{n,m}^{k+1} - u_{n-1,m}^{k+1} - v_{n,m}^{k+1} + v_{n,m-1}^{k+1})^2 \right], \quad m = 1, \dots, n-1. \tag{7}
\end{aligned}$$

На использование вязкости, гладко обращающейся в нуль, повлияли два мотива. Во первых, обращение в нуль вязкости означает превращение уравнений параболического типа второго порядка в уравнения первого порядка. Одновременно со стабилизацией давления это приближает поведение среды только к инерционному переносу газа и его параметров вдоль траекторий. Во вторых, на входе в канал образуется разрыв данных на концах отрезка Γ_3 . В них не совпадают пределы скорости u : по x он равен нулю за счет прилипания, а по y - невозмущенной скорости. Условие с исчезающей вязкостью на входе примиряет между собой тип уравнений и краевых условий.

Например, исчезающая вязкость на выходе из канала реализуется путем подстановки вместо динамической вязкости в уравнения количества движения и внутренней энергии функции следующего вида:

$$\mu(t, x, y) = \begin{cases} (\gamma(\gamma - 1)M^2\varepsilon^2)^\omega, & x \in [0, 1 - b], \\ (\gamma(\gamma - 1)M^2\varepsilon^2)^\omega \times (1 - x - 2b + c)(x - 1 + c)/(b - c)^2, & x \in (1 - b, 1 - c], \\ 0, & x \in (1 - c, 1]. \end{cases} \tag{8}$$

Согласно 8 динамическая вязкость на отрезке $x \in [0, 1 - b]$ равна своему расчетному значению, на отрезке $x \in (1 - b, 1 - c)$ убывает от расчетного значения до нуля и равна нулю на $x \in (1 - c, 1]$. В результате такого приема в области $x \in (1 - c, 1]$ уравнение неразрывности сохраняет прежний вид, уравнение скорости принимает форму уравнения Эйлера, а уравнение для внутренней энергии принимает упрощенный вид с учетом обращения в нуль теплового потока и диссипативной функции. Расчеты выполнялись на равномерных квадратных сетках, содержащих $[101 \times 101]$ и $[201 \times 201]$ узлов ($n = 100, 200$). Шаг по пространству соответственно равнялся $h = 0.01$ и $h = 0.005$.

Вычислительный эксперимент проводился для трех вариантов условий на границе расчетной области:

а) условия Дирихле для всех искомых функций на границе Γ ;

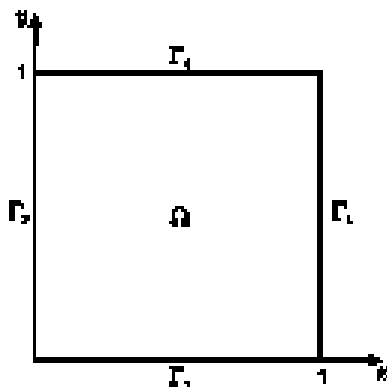


Рисунок 1 Вычислительная область

б) условия Дирихле и Неймана в следующем виде:

$$\sigma|_{\Gamma_{true}} = \sigma_{true}(t, x, y), \quad u|_{\Gamma_{true}} = u_{true}(t, x, y), \quad v|_{\Gamma_{true}} = v_{true}(t, x, y),$$

$$\varepsilon|_{\Gamma_3} = \varepsilon_{true}(t, x, y), \quad \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right|_{\Gamma_4} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 0,$$

где $\Gamma_{true} = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, а индекс *true* у функции означает, что она задана;

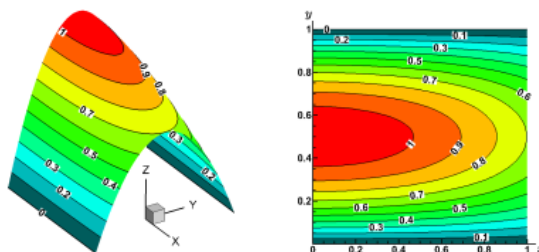
в) условия Дирихле и Неймана из варианта б) с использованием "исчезающей вязкости" на Γ_1 .

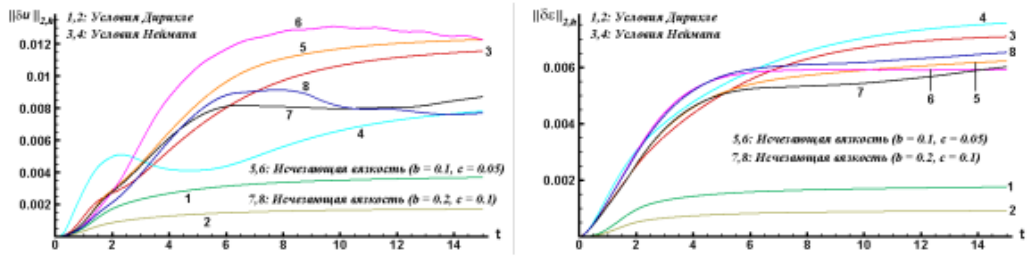
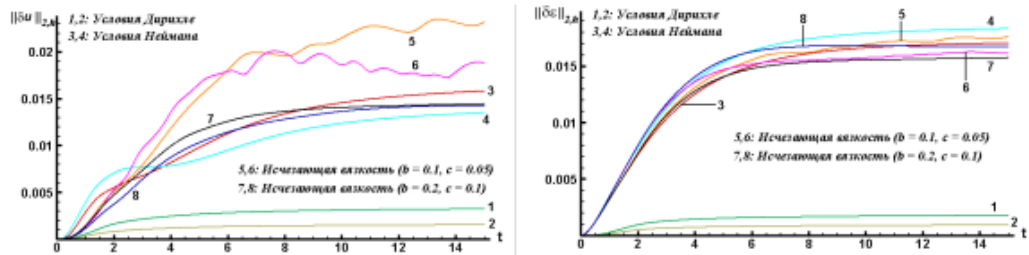
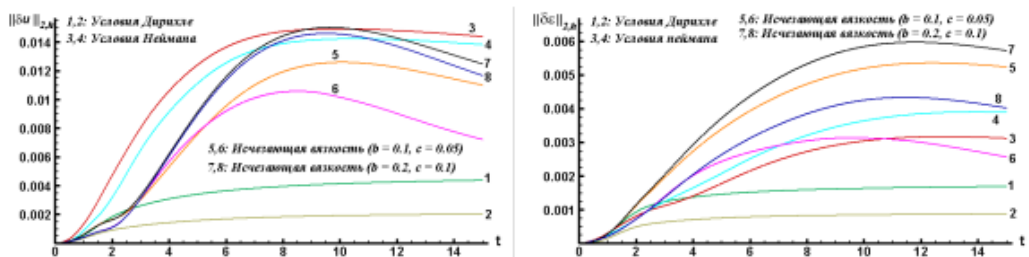
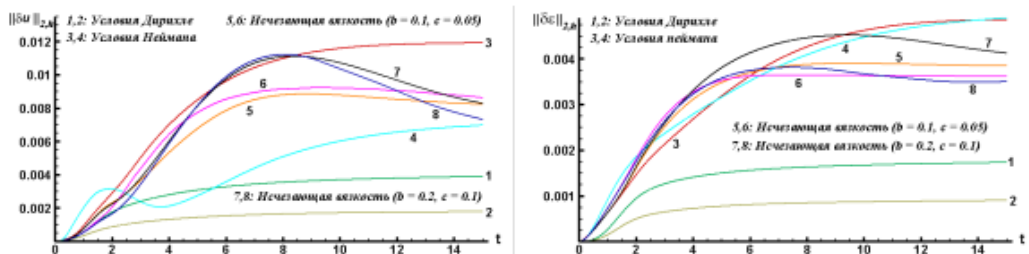
При реализации тестовых вычислений искомые функции $\sigma, u, v, \varepsilon$ имели следующий аналитический вид:

$$\sigma(t, x, y) = (2 - x^2)y(1 - y)\operatorname{arctg}(t) + 1, \quad u(t, x, y) = (2.8 - x^2)y(1 - y)\operatorname{arctg}(t),$$

$$v(t, x, y) = 0.1(2 - x^2)y(1 - y)\operatorname{arctg}(t), \quad \varepsilon(t, x, y) = (1 - x^2)y(1 - y)\operatorname{arctg}(t) + 0.67. \quad (9)$$

После подстановки тестовых функций 9 в исходные уравнения получаются правые части, которые учитываются при численном решении уравнений Навье-Стокса. На рис. 2 представлен график функции u в момент времени $t = 50$. Расчеты проводились на сетках с шагом $h = 0.01, 0.005$ ($n = 100, 200$) и шагом по времени $\tau = 0.0005$. На рис. 3 – 6 представлены графики поведения сеточных аналогов норм погрешностей для u и ε при постановке различных вариантов граничных условий для чисел Маха $M = 2, 4$ и чисел Рейнольдса $Re = 2 \times 10^3, 10^4$. Кривые 1, 2 соответствуют расчетам с условиями Дирихле на границе области для всех искомых функций. Кривые 3, 4 соответствуют вычислениям по варианту б). Кривые под номерами 5, 6 соответствуют расчетам для варианта в) с параметрами $b = 0.2, c = 0.1$, кривые 7, 8 – с параметрами $b = 0.1, c = 0.05$. График с "исчезающей вязкостью" ($b=0.2, c = 0.1$) в момент времени $t = 50$ представлен на рис. 7.

Рисунок 2 График функции u при $t = 50$

Рисунок 3 $M = 2$ $Re = 2 \times 10^3$ Рисунок 4 $M = 4$ $Re = 2 \times 10^3$ Рисунок 5 $M = 2$ $Re = 10^4$ Рисунок 6 $M = 4$ $Re = 10^4$

По рисункам можно сделать вывод, что уменьшение вязкости около выходной границы в некоторых случаях обеспечивает уменьшение погрешности вычислений по сравнению с условиями Неймана для определенных чисел Маха и Рейнольдса. Отчетливо это проявляется при $Re = 10^4$.

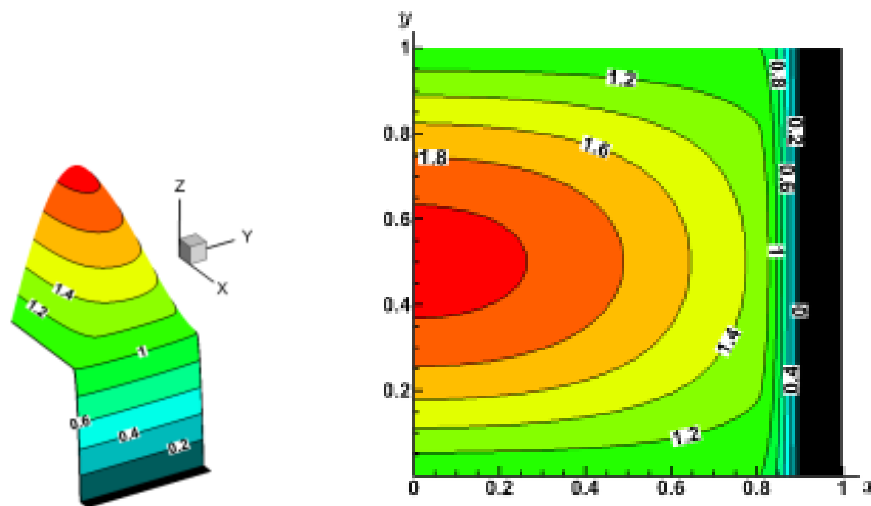


Рисунок 7 Распределение динамического коэффициента вязкости μ при $t = 50$ с параметрами $b = 0.2$, $c = 0.1$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00224) и программы фундаментальных исследований РАН (проект № 18.2).

Список литературы

- [1] Shaidurov V.V., Shchepanovskaya G.I., Yakubovich M.V. Numerical modelling of supersonic flows in channel // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2012. – V. 27, N 6. – P. 501–516.
- [2] Щепановская Г.И. Математическое и численное моделирование течений вязкого теплопроводного газа // Вестник СибГАУ. – 2011. – Т. 5, N 38. – С. 101–106.
- [3] Rannacher R. Methods for for Numerical Flow Simulation. Institute of Applied Mathematics, CityplaceUniversity of Heidelberg, country-regionGermany. – 2007. – P. 1–58.
- [4] Priestley A. A quasi-conservative version of the semi-Lagrangian advection scheme // Mon. Weather Rev. – 1993 – V. 121 –P. 621–629.
- [5] Scroggs J.S. and Semazzi F.H.M. A conservative semi-Lagrangian method for multidimensional fluid dynamics applications // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. – 1995 – V. 11 –P. 445–452.
- [6] Phillips T.N. and. Williams A.J. Conservative semi-Lagrangian finite volume schemes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. – 2001 – V. 17 –P. 403–425.
- [7] Iske A. Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. – 2004 – V. 20 –P. 388–411.
- [8] Shaydurov V., Liu T., Zheng Z. Four-stage Computational Technology with Adaptive Numerical Methods for Computational Aerodynamics // Conf. Proc. of American Institute of Physics. – 2012. – V. 1487. – P. 42–48.

УДК 537.84

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКИХ СРЕД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г.Б. Шерьязданов

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Abstract. Some possibilities of employing the electromagnetic field to control of the technological processes explains the interest in to study of magnetohydrodynamical (MHD) flows of two-phase medium. A two-phase flows may occur in MHD- facilities in which the working medium is a jet, carrying dispersed particles. The operation of such devices may take place when external electromagnetic fields are acting directly on the system.

Keywords: two-phase jet, electromagnetic field.

Аңдатпа. Технологиялық процесстерді басқару мақсатында электромагнитті өрісті қолдану мүмкіндігі қосфазалы ортадағы магниттігидродинамикалық (МГД) ағысты зерттеуге қызығушылық танытады. Қосфазалы ағыншалар ағысы дисперсті бөлшектері бар жұмыс ортасымен МГД-қондырғыларда орын алады. Осындай қондырғылардың жұмысы сыртқы электромагниттік өрістер жүйесіне әсер еткен кезде орын алады.

Кілттік сөздер: қосфазалы ағынша, электромагниттік өріс.

Аннотация. Возможности использования электромагнитного поля в целях управления технологическими процессами объясняют интерес к исследованию магнитогидродинамических (МГД) течений двухфазных сред. Двухфазные струйные течения имеют место в МГД-устройствах с рабочей средой, содержащей дисперсные частицы. Работа таких устройств протекает при непосредственном воздействии на систему внешних электромагнитных полей.

Ключевые слова: двухфазная струя, электромагнитное поле.

Магнитная гидродинамика (МГД) раздел механики сплошной среды, который изучает движение электропроводящих сред в магнитном поле.

Магнитное поле как средство управления теплофизическими процессами при движении электропроводящих сред имеет широкие возможности практического использования: металлургия (МГД-насос для перекачки жидкого металла), энергетика (МГД-преобразователи энергии), химическая технология и др.

Наряду с такими традиционными задачами магнитной гидродинамики, как МГД-течения в трубах и каналах, МГД-обтекание тел, определенный теоретический и практический интерес (МГД-устройства струйного типа), представляют струйные течения проводящих сред в магнитном поле.

Принципиальные возможности использования эффектов магнитной гидродинамики для воздействия на поток в целях управления пограничным слоем объясняют интерес к исследованию МГД-течений вязкой жидкости, в том числе и струйных.

Проблемы оптимизации конструкций и режимных параметров МГД-устройств потребовали в последние годы обратиться к рассмотрению двухфазных проводящих систем. Опыт использования в промышленности МГД-сепарации и интенсификация технологических операций путем

использования электропроводящих суспензий подтверждает перспективность магнитной гидродинамики двухфазных сред.

При исследовании двухфазных течений общепринятым является подход, основанный на использовании модели двухфазной среды, в которой реальное течение жидкости с примесями заменено взаимопроникающим движением несущей (жидкость) и дисперсной (твердые частицы) фаз. При этом каждая фаза рассматривается как континуум со своими собственными характеристиками (скорость, плотность, температура), для которых составляются свои уравнения движения, неразрывности и притока тепла. Взаимодействие между фазами учитывается через силу межфазного взаимодействия (сила Стокса), которая по своей природе является силой вязкого трения.

В постановке магнитной гидродинамики двухфазные системы обладают рядом специфических особенностей. Так, в зависимости от свойств несущей фазы можно выделить два класса задач: непроводящая и проводящая несущие фазы. В первом случае, если твердые частицы проводящие имеют дело с ферромагнитной суспензией (ФМС), которые могут быть использованы, например, при конструировании МГД-устройства с рабочим телом в виде газового потока, несущего неоднородную ферромагнитную среду. Другим типом течений с непроводящей несущей фазой являются течения с заряженными и поляризующимися включениями (твердые включения, газовые пузырьки).

Двухфазное течение с проводящей несущей фазой можно также разбить на два класса задач: МГД-течения в случае, когда дисперсные частицы являются проводящими, имеют место в плазменных установках, в которых рабочей средой является плазменная струя, содержащая металлические частицы титана или алюминия. Другой тип течений дисперсная среда непроводящая встречается, например, в устройствах МГД-сепарации примесей в жидком металле.

Работа вышеперечисленных устройств с двухфазной рабочей средой, как правило, протекает при непосредственном воздействии на нее внешних электромагнитных полей. В связи с этим представляется актуальным исследование двухфазных струйных течений при наличии активных воздействий (например, сил электрического и магнитного полей).

Теоретические исследования гидродинамики и теплообмена ламинарных плоских двухфазных МГД-струй с усложненными свойствами в поперечном магнитном поле проведены на кафедре механики КазНУ им аль-Фараби, например, [1, 2, 3, 4] и обобщены в монографии [5].

Результаты исследований способствуют дальнейшему развитию расчетно-теоретических моделей ламинарных двухфазных струйных течений вязкой проводящей (непроводящей) среды, содержащей непроводящие (заряженные) примеси в магнитном (электрическом) поле.

Список литературы

- [1] Avetisyan A., Essawy A.H., Korablin A.Yu., Sheryazdanov G.B. Laminar jet of a viscous incompressible fluid with polarizable disperse phase in a longitudinal electric field // Magnetohydrodynamics. -2001. –Vol. 37. -№4. -P.379-382.
- [2] Baiburina A.S., Sagautdinov Sh. Sh., Sheryazdanov G.B. Laminar two-phase jet with variable conductivity in a transverse magnetic field // Magnetohydrodynamics. – 2001. – Vol. 37. – № 4. –P. 435-436.

- [3] Korablin A.Yu., Sheryazdanov G.B. The laminar of two-phase cocurrents jet with variable electrical conductivity near the wall in a transversal magnetic field // Magnetohydrodynamics. 2002. -Vol.38. -№4. -P.423-426.
- [4] Sheryazdanov G.B. The laminar of two phases jet flows of the conducting and polarization mediums in electromagnetical fields. // Magnetohydrodynamics. 2002. -Vol.38. -№4. -P.427-430.
- [5] Шерьязданов Г.Б. Ламинарные струйные течения проводящих сред в поперечном магнитном поле. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 188 с.

УДК 004.75+528.8

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ РЕГИОНАЛЬНОГО СПУТНИКОВОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ КОРПОРАТИВНОЙ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ СО РАН¹

Ю.И. Шокин

Институт вычислительных технологий СО РАН

Abstract. We present the main components of a regional satellite monitoring system for Siberia and the Far East of Russia being deployed based on the Research and Educational Network of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. From the experience of building and running this system we conclude that it is possible to integrate components administered by different organizations into a distributed monitoring system. Thus achieving a significant economical effect through reducing the need in many satellite receiving stations that functionally duplicate each other in order to provide that data to the users. As a side effect we introduce new functionality and quality.

Keywords: satellite monitoring, research and education networks

Аңдатпа. Баяндамада Ресей ғылым академиясы Сібірлік бөлімшесінің деректерді табыстау желісінің базасында құрылған Ресейдің қиыр шығысы және Сібір территорияларын спутниктік мониторингтау аймақтық жүйесінің негізгі компоненттері қарастырылған. Талқыланатын мониторингтау жүйесінің үлгісі арқылы ДТЖ әр түрлі функционалдық мағынасы бар және ведомстволық кешендерін берілген жүйеге интеграциялау мүмкіндігі көрсетілген. Сол арқылы бірін-бірі қайталайтын қабылданған кешендердің санын қысқарту есебінен маңызды экономикалық эффектке қол жеткізіледі, сонымен қатар жаңа функционалдық мүмкіндіктер пайда болады.

Кілттік сөздер: спутниктік мониторинг, деректерді табыстау желісі

Аннотация. В докладе представлены основные компоненты системы регионального спутникового мониторинга территории Сибири и Дальнего Востока России, построенной на базе сети передачи данных Сибирского отделения РАН (СПД СО РАН). На примере обсуждаемой системы мониторинга продемонстрирована возможность СПД СО РАН интегрировать комплексы различного функционального назначения и ведомственного подчинения в распределенную

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-07-00545), программы Интеграционных фундаментальных исследований СО РАН (проект 131А) и Президентской программы «Ведущие научные школы РФ» (грант № НШ-6293.2012.9).

систему. Тем самым, достигается значительный экономический эффект за счет сокращения числа дублирующих друг друга приемных комплексов, а также появляются новые функциональные возможности.

Ключевые слова: СПД СО РАН, спутниковый мониторинг

Введение

Возможность оперативного получения данных прямой трансляции со спутников при их движении в области видимости приемной станции чрезвычайно важна для решения задач, требующих принятия решений при временных ограничениях, таких как мониторинг быстро протекающих природных явлений, изучение динамики атмосферных процессов, оценка состояния растительности и др. Такой режим работы космических аппаратов (КА) дистанционного зондирования Земли осуществляется с конца 1960-х годов.

Для организации оперативного приема данных необходимо создание приемных комплексов, стоимость которых постоянно снижается, тем не менее, они продолжают относиться к числу дорогостоящих научных приборов. Создание распределенных систем приема, обработки и распространения данных дистанционного зондирования позволяет обеспечить оперативный прием данных на территорию, превосходящую зону покрытия спутников, находящихся в пределах видимости одного приемного комплекса, а также обеспечить распространение данных дистанционного зондирования для широкого круга заинтересованных пользователей.

Система приема и обработки данных состоит из трех основных компонент: приемный комплекс, система хранения данных и вычислительный комплекс для их обработки. При создании распределенной системы, части всех или только некоторых компонент могут быть географически разнесены. Наиболее известным примером современной распределенной системы глобального спутникового мониторинга является Информационная система для наблюдения за состоянием Земли (Earth Observing System Data and Information System, EOSDIS), создаваемая Национальным управлением по воздухоплаванию и исследованию космического пространства США на протяжении последних двадцати лет [2].

Быстро возрастающая емкость каналов связи и рост доступности глобальной коннективности даже в отдаленных районах позволяет обеспечить оперативную доставку данных спутниковой телеметрии без необходимости установки приемного комплекса за счет создания распределенных систем регионального спутникового мониторинга. Тем самым, создаются предпосылки для быстрого развертывания распределенных систем регионального спутникового мониторинга. Одна из таких систем создается начиная с 2008 года Сибирским отделением Российской академии наук (СО РАН) в сотрудничестве с Федеральной службой по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды (Росгидрометом).

В настоящем докладе представлены основные компоненты системы регионального спутникового мониторинга для территории Сибири и Дальнего Востока России, построенной в рамках совместной исследовательской работы, выполняемой усилиями СО РАН и Росгидромета, на основе сети передачи данных СО РАН. За время работы системы создан уникальный архив информационных продуктов, отражающих состояние природной среды региона за последние пять лет. Архив продолжает пополняться.

Краткая характеристика СПД СО РАН

Сеть передачи данных СО РАН — это компьютерная сеть, существующая на протяжении почти двадцати лет при поддержке Сибирского отделения РАН. Узлы сети размещены в городах, где располагаются научные центры и институты Сибирского отделения РАН, это Барнаул, Иркутск, Кемерово, Красноярск, Новосибирск, Омск, Томск, Тюмень, Чита, Улан-Удэ, Якутск [6].

Как научно-образовательная сеть СПД СО РАН решает несколько задач, в том числе:

- обеспечение глобальной коннективности и доступа к службам сети Интернет для сотрудников организаций СО РАН,
- поддержку и развитие средств видеоконференцсвязи,
- обеспечение функционирования региональных распределенных информационно-вычислительных систем и корпоративной облачной инфраструктуры,
- высокоскоростной обмен данными между региональными суперкомпьютерными центрами,
- исследование функционирования крупных компьютерных сетей, отработка перспективных сетевых технологий.

В 2012 году общая пропускная способность внешних каналов СПД СО РАН приблизилась к 1 Гбит/с. Ключевые элементы информационной инфраструктуры в пределах Иркутска, Новосибирска и Томска объединены каналами связи с пропускной способностью 10 Гбит/с.

Топология сети неоднократно менялась в ходе её развития. Так, каналы связи между городами, ранее необходимые для обеспечения глобальной коннективности через центральный узел связи в Новосибирске, по мере развития сетевой инфраструктуры федеральных операторов связи оказались свободны для других приложений. Сейчас эти каналы могут использоваться для построения виртуальных корпоративных сетей, построения систем корпоративной телефонии, а также распределенных систем хранения для больших объемов научных данных.

Распределенная система спутникового мониторинга на основе СПД СО РАН

Ёмкость каналов связи СПД СО РАН позволяет передавать данные, поступающие с комплексов приема спутниковых данных, для их последующей обработки и хранения. Так, в 2006 году была проложена первая линия связи, соединяющая сеть регионального центра приема и обработки данных Росгидромета с сетью Новосибирского научного центра.

Для хранения и обработки поступающей спутниковой телеметрии на базе Института вычислительных технологий СО РАН был создан Центр мониторинга социально-экономических процессов и природной среды СО РАН (Центр мониторинга). Спутниковая телеметрия с приемных комплексов Сибирского и Дальневосточного центров Научно-исследовательского центра (НИЦ) «Планета» Росгидромета поступает в Центр мониторинга с задержкой всего в несколько секунд.

В настоящее время в полностью автоматическом режиме осуществляется сбор данных с приемных комплексов Сибирского центра (СЦ) и Дальневосточного центра (ДВЦ) НИЦ «Планета», расположенных в Новосибирске и Хабаровске соответственно, а также с приемного комплекса Института оптики атмосферы СО РАН (Рис. 1).

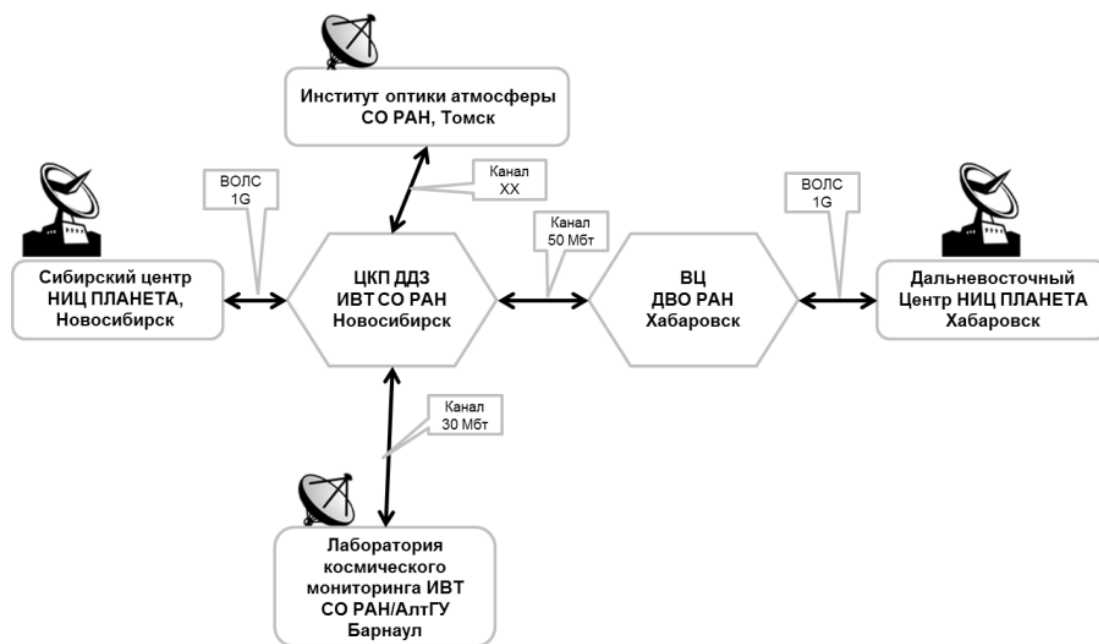


Рисунок 1 Структурная схема сегмента СПД СО РАН, предназначенного для передачи данных дистанционного зондирования

Сотрудничество Сибирского отделения РАН и Росгидромета позволяет оперативно получать данные спутникового мониторинга, передаваемые в режиме прямой трансляции. Для спутников, движущихся по солнечно-синхронным орбитам на высотах от 500 км до 800 км, радиус зоны видимости в режиме прямой трансляции составляет около 40° градусов. Тем самым, станции в Новосибирске и Хабаровске могут охватить практически всю территорию Сибири и Дальнего Востока.

Объем данных, поступающих ежегодно со спутниковых платформ дистанционного зондирования, составляет несколько петабайт и, в соответствии с ближайшими планами космических агентств, должен увеличиться к концу десятилетия до нескольких десятков петабайт. Накопление уникальных данных дистанционного зондирования представляет в первую очередь интерес для исследователей, работающих в области наук о Земле [8].

Архивный подход к хранению данных дистанционного зондирования предполагает создание и поддержку архивов данных на магнитных лентах или оптических дисках. Альтернативой архивного подхода является хранение данных на дисковых массивах. Преимуществом этого подхода является постоянная доступность всего объема хранимых данных. Общая емкость дисковых массивов, установленных в ИВТ СО РАН, превышает 500 Тб. Объем хранимых данных дистанционного зондирования приближается к 200 Тб.

Основы современных технологий дистанционного зондирования Земли заложены в 1970-х годах благодаря появлению цифровых многоспектральных фотометрических сенсоров, устанавливаемых на искусственных спутниках Земли. С их помощью был осуществлен переход от обработки данных дистанционного зондирования как отдельных изображений к их количественному анализу [1]. Последующие этапы развития спутниковых сенсоров позволили перейти от анализа относительных изменений интенсивности излучения, приходящего с поверхности Земли, к восстановлению физических характеристик расположенных на Земле объектов. Возможность калибровки современных сенсоров таковы, что допустимо сопоставление не только измерений в пределах

одной сцены, но и последовательности измерений, выполняемых на протяжении нескольких лет.

Эти изменения были воплощены в программе Landsat и системах сбора метеорологической информации DMSP и TIROS. Инновационным прорывом стал запуск в 1999 г. в рамках программы NASA Earth Observing System (EOS) спутника Terra, оснащенного сенсором MODIS. Отличительной чертой этого сенсора является большее число спектральных каналов, охватывающих спектральный диапазон от 0.4 мкм до 14 мкм. Характеристики орбиты и ширина полосы охвата обеспечивают полное покрытие земной поверхности менее чем за двое суток.

В настоящее время в распределенной системе спутникового мониторинга реализована потоковая схема генерации оперативных информационных продуктов для данных сенсора MODIS, установленного на КА Terra и следующим за ним КА Aqua. Выполнена оптимизация схемы потоковой обработки с учетом характеристик подсистемы ввода-вывода. Создана двухуровневая схема хранения данных, позволяющая преодолеть ограничения производительности централизованной файловой системы при выполнении обработки данных на различных узлах вычислительного кластера за счет использования локальных дисков узла.

Обсуждение

Наиболее известным примером распределенной системы глобального спутникового мониторинга является упомянутая выше EOSDIS.

Аналогичные системы спутникового мониторинга создаются как за рубежом, так и в России. К числу российских систем можно отнести следующие сети:

- сеть приемных комплексов Росгидромета,
- сеть приемных станций Сканэкс,
- сеть центров оперативного мониторинга Земли Роскосмоса,
- сеть центров космических услуг, создаваемая министерством образования и науки РФ,
- сеть центров консорциума УниГЕО.

Как ни парадоксально, но из перечисленных систем, возможность автоматического обмена данными между узлами сети и необходимость поддержки соответствующей сетевой инфраструктуры предусмотрена лишь в проекте Росгидромета [5, 3]. Сетевая инфраструктура Росгидромета дополняет наземные комплексы приема, обработки и распространения данных с отечественных космических аппаратов и предназначена, в первую очередь, для передачи метеорологической информации. Пропускная способность каналов связи между центрами приема данных ограничена 256 кбит/с на направлении Хабаровск-Москва и 128 кбит/с на направлениях Москва-Новосибирск и Новосибирск-Хабаровск [4]. Для оперативного обмена большими объемами данных дистанционного зондирования необходимы каналы значительно большей пропускной способности.

Сеть приемных станций Сканэкс включает станции, расположенные в Иркутске, Магадане, Мегроне и Москве. Станции не связаны выделенными каналами связи, поэтому данные архивируются в точке приема и периодически пересылаются в централизованный архив на жестких дисках [7].

При поддержке Министерства образования и науки РФ в высших учебных заведениях установлено более десятка приемных комплексов. Координация расписаний приема между станциями и возможность создания централизованного или единого распределенного архива данных не предусматриваются.

Зарубежные сети космического мониторинга строятся на основе существующей инфраструктуры научно-образовательных сетей, таких как европейская сеть GEANT и научно-образовательные сети в США.

Опыт создания системы регионального спутникового мониторинга за счет объединения ресурсов существующих приемных комплексов Росгидромета и сети передачи СО РАН показал возможность построения эффективной многофункциональной системы в сравнительно короткий срок.

Заключение

Ключевыми аспектами представленной системы регионального спутникового мониторинга являются её межведомственный характер и ориентированность на использование данных дистанционного зондирования в научных исследованиях.

Благодарности

Автор выражает благодарность коллегам по Центру мониторинга Дмитрию Леонидовичу Чубарову, Леониду Борисовичу Чубарову, Николаю Николаевичу Добрецову и Валентину Валентиновичу Смирнову, проделавшим большую работу по созданию и развитию Центра мониторинга.

Список литературы

- [1] Analysis Technology for Land Remote Sensing. D.A. Landgrebe // Proceedings of the IEEE, Vol. 69, No. 5, pp. 628–642, May 1981.
- [2] Earth Science Satellite Remote Sensing Data from the EOS Data and Information System. Carl A. Reber and H. K. Ramapriyan // Earth Science Satellite Remote Sensing Vol. 2: Data, Computational Processing, and Tools, J.J. Qu, W. Gao, M. Kafatos et al. eds, Springer, 2006.
- [3] Использование спутниковых данных ДЗЗ для решения задач гидрометеорологии и мониторинга окружающей среды. В.В. Асмус, В.А. Кровотынцев, О.Е. Милехин и др. // Вопросы электромеханики, т. 105, С. 6–16, 2008.
- [4] Концепция построения и развертывания интегрированной информационно- телекоммуникационной системы для сбора и обмена геофизической информации, Росгидромет, Москва, 2009.
- [5] Разработка автоматизированного комплекса приёма, обработки и архивации данных геостационарных спутников в НИЦ «Планета». В.В. Асмус, М.А. Бурцев, А.А. Воронин и др.// Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, т. 3, № 1, С. 156–162, 2006
- [6] Сеть передачи данных Сибирского отделения РАН (СПД СО РАН). Препринт. 80 с. Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2005. Электронный ресурс: <http://www.sbras.ru/net/files2/Reports/Telecomupto2005.pdf>.
- [7] Сеть станций Сканэкс, Сканэкс, Москва, 19 с., 2010.

- [8] Современные подходы и технологии организации работы с данными дистанционного зондирования Земли для решения научных задач, Е.А. Лупян, В.П. Саворский, Ю.И. Шокин и др. // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, т. 9, № 5, С. 21–44, 2012.

УДК 681.5.015

СТРУКТУРА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НАПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЛЕДЖАМИ

З.Х. Юлдашев, А.А. Адылов, Х. Холмирзаев

Национальный университет Узбекистана, Гулистанский Государственный университет, Наманганский Государственный университет

Abstract. The work provides the description of structure and functionality of capabilities of the automated control system and control of efficiency of educational and educative processes, both in a specifically chosen college and in all public system of colleges. The system, due to openness of the architecture, can be integrated into another comprehensive in terms of the purposes and objects system at creation of corresponding modules.

Keywords: The automated control systems, event, the concept of electronic education, service of educational process, performance indicators, paperless technology.

Аннотация. В работе даётся описание структуры и функциональных возможностей автоматизированной системы управления и контроля эффективности учебного и воспитательного процесса, как в отдельно взятом колледже, так и во всей республиканской системе колледжей. Система, в силу открытости архитектуры, может быть интегрирована в другую объемлющую по целям и объектам систему при создании соответствующих модулей.

Keywords: автоматизированные системы управления, событие, концепция электронного обучения, обслуживание учебного процесса, оценочные показатели, безбумажная технология.

Структура автоматизированной системы управления колледжами

В работе [1] сообщалось о варианте автоматизированной системы управления академическими лицеями. Ниже предлагается вариант интегрированной системы управления колледжами, поскольку в системе образования Республики Узбекистан они администрируются и функционируют в рамках одного министерства, но имеет ряд специфических особенностей по целям обучения и администрирования.

Как упоминалось выше, в соответствии с Законом об образовании в нашей Республике созданы две подсистемы системы образования: 1) система академических лицеев и 2) система колледжей. Если целью создания академических лицеев является подготовка выпускников, которые в дальнейшем будут способны углубить свои знания в высших учебных заведениях, и смогут стать высококвалифицированными специалистами в выбранных отраслях, то создание система колледжей, явилось как результат реформации учебных заведений по подготовке специалистов

со средним специальным образованием. Для управления академическими лицеями и колледжами при Министерстве высшего и среднего специального образования создан специальный центр, который наряду с вопросами контроля и управления занимается также и проблемами мониторинга.

Ниже даётся описание структуры и функциональных возможностей автоматизированной системы управления и контроля эффективности учебного и воспитательного процесса как в отдельно взятом колледже, так и во всей республиканской колледжей. В полном объёме в рамках отдельно взятого колледжа система способна решать задачи автоматизации управления учебным процессом, задачи администрирования учебного заведения, материально-технического снабжения, и т.д. путём создания соответствующей глобальной базы данных и использования автоматизированных рабочих мест специалистов.

Известно, что применение компьютерных технологий в учебно-административной деятельности учебных заведений позволяет принципиально изменить методологию процесса. В частности в специализированных по контингенту и под направлениях подготовки специалистов среднего звена, например колледжах позволит:

- внедрять новые методики и формы обучения с применением компьютеров;
- внедрять автоматизированные формы администрирования;
- проводить эффективный информационно-поисковый процесс требуемой информации;
- осуществлять оперативный контроль исполнения приказов, как вышестоящих инстанций, так и по колледжу;
- повысить исполнительскую ответственность сотрудников;
- осуществить внедрение безбумажной технологии в справочно-отчетный документооборот между подразделениями колледжа.

На сегодняшний день в ряде ученых заведений – школ, лицеев, колледжей и вузов эксплуатируются программы или даже комплексы программ нацеленных на решение специфичных задач отрасли на базе использования компьютерной техники. Однако уровень эффективности использования вычислительной техники и информационных технологий в целом не отвечает современным требованиям, особенно с позиций единого охвата, происходящих **событий**. Под *событием* в данном случае понимается весь спектр изменений состояния и характеристик субъектов и объектов учебного заведения, любое действие субъектов учебного процесса, связанное с исполнением служебных обязанностей или достижения поставленных целей.

Следует также отметить, что осуществлявшиеся в ряде учебных заведений среднего попытки автоматизировать определённые процессы, имели фрагментарный характер, программы не разрабатывались с общих позиций и не базировались на единой платформе, - концепции охвата в единую информационную систему всех учебных заведений и академических лицеев+колледжей в частности. В свою очередь, предлагаемые некоторыми учреждениями варианты автоматизированных систем управления либо оказывались незавершёнными, либо не удовлетворяют современным требованиям, но главное, они изначально не разрабатывались с учётом концепции развития системы образования Республики в целом, и подсистемы академических лицеев и колледжей в частности.

В основе описываемого проекта, опытный вариант которого завершён, лежит **концепция электронного обучения** [2-5]. Данная концепция предполагает, что информационные технологии будут как изучаться, так и активно применяться во всех сферах деятельности колледжа,

и, прежде всего в процессе обучения. В этой связи проводится пересмотр укоренившихся методов преподавания, контроля качества преподавания и определения эффективности учебного процесса. Априори полагается, что стратегической линией деятельности колледжа является организация учебного процесса на базе внедрения новых педагогических технологий, обеспечение эффективного применения информационных технологий, как в реальный учебный процесс, так и в процессы проведения научных исследований по педагогике, создания методических разработок и воспитания гармоничной личности. Эта линия определяет ряд актуальных задач и целей. Среди множества целей следует выделить следующие, связанные с проектом **комплексной автоматизированной системы контроля и управления колледжей (КАСКУ 'КОЛЛЕДЖ')**:

- Все студенты, преподаватели и сотрудники будут иметь доступ к информационным технологиям соответственно в аудиториях, учебных лабораториях и общежитиях, на кафедрах и рабочих местах;
- Все преподаватели будут эффективно применять информационные технологии, чтобы помочь студентам достичь высшего уровня образовательных стандартов;
- Все студенты будут обладать достаточным для обучения специальности уровнем знаний и навыков в области информационных технологий;
- Уровень знаний ведущих педагогов позволит систематически пополнять базу знаний системы, расширять набор её программных продуктов, в том числе виртуальных курсов и курсов дистанционного обучения, на базе инструментария самой системы и применения следующих поколений информационных технологий;
- Электронная информация и сетевые приложения будут постоянным позитивом, трансформирующим процессы преподавания и обучения.

В качестве выбранной интегрированной, можно указать следующую **ЦЕЛЬ**: Создать, внедрить и поддерживать в рабочем состоянии единую систему управления и контроля эффективности учебного и воспитательного процесса как в отдельно взятом колледже, так и во всей соответствующей системе по Республике.

Для достижения указанной цели разработчики выбрали следующий **СТРАТЕГИЧЕСКИЙ ПОДХОД**: провести автоматизацию в двух(трёх) наиболее подготовленных учебных заведениях, апробировать эффективность и выявить круг реальных проблем и задач для внедрения всей системы в масштабах Республики.

Общая структура системы КАСКУ 'КОЛЛЕДЖ' изображена на **СХЕМЕ 1**, где приведены реальные и гипотетические пользователи, их предварительный статус и возможные варианты общения пользователей с системой.

Система КАСКУ 'КОЛЛЕДЖ' создана на базе технологии "Клиент-Сервер". Она объединяет ряд стандартных подсистем. При внедрении в конкретном лицее с учётом структурных особенностей, технической базы и пожеланий администрации колледжа, возникающих из структурных особенностей учебного заведения могут быть произведены изменения, как в сторону расширения, так и в сторону сужения. Кроме того, в силу открытости системы могут быть разработаны подсистемы, отражающие собственные подходы администрации колледжа в руководстве учебным процессом и особенности его регионального статуса.

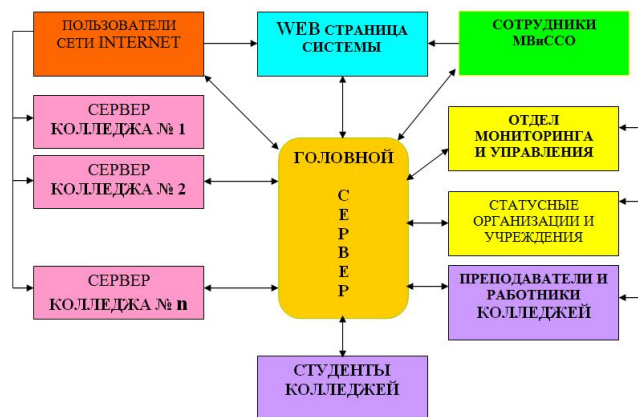


Схема 1

На СХЕМЕ 2 даётся структура локальной части системы КАСКУ 'КОЛЛЕДЖ'. Она условно состоит из автоматизированных рабочих мест и подсистем.

О функциональном наполнении системы КАСКУ 'КОЛЛЕДЖ'

Относительно СХЕМЫ 2 следует отметить, что она не является абсолютной. Например, в конкретном колледже может не быть должности заместителя директора по производственному обучению, а некоторых колледжах обязанности заместителя директора по производственному обучению может совмещать заместитель директора по учебной работе. Однако, это не снимает с повестки дня создание соответствующего модуля по автоматизации деятельности по данному направлению.

Специфика деятельности учебного заведения заключается в том, что целый спектр оценочных показателей эффективности подразделений и учебного заведения в целом являются недетерминированными, т. е. не имеют конкретных числовых значений, позволяющих выносить однозначные заключения. Хотя в международной практике и выработаны критерии, которым определяется рейтинг того или иного университета, отечественный опыт подобными прецедентами не располагает. Тем не менее, однозначно можно утверждать, что критериями оценки достижения описанных целей следует считать:

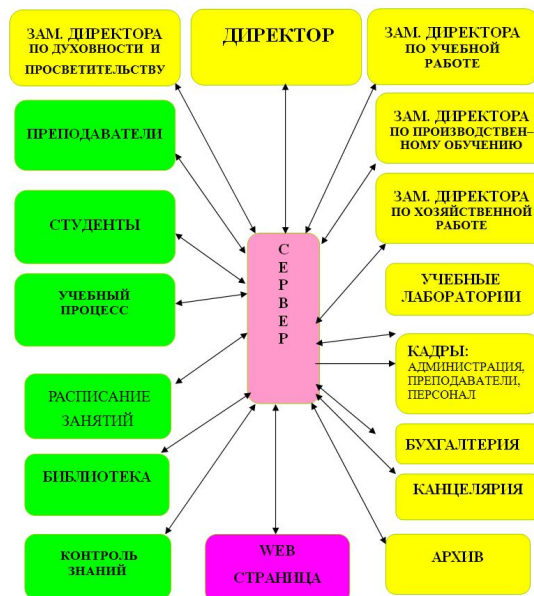


Схема 2

- удобство в эксплуатации, выражающееся в наличии современного и адекватного интерфейса;
- безотказность системы в процессе эксплуатации;
- удовлетворение заложенным в данном документе техническим показателям;
- обеспечение заложенных требований по функциональным наполнениям, как подсистем, так самой системы в целом.

На наш взгляд при наличии материально-технической базы и соответствующих условий, в том числе и условий предъявляемых к объектам, где эксплуатируются автоматизированные системы управления на базе технологии клиент-сервер, в учебных структурах, в которых будет внедрена эта система, реальными становятся следующие возможности:

- высокоэффективное обслуживание учебного процесса, выраженное в обеспечении автоматизации исполнения функций всех его субъектов;
- повышение качества подготовки будущих студентов вузов, путём представления оперативного доступа к:
 - учебной литературе,
 - нормативным документам,
 - результатам участия в учебном процессе,
 - информации об инновациях в учебном процессе,
 - информации по отраслям наук, в том числе и по выбранной специальности;
- повышение уровня профессиональной подготовленности преподавательского состава путём автоматизации их рабочего места;
- обеспечение безбумажной технологии при управлении всеми процессами внутри учебного заведения;
- обеспечение электронного документооборота;
- обеспечение доступа к базам данных прямо на рабочих местах и компьютерных классах, в соответствии со статусом пользователей;
- обеспечение высокой технологичности при формировании баз данных;
- обеспечение принципа достаточности по базам, т. е. базы должны исчерпывающим образом и оперативно описывать состояние субъектов и объектов учебного заведения;
- обеспечение надёжной защищённости хранимой информации от несанкционированного доступа;
- обеспечение ответственности за качество и достоверность вводимой информации.

Список литературы

- [1] О структуре и функциональных возможностях автоматизированной системы управления академическими лицами. Ли К.В., Юнусов А.Х., Юлдашев З.Х. // Изд-во СО РАН, Вычислительные технологии., Новосибирск, том 9, часть 3, 2004. стр. 116–121.
- [2] Слагаемые педагогической технологии. Беспалько В.П. //–. М.: П-ка, 1989.-192с.
- [3] Базы знаний интеллектуальных систем. Гаврилова Т.А., Хорошевский В. Ф.//– СПб.: Питер,2000.-384с.
- [4] Разработка компьютерных учебников и обучающих систем. Башмаков А.И., Башмаков И.А.//Изд-во ФИЛИНЪ, М: 2003., 614с.
- [5] Компьютерные и мультимедийные технологии в естественнонаучном образовании. Стародубцев В.А. // Изд-во ДЕЛЬТАПЛАН, Томск: 2002., 223с.