НАО «Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева»

Дисциплина «Методы оптимизации»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

Классические методы поиска экстремума

Лабораторная работа 5. Безусловный и условный экстремум функции многих переменных. Образовательная программа 6B06103 «Математическое и компьютерное моделирование». Объём — 5 академических часов.

1 Цель и порядок выполнения

Цель работы — освоить аналитическое исследование экстремума с помощью градиента, матрицы Гессе и множителей Лагранжа. В предыдущей работе рассматривалась геометрия целевой функции и отдельный шаг по направлению. Теперь требуется найти все стационарные точки учебной задачи, определить их тип и обосновать, является ли найденный экстремум локальным или глобальным.

Работа включает безусловную оптимизацию на плоскости и условную оптимизацию при равенстве. Сначала студент выполняет ручные вычисления по разобранным примерам, затем проверяет их средствами символьной математики и решает индивидуальный вариант. Для ограничений отдельно проверяются допустимость точки, регулярность ограничения и знак второй производной вдоль допустимых направлений.

Необходимы частные производные, определители второго порядка, системы уравнений и базовые навыки Python. Для программной части используются SymPy, NumPy и Matplotlib. Индивидуальная работа состоит из двух связанных задач: исследования полинома с несколькими стационарными точками и минимизации квадратичной функции на прямой.

Этап	Содержание	Время, мин
Подготовка	Повторить необходимые и достаточные условия экстремума	35
Ручной расчёт	Разобрать безусловный пример и метод Лагранжа	50
Программная проверка	Вычислить производные, решить системы, построить графики	55
Индивидуальная работа	Исследовать две задачи своего варианта	55
Отчёт и защита	Сопоставить проверки, сформулировать выводы	30

Итого — 225 минут, или 5 академических часов. Порядок действий в отчёте должен отражать математическое исследование; программный результат используется как проверка и средство визуализации.

2 Методические сведения о безусловном экстремуме

2.1 Стационарность и область применения условия

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в открытой области. Если внутренняя точка x^* является локальным минимумом или максимумом, то

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Это необходимое условие первого порядка. Оно следует из того, что при фиксировании всех переменных, кроме одной, получаются одномерные функции с внутренним экстремумом. Следовательно, каждая частная производная равна нулю. Решения системы $\nabla f = 0$ называются стационарными точками [1, § 2].

Условие относится к внутренним точкам и дифференцируемым функциям. Если задача содержит границу допустимого множества либо функция недифференцируема, соответствующие точки необходимо исследовать отдельно. При условном экстремуме градиент самой целевой функции обычно не равен нулю.

Стационарность ещё не означает экстремум. Например, функция $x_1^2 - x_2^2$ имеет нулевой градиент в начале координат, но возрастает по одному направлению и убывает по другому. Такая точка является седловой.

2.2 Матрица Гессе и разложение Тейлора

Для дважды непрерывно дифференцируемой функции матрица Гессе состоит из вторых частных производных:

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

При указанных условиях смешанные производные совпадают, и матрица симметрична. В окрестности стационарной точки разложение Тейлора имеет вид

$$f(x^* + d) - f(x^*) = \frac{1}{2} d^T H(x^*) d + o(\| d \|^2).$$

Линейное слагаемое отсутствует из-за стационарности. Поэтому знак квадратичной формы во втором слагаемом позволяет получить достаточные условия. Если $H(x^*)$ положительно определена, то точка является строгим локальным минимумом. Если отрицательно определена — строгим локальным максимумом. Если квадратичная форма принимает значения обоих знаков, точка седловая.

Положительная полуопределённость Гессиана является необходимым условием локального минимума, но в общем случае недостаточна. Аналогичное утверждение с противоположным знаком справедливо для максимума. Когда квадратичный член обращается в нуль по некоторым направлениям, существенными могут оказаться члены более высокого порядка.

2.3 Критерий для двух переменных

В стационарной точке обозначим

$$A = f_{xx}, \qquad B = f_{xy}, \qquad C = f_{yy}, \qquad D = AC - B^2.$$

Тогда используется следующая схема.

Условия в стационарной точке	Заключение
$D > 0, A > 0$	Строгий локальный минимум
$D > 0, A < 0$	Строгий локальный максимум
$D < 0$	Седловая точка
$D = 0$	Данный критерий не решает вопрос; нужно дополнительное исследование

Проверяются именно значения производных в каждой найденной точке. Если функция не квадратичная, матрица Гессе обычно меняется от точки к точке. Для $n > 2$ можно использовать собственные значения симметричной матрицы или критерий Сильвестра: для положительной определённости все угловые миноры должны быть строго положительными. Проверка только определителя всей матрицы при $n > 2$ недостаточна.

2.4 Локальный и глобальный результат

Достаточные условия по Гессиану дают локальный вывод. Чтобы доказать глобальный минимум, нужны дополнительные свойства функции или допустимого множества. Например, представление $f(x) = c + q_1(x)^2 + q_2(x)^2$ сразу даёт нижнюю оценку $f \geq c$. Если найдена точка, где оба квадрата равны нулю, эта оценка достигается.

Другой путь — установить выпуклость функции на всём выпуклом допустимом множестве. Для дважды непрерывно дифференцируемой функции положительная полуопределённость Гессиана во всей выпуклой области обеспечивает выпуклость. Стационарная точка такой функции является глобальным минимумом. Положительная определённость только в одной точке не позволяет заменить локальный вывод глобальным.

Для непрерывной функции на непустом компактном множестве глобальные минимум и максимум существуют. При их поиске нужно учесть все допустимые кандидаты, в том числе граничные. На неограниченном или незамкнутом множестве существование экстремума требует отдельного обоснования.

3 Разобранный пример безусловного экстремума

3.1 Решение системы стационарности

Исследуем функцию

$$f(x, y) = x^3 - 3x + y^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вычислим первые производные:

$$f_x = 3x^2 - 3, \qquad f_y = 2y.$$

Условия $3x^2 - 3 = 0$, $2y = 0$ дают ровно две стационарные точки: $P_1 = (-1,0)$ и $P_2 = (1,0)$. Значения функции равны $f(P_1) = 2, f(P_2) = -2$.

Матрица Гессе и её определитель:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D(x, y) = 12x.$$

В точке P_1 имеем $D = -12 < 0$, поэтому это седловая точка. В точке P_2 имеем $D = 12 > 0$ и $A = 6 > 0$, поэтому это строгий локальный минимум.

Точка	Значение функции	A	D	Тип
$(-1,0)$	2	-6	-12	Седловая точка
$(1,0)$	-2	6	12	Строгий локальный минимум

3.2 Проверка смысла полученного результата

Найденный локальный минимум не является глобальным. Если взять $y = 0$ и устремить x к $-\infty$, функция $x^3 - 3x$ стремится к $-\infty$. Следовательно, глобального минимума на плоскости нет. При $x \to +\infty$, $y = 0$ функция неограниченно возрастает, поэтому глобального максимума также нет.

Седловой характер P_1 можно проверить без определителя. При перемещении только по y значение увеличивается на y^2. При замене $x = -1 + u$, $y = 0$ приращение равно $-3u^2 + u^3$, которое отрицательно для достаточно малого ненулевого u. В любой окрестности точки есть и большие, и меньшие значения функции.

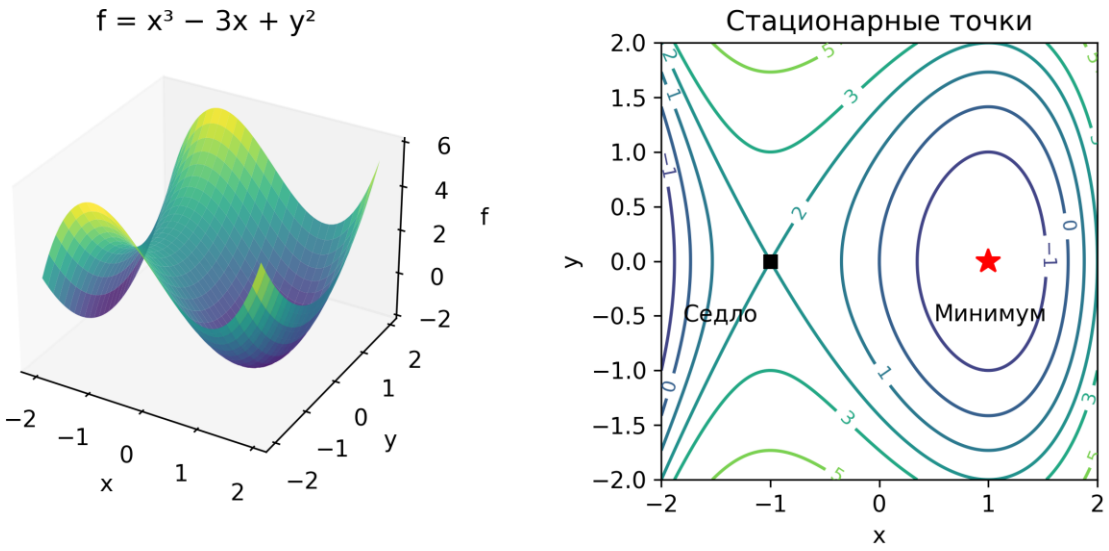


Рисунок 1 — Локальный минимум и седловая точка функции $x^3 - 3x + y^2$. Видимый участок поверхности не определяет поведение функции на всей плоскости.

3.3 Когда определитель равен нулю

Сравним функции $f_1 = x^4 + y^4$ и $f_2 = x^4 - y^4$. В начале координат у обеих функций нулевой градиент и нулевая матрица Гессе. Значит, критерий второго порядка не различает эти случаи.

Однако $f_1 \geq 0$, причём равенство достигается только в начале координат. Это строгий глобальный минимум. Для f_2 вдоль оси x значения положительны, а вдоль оси y отрицательны. Поэтому начало координат является седловой точкой. Вывод «при $D = 0$ экстремума нет» неверен.

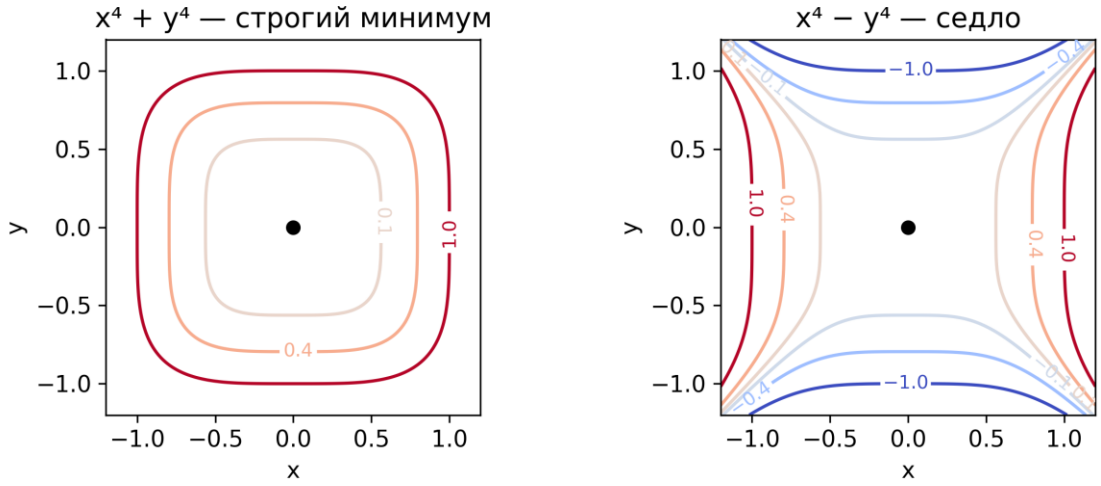


Рисунок 2 — Одинаковый нулевой Гессиан в начале координат сочетается с разным поведением функций.

4 Методические сведения об условном экстремуме

4.1 Исключение переменной

Пусть задача содержит равенство $g(x, y) = 0$. Если его можно явно разрешить, например $y = \psi(x)$, ограничение подставляют в цель и исследуют функцию $\varphi(x) = f(x, \psi(x))$. При этом обязательно учитывают область допустимых значений параметра.

Метод удобен для простых прямых и кривых. Он также даёт независимую проверку метода Лагранжа. Но одна параметризация может не описывать все ветви допустимого множества. Например, запись $y = \sqrt{1 - x^2}$ описывает только верхнюю полуокружность, а не всю окружность.

4.2 Функция Лагранжа и регулярность

Для одного равенства введём

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Если f и g гладкие и в точке условного экстремума $\nabla g \neq 0$, существует множитель λ, для которого выполняется система

$$L_x = 0, \qquad L_y = 0, \qquad g(x, y) = 0.$$

Условие $\nabla g \neq 0$ называется регулярностью одного ограничения. Оно гарантирует, что локально допустимое множество является гладкой кривой. Для нескольких равенств соответствующим условием служит линейная независимость их градиентов [1, § 3.2].

Множитель Лагранжа — дополнительная неизвестная, а не новое ограничение исходной задачи. При равенствах его знак не ограничен. Используется соглашение $L = f + \lambda g$; при выборе противоположного знака значение множителя изменится, но координаты точки экстремума останутся прежними.

Геометрически условие $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ означает коллинеарность нормалей к линии уровня и ограничению. В регулярной точке касательная к допустимой кривой перпендикулярна обоим градиентам. Поэтому первая производная цели вдоль этой касательной равна нулю.

4.3 Классификация условно стационарной точки

Решение системы Лагранжа даёт кандидата, который нужно классифицировать. Рассматривается матрица вторых производных по исходным переменным

$$H_L = \nabla^2_{x,y} L = \nabla^2 f + \lambda \nabla^2 g.$$

Производные по λ в эту матрицу не включаются. Для касательного направления d должно выполняться $\nabla g(x^*)^T d = 0$. Для одного регулярного ограничения на плоскости можно взять ненулевой вектор $d = (g_y, -g_x)^T$.

Если в регулярном решении системы Лагранжа $d^T H_L d > 0$ для всех ненулевых касательных направлений, получаем строгий локальный условный минимум. При отрицательном знаке — строгий локальный условный максимум. Нулевое значение требует дополнительного исследования. На плоскости касательное пространство одномерно, поэтому достаточно проверить один ненулевой касательный вектор: остальные отличаются множителем, который входит в квадрате.

Для линейного ограничения $\nabla^2 g = 0$, поэтому $H_L = H_f$. Для нелинейного ограничения это равенство в общем случае неверно. Проверять Гессиан функции Лагранжа на всей плоскости тоже не требуется: важны только направления, разрешённые линеаризованным ограничением.

4.4 Нерегулярные точки и границы

Если $\nabla g = 0$, обычная система Лагранжа может пропустить экстремум. Например, ограничение $x^2 + y^2 = 0$ задаёт единственную допустимую точку $(0,0)$. Для цели $f = x$ она одновременно является глобальным минимумом и максимумом на этом множестве. Однако уравнение $1 + 2\lambda x = 0$ в начале координат не выполняется ни при каком λ.

Поэтому отдельно решают систему $g = 0$, $g_x = 0$, $g_y = 0$ и исследуют найденные нерегулярные допустимые точки. Пустой список решений обычной системы Лагранжа не доказывает отсутствия условного экстремума.

Если задача содержит неравенства, необходимо исследовать внутренние точки, активные границы и их пересечения. Например, для $f = x^2 + y^2$ в треугольнике $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$ минимум равен нулю в начале координат, а максимум равен 9 в вершинах $(3,0)$ и $(0,3)$. Внутренняя система $\nabla f = 0$ сама по себе не найдёт граничные максимумы. В обязательных индивидуальных вариантах данной работы используется одно равенство без дополнительных неравенств.

5 Подробный пример минимума на прямой

5.1 Решение методом Лагранжа

Найдём экстремум

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2, \qquad x + y = 3.$$

Запишем $g = x + y - 3$ и функцию Лагранжа:

$$L = x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 3).$$

Условия стационарности и допустимости:

$$2x + \lambda = 0, \qquad 4y + \lambda = 0, \qquad x + y = 3.$$

Из первых двух уравнений следует $2x = 4y$, то есть $x = 2y$. Подстановка в ограничение даёт $y = 1, x = 2, \lambda = -4$. Значение целевой функции равно $f(2,1) = 6$.

Проверим регулярность: $\nabla g = (1,1)^T \neq 0$. Касательный вектор можно выбрать как $d = (1,-1)^T$. Матрица $H_L = \mathrm{diag}(2,4)$, следовательно,

$$d^T H_L d = 2 + 4 = 6 > 0.$$

Найден строгий локальный условный минимум. Для установления глобального характера выполним независимое исключение переменной.

5.2 Проверка подстановкой ограничения

Из $y = 3 - x$ получаем

$$\varphi(x) = x^2 + 2(3-x)^2 = 3x^2 - 12x + 18 = 3(x-2)^2 + 6.$$

Для любого вещественного x выполнено $\varphi(x) \geq 6$, причём равенство достигается только при $x = 2$. Поэтому $(2,1)$ — единственный глобальный минимум на прямой. Глобального максимума нет, поскольку $\varphi(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$.

Без ограничения функция минимальна в $(0,0)$ и имеет значение нуль. Эта точка не лежит на прямой $x + y = 3$, поэтому не решает условную задачу. В условном минимуме градиент цели равен $(4,4)^T$, а не нулю, но его скалярное произведение с касательным направлением $(1,-1)^T$ равно нулю.

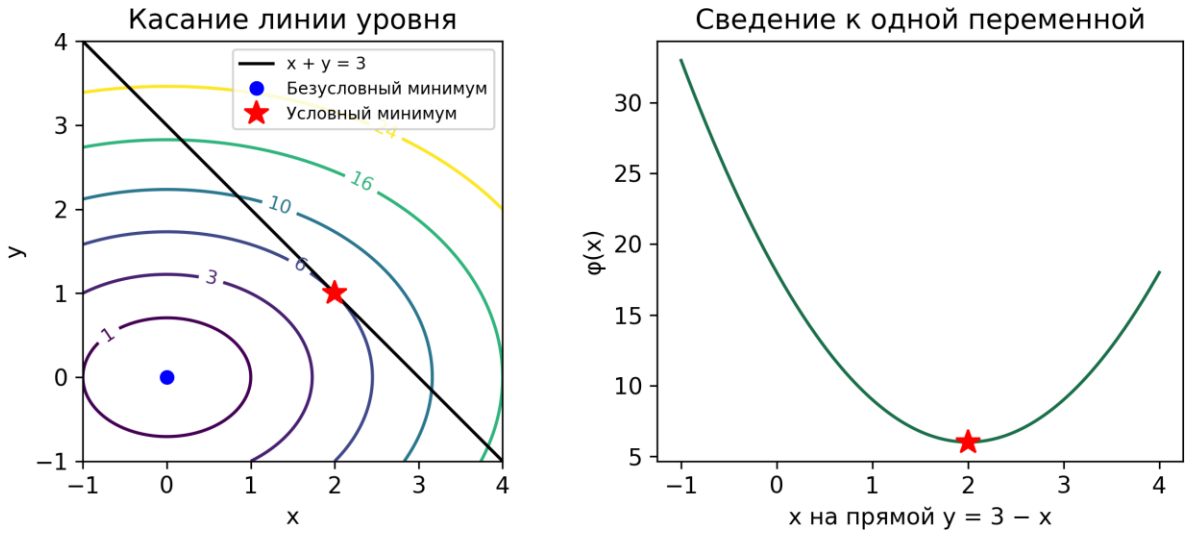


Рисунок 3 — Условный минимум как касание линии уровня и как минимум функции после исключения переменной.

6 Пример с нелинейным ограничением

Исследуем функцию $f(x,y) = x$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Здесь

$$L = x + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

$$1 + 2\lambda x = 0, \qquad 2\lambda y = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Из первого уравнения следует $\lambda \neq 0$, значит, второе даёт $y = 0$. Тогда $x = \pm 1$. В точке $(-1,0)$ множитель $\lambda = 1/2$, а в точке $(1,0)$ — $\lambda = -1/2$.

Ограничение регулярно на всей окружности. В обеих рассматриваемых точках касательное направление вертикально; можно взять $d = (0,1)^T$. Гессиан цели нулевой, но

$$H_L = 2\lambda I.$$

Поэтому в $(-1,0)$ имеем $d^T H_L d = 1 > 0$, а в $(1,0)$ — $-1 < 0$. Первая точка — строгий условный минимум, вторая — строгий условный максимум. Из $-1 \le x \le 1$ на окружности следует, что оба экстремума являются глобальными. Значения равны -1 и 1 соответственно.

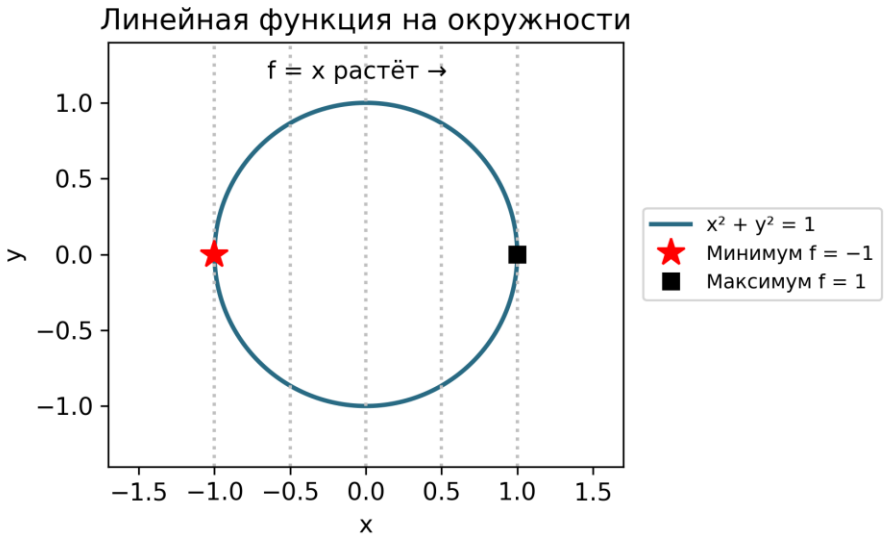


Рисунок 4 — У линейной функции существуют минимум и максимум на окружности, хотя её собственный Гессиан всюду нулевой.

Этот пример показывает роль кривизны ограничения. Если использовать только H_f, оба кандидата будут ошибочно оставлены без классификации. Член λH_g учитывает изменение допустимой кривой и позволяет установить правильный тип точки.

7 Программная методика

7.1 Подготовка и запуск

Распакуйте архив и откройте терминал в папке с файлами. При необходимости установите библиотеки:

```
python -m pip install -r requirements.txt
python classical_extrema.py
python run_variant.py 1
```

Первый программный запуск проверяет общие примеры: кубическую функцию, два случая нулевого Гессиана, минимум на прямой, экстремумы на окружности и нерегулярное ограничение. Во второй команде запуска замените 1 номером своего варианта от 1 до 18.

В папке classical_variant_01 будут созданы results.txt, points.csv, free_extrema.png и constrained_extremum.png. Повторный запуск обновляет файлы этого варианта. В текстовом файле приведены исходные выражения, производные, матрицы, точки и результаты классификации. Рисунки служат наглядной проверкой аналитических выводов.

7.2 Символьные производные и стационарные точки

В SymPy переменные объявляются вещественными, а производные вычисляются по исходному выражению. Следующий фрагмент можно выполнить отдельно для общего безусловного примера.

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y', real=True)
f = x**3 - 3*x + y**2
grad = sp.Matrix([sp.diff(f, x), sp.diff(f, y)])
H = sp.hessian(f, (x, y))
points = sp.solve(list(grad), (x, y), dict=True)
for p in points:
    Hp = H.subs(p)
    A = Hp[0, 0]
    D = sp.factor(Hp.det())
    print(p, 'f =', f.subs(p))
    print('H =', Hp, 'A =', A, 'D =', D)
```

Команда solve возвращает найденные решения системы, а не готовое доказательство глобального экстремума. Для рассматриваемого полинома система решается полностью: $x^2 = 1$, $y = 0$. При более сложных выражениях нужно отдельно проверять полноту решений, вещественность и область определения.

В файле classical_extrema.py функция stationary_points применяет критерий из раздела 2.3. При нулевом определителе она выдаёт сообщение о необходимости дополнительного исследования. Если решения содержат свободные параметры, требуется анализ множества стационарных точек, а не классификация конечного списка.

7.3 Система Лагранжа и проверка касательного направления

```
import sympy as sp
x, y, lam = sp.symbols('x y lam', real=True)
f = x**2 + 2*y**2
g = x + y - 3
L = f + lam*g
equations = [sp.diff(L, x), sp.diff(L, y), g]
points = sp.solve(equations, (x, y, lam), dict=True)
for p in points:
    normal = sp.Matrix([sp.diff(g, x), sp.diff(g, y)]).subs(p)
    d = sp.Matrix([normal[1], -normal[0]])
    HL = sp.hessian(L, (x, y)).subs(p)
    reduced = sp.simplify((d.T * HL * d)[0])
    print(p, 'f =', f.subs(p), 'g =', g.subs(p))
    print('Касательная кривизна =', reduced)
```

Фрагмент относится к регулярному линейному ограничению данного примера. В полной функции equality_candidates дополнительно проверяется регулярность найденных точек и отдельно ищутся решения $g = g_x = g_y = 0$. Возвращаемый список нерегулярных точек необходимо изучить вручную. Для цели $f = x$ и ограничения $x^2 + y^2 = 0$ обычный список кандидатов пуст, но отдельный список содержит $(0,0)$.

При использовании точных целых и рациональных коэффициентов SymPy сохраняет точные дроби. Например, sp.Rational(1, 3) задаёт $1/3$, тогда как обычное выражение Python $1/3$ сначала вычисляется как число с плавающей точкой. Округление применяйте только при подготовке таблиц и рисунков.

7.4 Независимые проверки

Для безусловной задачи подставьте каждую точку в обе первые производные и проверьте нулевой результат. Сравните тип точки, определённый по A, D, с приращениями функции по двум подходящим направлениям. Не используйте отдельные числовые пробы как замену доказательству, особенно при $D = 0$.

Для условной задачи проверьте три группы равенств: $g(x^*) = 0$, $\nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla g(x^*) = 0$, $\nabla g(x^*)^T d = 0$. Затем вычислите $d^T H_L d$. При возможности исключите переменную и сравните результат с одномерным исследованием. Проверка второй производной после подстановки ограничения независима от сборки матрицы Лагранжа.

8 Индивидуальные варианты

8.1 Общая форма двух задач

В каждом варианте положите $u = x - h, v = y - t$. Первая задача — исследовать безусловный экстремум функции

$$F(x, y) = (u^2 - a^2)^2 + b(v - ku)^2 + c, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вторая задача — найти условный экстремум функции

$$Q(x, y) = u^2 + b(v - ku)^2 + c \quad \text{при} \quad x + y = s.$$

Параметры a, b положительны. Неотрицательность координат не предполагается: x, y могут принимать любые вещественные значения, удовлетворяющие указанному равенству во второй задаче. Сдвиги h, t определяют положение исследуемой конфигурации на плоскости.

Вариант	a	b	k	h	t	s	c
1	1	1	-1	-2	-1	-2	0
2	2	2	-1	-2	0	-4	1
3	1	3	0	-2	1	2	0
4	2	1	0	-1	-1	-3	1
5	1	2	1	-1	0	1	0
6	2	3	1	-1	1	-3	1
7	1	1	-1	0	-1	0	0
8	2	2	-1	0	0	-2	1
9	1	3	0	0	1	4	0
10	2	1	0	1	-1	-1	1
11	1	2	1	1	0	3	0
12	2	3	1	1	1	-1	1
13	1	1	-1	2	-1	2	0
14	2	2	-1	2	0	0	1
15	1	3	0	2	1	6	0
16	2	1	0	3	-1	1	1
17	1	2	1	3	0	5	0
18	2	3	1	3	1	1	1

8.2 Обязательные задания для первой функции

1. Выпишите параметры своего варианта. Запишите F через исходные переменные x, y и отдельно через сдвинутые переменные u, v. Покажите, почему дифференцирование по x, y совпадает с дифференцированием по соответствующим сдвинутым координатам.
2. Выведите обе первые производные. Решите систему стационарности вручную и докажите, что найдены все её вещественные решения.
3. Вычислите матрицу Гессе в общем виде. Для каждой стационарной точки найдите A, D и значение функции. Составьте таблицу классификации.
4. Для точек минимума установите, являются ли они глобальными и единственен ли глобальный минимум. Используйте представление функции в виде суммы неотрицательных слагаемых.
5. Объясните седловой характер оставшейся точки через два направления изменения функции. Направления могут быть наклонены к координатным осям.

6. Постройте линии уровня, отметьте все стационарные точки и подпишите их координаты. Сопоставьте рисунок с аналитической классификацией. Окно построения не считайте ограничением задачи.

8.3 Обязательные задания для второй функции

1. Составьте функцию Лагранжа для Q и ограничения $g = x + y - s = 0$. Выпишите систему из трёх уравнений и решите её относительно x, y, λ.
2. Проверьте регулярность ограничения. Вычислите H_L по переменным x, y, выберите касательный вектор $d = (1, -1)^T$ и найдите $d^T H_L d$.
3. Исключите переменную $y = s - x$. Приведите полученную квадратичную функцию к виду $\alpha(x - x^*)^2 + Q^*$ с $\alpha > 0$. Сопоставьте координаты, значение функции и тип экстремума с методом Лагранжа.
4. Обоснуйте глобальность и единственность условного минимума. Установите, существует ли условный максимум на всей прямой.
5. Найдите безусловный минимум Q и сравните его с условным. Укажите, выполняется ли ограничение в безусловном минимуме и насколько увеличивается минимальное значение при введении равенства.
6. Постройте линии уровня Q, прямую ограничения, безусловный и условный минимумы. Подпишите точки; используйте одинаковый масштаб координатных осей.

8.4 Формулы для самопроверки

Проведите самостоятельный вывод до использования следующих ориентиров. Из $F_v = 2b(v - ku) = 0$ следует $v = ku$. Подстановка в $F_u = 0$ даёт $4u(u^2 - a^2) = 0$. Поэтому в сдвинутых координатах стационарные точки равны

$$(-a, -ka), \qquad (0,0), \qquad (a, ka).$$

В первых и третьих точках достигается значение c; в средней — $a^4 + c$. Для проверки классификации удобно использовать

$$H_F = \begin{pmatrix} 12u^2 - 4a^2 + 2bk^2 & -2bk \\ -2bk & 2b \end{pmatrix},$$

$$\det H_F = 8b(3u^2 - a^2).$$

При $u = \pm a$ определитель равен $16ba^2 > 0$, а первый диагональный элемент положителен. При $u = 0$ определитель отрицателен. Не забудьте вернуться к исходным координатам: $x = u + h$, $y = v + t$.

Для условной задачи обозначьте $\delta = s - h - t$ и $D_0 = 1 + b(k+1)^2$. На прямой $v = \delta - u$ функция принимает вид

$$Q = u^2 + b[\delta - (k+1)u]^2 + c.$$

Ориентиры для проверки:

$$u^* = \frac{b(k+1)\delta}{D_0}, \qquad v^* = \delta - u^*,$$

$$Q^* = c + \frac{b\delta^2}{D_0}, \qquad \lambda^* = -\frac{2b\delta}{D_0}, \qquad d^T H_L d = 2D_0.$$

Здесь D_0 — вспомогательный положительный коэффициент, а не определитель из критерия двух переменных. В отчёте нужно показать происхождение формул, а не ограничиваться подстановкой параметров. Условный максимум отсутствует, поскольку квадратичный коэффициент D_0 положителен и параметр прямой не ограничен.

8.5 Дополнительные задания

Исследуйте функцию $-F$ своего варианта и объясните, как меняется классификация стационарных точек. Затем сравните случаи $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$ и $-x^4 - y^4$ в начале координат: во всех трёх случаях Гессиан нулевой, но типы точек различаются.

Для примера на окружности выполните проверку параметризацией $x = \cos\tau$, $y = \sin\tau$. Объясните, почему одного уравнения $y = \sqrt{1 - x^2}$ недостаточно для полного исследования произвольной функции на всей окружности.

9 Отчёт и критерии оценивания

Отчёт должен содержать номер варианта, постановку обеих задач, ручные производные и решение систем, таблицы кандидатов и классификации, доказательства глобальных выводов, результаты программной проверки, два рисунка и заключение. В условной задаче обязательно приведите вычисления двумя способами: методом Лагранжа и исключением переменной.

В заключении объясните, какие условия были необходимыми, какие достаточными, где использовалась регулярность и каким образом проверена полнота списка стационарных точек. Приложите исходный код либо укажите используемые файлы архива и внесённые изменения. Зафиксируйте команду запуска и версии Python и библиотек своей среды.

Критерий	Баллы
Постановка задач и правильные исходные данные	10
Производные и полный список стационарных точек	20
Классификация и обоснование глобальных выводов	20
Метод Лагранжа и независимая проверка подстановкой	25
Программа и корректные иллюстрации	15
Оформление, выводы и защита	10
Итого	100

10 Контрольные вопросы

1. При каких предположениях нулевой градиент является необходимым условием экстремума?
2. Почему стационарная точка не обязательно является минимумом или максимумом?
3. Как разложение Тейлора объясняет роль матрицы Гессе?
4. Какие выводы дают знаки A и D в задаче двух переменных?
5. Почему при $D = 0$ нельзя автоматически утверждать отсутствие экстремума?
6. Чем положительная определённость в одной точке отличается от выпуклости функции на всей области?

7. Как локальный минимум может сочетаться с неограниченностью функции снизу?
8. Как строится функция Лагранжа и ограничен ли знак множителя при равенстве?
9. Что означает регулярность ограничения и зачем она нужна?
10. Как получить касательный вектор к одной регулярной кривой на плоскости?
11. Почему при нелинейном ограничении нужен Гессиан функции Лагранжа, а не только цели?
12. Почему знак квадратичной формы проверяется на касательных направлениях?
13. Какие точки может пропустить обычная система Лагранжа?
14. Как проверить условный экстремум исключением переменной и какие ограничения есть у этого способа?
15. Почему программа, нашедшая несколько решений системы, не всегда доказывает полноту списка?
16. Какие дополнительные действия нужны при ограничениях в форме неравенств?

Литература

1. Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие. 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 512 с. § 1, с. 9–13: производные и квадратичные формы; § 2, с. 16–25: безусловный экстремум; § 3.2, с. 31–43: экстремум при равенствах.
2. Материалы курса «Методы оптимизации». Лабораторная работа 4: поверхности, линии уровня, градиент и допустимые направления исследования.