

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теоретические вопросы

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделенными , с разделяющимися переменными и однородные.
3. Линейные уравнения первого порядка.
4. Уравнения в полных дифференциалах.

Расчетные задания

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$.) Указать тип дифференциального уравнения.

1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

1.3. $\sqrt{4+y^2} dx - ydy = x^2 ydy$.

1.4. $\sqrt{3+y^2} dx - ydy = x^2 ydy$.

1.5. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$.

1.6. $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$.

1.7. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$.

1.8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

1.9. $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.10. $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$.

1.11. $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$.

1.12. $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

1.13. $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.14. $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$.

1.15. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$.

1.16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$.

1.17. $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$.

1.18. $y \ln y + xy' = 0$.

1.19. $(1 + e^x)y' = ye^x$.

1.20. $\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

1.21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$.

1.22. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$.

1.23. $(3 + e^x)yy' = e^x$.

1.24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0$.

1.25. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx.$

1.26. $\sqrt{5 + y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0.$

1.27. $(1 + e^x)yy' = e^x.$

1.28. $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0.$

Задача 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения. Указать тип дифференциального уравнения.

2.1. $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2.$ (Ответ: $Cx = \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$)

2.2. $y'/7^{y-x} = 3.$ (Ответ: $7^{-y} = 3 \cdot 7^{-x} + C \ln 7.$)

2.3. $y - xy' = 2(1 + x^2y').$ (Ответ: $y = Cx/\sqrt{1 + 2x^2} + 2.$)

2.4. $y - xy' = 1 + x^2y'.$ (Ответ: $y = Cx/(x + 1) + 1.$)

2.5. $(x + 4)dy - xydx = 0.$ (Ответ: $y = Ce^x/(x + 4)^4.$)

2.6. $y' + y + y^2 = 0.$ (Ответ: $y/(y + 1) = C - x.$)

2.7. $y^2 \ln x dx - (y - 1)xdy = 0.$ (Ответ: $\frac{1}{y} + \ln y = C + \frac{1}{2} \ln^2 x.$)

2.8. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2dx = 0.$ (Ответ: $y + \ln \frac{(y-1)^2}{y} = C + \ln x.$)

2.9. $y' + 2y - y^2 = 0.$ (Ответ: $\sqrt{(y-2)/y} = Ce^x.$)

2.10. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0.$ (Ответ: $\frac{y^2}{2} + \ln y = C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.$)

2.11. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0.$ (Ответ: $\sqrt[3]{y^3 + 1} = C/\sqrt{x^2 - 1}.$)

2.12. $(1 + y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0.$ (Ответ: $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = C + \operatorname{arctg} x.$)

2.13. $y' = 2xy + x.$ (Ответ: $\frac{1}{2} \ln |2y + 1| = x^2/2 + C.$)

2.14. $y - xy' = 3(1 + x^2y').$ (Ответ: $y = C\sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{x+3} + 3.$)

2.15. $2xyy' = 1 - x^2.$ (Ответ: $y^2 = \ln |x| - \frac{x^2}{2} + C.$)

2.16. $(x^2 - 1)y' - xy = 0.$ (Ответ: $y = C\sqrt{x^2 - 1}.$)

2.17. $(y^2x + y^2)dy + xdx = 0.$ (Ответ: $y^3 = 3(C - x + \ln |x + 1|).$)

2.18. $(1 + x^3)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0.$ (Ответ: $\ln y + \frac{1}{2y^2} = C + x - \frac{1}{2x^2}.$)

2.19. $xy' - y = y^2$. (Ответ: $y/(y+1) = Cx$.)

2.20. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$. (Ответ: $\sqrt{y^2 + 1} = \ln Cx$.)

2.21. $y' - xy^2 = 2xy$. (Ответ: $\ln |y/(y+2)| = C + x^2$.)

2.22. $2x^2yy' + y^2 = 2$. (Ответ: $\ln |2 - y^2| = C + 1/x$.)

2.23. $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$. (Ответ: $\arctg y = C + \arctg x$.)

2.24. $y'\sqrt{1 + y^2} = x^2/y$. (Ответ: $\sqrt{(1 + y^2)^3} = C + x^3$.)

2.25. $(y + 1)y' = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy$. 2.26. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$.

2.27. $xyy' = \frac{1 + x^2}{1 - y^2}$.

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

Указать тип дифференциального уравнения.

3.1 $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

3.2 $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

3.3 $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

3.4 $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3.5 $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.

3.6 $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

3.7 $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$.

3.8 $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3.9 $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$.

3.10 $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

3.11 $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

3.12 $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

3.13 $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$.

3.14 $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.

3.15 $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$.

3.16 $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3.17 $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$.

3.18 $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.

$$3.19 \quad y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$3.20 \quad xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$3.21 \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

$$3.22 \quad xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$3.23 \quad y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

$$3.24 \quad xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

$$3.25 \quad 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$$

$$3.26 \quad xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$$

$$3.27 \quad y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

$$3.28 \quad xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Задача 4. Найти решение задачи Коши. Указать тип дифференциального уравнения.

$$4.1. \quad y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$$

$$4.2. \quad y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$$

$$4.3. \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0.$$

$$4.4. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$$

$$4.5. \quad y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$$

$$4.6. \quad y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$$

$$4.7. \quad y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$4.8. \quad y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$4.9. \quad y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$$

$$4.10. \quad y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$4.11. \quad y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$$

$$4.12. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

$$4.13. \quad y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.14. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$4.15. \quad y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$$

$$4.16. \quad y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$$

$$4.17. \quad y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3.$$

$$4.18. \quad y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$$

4.19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

4.20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$

4.21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$

4.22. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

4.23. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

4.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$

4.25. $y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \quad y(0) = 1/2.$

4.26. $y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

4.27. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$

4.28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

Задача 5. Решить задачу Коши. Указать тип дифференциального уравнения.

5.1. $y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0, \quad y|_{x=e} = 2.$

5.2. $(y^4 e^y + 2x)y' = y, \quad y|_{x=0} = 1.$

5.3. $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, \quad y|_{x=1} = e.$

5.4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0.$

5.5. $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y, \quad y|_{x=1/4} = \pi/3.$

5.6. $(x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y, \quad y|_{x=\pi} = \pi/4.$

5.7. $e^{y^2} (dx - 2xy dy) = y dy, \quad y|_{x=0} = 0.$

5.8. $(104y^3 - x)y' = 4y, \quad y|_{x=8} = 1.$

5.9. $dx + (xy - y^3) dy = 0, \quad y|_{x=-1} = 0.$

5.10. $(3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y, \quad y|_{x=16} = \pi/4.$

5.11. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0.$

5.12. $(2 \ln y - \ln^2 y) dy = y dx - x dy, \quad y|_{x=4} = e^2.$

5.13. $2(x + y^4)y' = y, \quad y|_{x=-2} = -1.$

5.14. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy, \quad y|_{x=1/4} = 2.$

$$5.15. 2y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy = 0, \quad y|_{x=e} = 1.$$

$$5.16. (xy + \sqrt{y}) dy + y^2 dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 4.$$

$$5.17. \sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x) dy, \quad y|_{x=-1/2} = \pi/4.$$

$$5.18. (y^2 + 2y - x) y' = 1, \quad y|_{x=2} = 0.$$

$$5.19. 2y\sqrt{y} dx - (6x\sqrt{y} + 7) dy = 0, \quad y|_{x=-4} = 1.$$

$$5.20. dx = (\sin y + 3\cos y + 3x) dy, \quad y|_{x=e^{\pi/2}} = \pi/2.$$

$$5.21. 2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x) y' = \sin 2y, \quad y|_{x=3/2} = 5\pi/4.$$

$$5.22. \operatorname{ch} y dx = (1 + x \operatorname{sh} x) dy, \quad y|_{x=1} = \ln 2.$$

$$5.23. (13y^3 - x) y' = 4y, \quad y|_{x=5} = 1.$$

$$5.24. y^2 (y^2 + 4) dx + 2xy (y^2 + 4) dy = 2dy, \quad y|_{x=\pi/8} = 2.$$

$$5.25. (x + \ln^2 y - \ln y) y' = y/2, \quad y|_{x=2} = 1.$$

$$5.26. (2xy + \sqrt{y}) dy + 2y^2 dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 1.$$

$$5.27. y dx + (2x - 2\sin^2 y - y \sin 2y) dy = 0, \quad y|_{x=3/2} = \pi/4.$$

6. Проинтегрировать дифференциальное уравнение.

Указать тип дифференциального уравнения.

$$6.1 \frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0$$

$$6.2 \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx = 0$$

$$6.3 (2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0 \quad 6.4 x dx + y dy + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} dx = 0$$

$$6.5 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 \right) dx - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy = 0 \quad 6.6 \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

$$6.7 (1 - e^y) dx + e^y (1 - \frac{x}{y}) dy = 0 \quad 6.8 (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2 y + 4y^3) dy = 0$$

$$6.9 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{\tilde{\delta}}{y^2} \right) dy = 0$$

$$6.10 \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy = 0 \quad 6.11 \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} \right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy$$

$$6.12 \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0 \quad 6.13 \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{ydx - xdy}{x^2} dx = 0$$

$$6.14 (3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$$

$$6.15 (3x^2 y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$$

$$6.16 y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 - y^2 - a^2)dx = 0$$

$$6.17 \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

$$6.18 (3x^2 - y \cos xy + y)dx + (x - x \cos xy)dy = 0$$

$$6.19 \left(12x^3 - e^{x/y} \frac{1}{y} \right) dx + \left(16y + \frac{x}{y^2} e^{x/y} \right) dy = 0$$

$$6.20 \left(3x^2 y^7 + \frac{1}{x-y} \right) dx + \left(7x^3 y^6 - \frac{1}{x-y} \right) dy = 0$$

$$6.21 \left(y \cos xy + \frac{2y}{x^3} \right) dx + \left(x \cos xy - \frac{1}{x^2} \right) dy = 0$$

$$6.22 \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2 y^2}} - 2x \right) dx + \frac{x}{\sqrt{1-x^2 y^2}} dy = 0$$