ИДЗ 2 «Функции нескольких переменных»

Задание 1. Найти область определения указанных функций.

1.1 $z=\sqrt{x^2+y-5}$;

1.2 $z=\ln(x^2+y^2-4)$.

1.3 $z=\arcsin(x-y)$;

1.4 $z=\dfrac{x^2y}{1-x+4y}$.

1.5 $z=\dfrac{2}{6-x^2-y^2}$;

1.6 $z=\ln(1-x-y^2)$.

1.7 $z=\ln(4-x^2-y^2)$;

1.8 $z=\dfrac{2xy}{2+x-2y}$.

1.9 $z=\sqrt{y^2-4x^2}$;

1.10 $z=\arccos(2x-y)$.

1.11 $z=\dfrac{3xy}{2x^2-5y}$;

1.12 $z=\arcsin(x/y)$.

1.13 $z=\dfrac{2}{\sqrt{4-x-2y}}$;

1.14 $z=\ln(9-x^2-y^2)$.

1.15 $z=\arcsin(4x+y)$;

1.16 $z=\dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

1.17 $z=\arccos(x+2y)$

1.18 $z=\arcsin(2x-y)$;

1.19 $z=\ln(8-x^2-y^2)$;

1.20 $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$;

1.21 $z=\dfrac{x+2y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$.

1.22 $z=\dfrac{9xy}{4+x^2-2y}$

1.23 $z=\ln(x^2+y^2-6)$

1.24 $z=\dfrac{2x+3y}{3-x^2-y^2}$

Задание 2. Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций.

2.1. $z = \ln(y^2 - e^{-x})$.
2.2. $z = \arcsin\sqrt{xy}$.
2.3. $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$.
2.4. $z = \cos(x^3 - 2xy)$.
2.5. $z = \sin\sqrt{y/x^3}$.
2.6. $z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2)$.
2.7. $z = \operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$.
2.8. $z = e^{-x^2+y^2}$.
2.9. $z = \ln(3x^2 - y^4)$.
2.10. $z = \arccos(y/x)$.
2.11. $z = \operatorname{arcctg}(xy^2)$.
2.12. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.
2.13. $z = \sin\sqrt{x - y^3}$.
2.14. $z = \operatorname{tg}(x^3y^4)$.
2.15. $z = \operatorname{ctg}(3x - 2y)$.
2.16. $z = e^{2x^2 - y^5}$.
2.17. $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$.
2.18. $z = \arcsin(2x^3y)$.
2.19. $z = \operatorname{arctg}(x^2/y^3)$.
2.20. $z = \cos(x - \sqrt{xy^3})$.
2.21. $z = \sin\frac{x+y}{x-y}$.
2.22. $z = \operatorname{tg}\frac{2x - y^2}{x}$.
2.23. $z = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{x}{x-y}}$.
2.24. $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.

Задание 3. Найти полные дифференциалы указанных функций.

1. $z = 2x^3y - 4xy^5$.
2. $z = x^2y\sin x - 3y$.
3. $z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}$.
4. $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$.
5. $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$.
6. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$.
7. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.
8. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.
9. $z = \arcsin(x + y)$.
10. $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.
11. $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$.
12. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$.
13. $z = e^{x+y-4}$.
14. $z = \cos(3x + y) - x^2$.
15 $z = tg((x+y)/(x-y))$
16 $z = ctg(y/x)$
17 $z = \sqrt{2x^2 + y - 5x}$
18 $z = \ln(x + xy - y^2)$
19 $z = arctg(2x + y^2)$
20 $z = \sqrt{x^2 + 4y^2 - yx}$
21 $z = \arcsin((x+y)/x)$
22 $z = arcctg(x - y)$
23 $z = \ln((x-y)/(x+y))$
24 $z = \arccos(xy) + x^2y^3$

Задание 4. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1. S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, $M_0(2,\ 1,\ -1)$.
2. S: $x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$, $M_0(-2,\ 1,\ 2)$.
3. S: $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$, $M_0(1,\ 2,\ 1)$.
4. S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$, $M_0(-1,\ 1,\ 2)$.
5. S: $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$, $M_0(2,\ 1,\ -1)$.
6. S: $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$, $M_0(2,\ 1,\ -1)$.
7. S: $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$; $M_0(1,\ 2,\ -3)$.

8. S: $x^2+y^2-xz-yz=0$, $M_0(0, 2, 2)$.
9. S: $x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2$, $M_0(1, 1, 1)$.
10. S: $y^2-z^2+x^2-2xz+2x=z$, $M_0(1, 1, 1)$.
11. S: $z=x^2+y^2-2xy+2x-y$, $M_0(-1, -1, -1)$.
12. S: $z=y^2-x^2+2xy-3y$, $M_0(1, -1, 1)$.
13. S: $z=x^2-y^2-2xy-x-2y$, $M_0(-1, 1, 1)$.
14. S: $x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13$, $M_0(3, 1, 2)$.

15 S: $4y^3+2xy-xz+3yz=4$, $P_0(2; 1; -4)$.

16. S: $z=x^2+y^2-3xy-x+y+2$, $M_0(2, 1, 0)$.
17. S: $2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3$, $M_0(1, 2, 1)$.
18. S: $x^2-y^2+z^2-4x+2y=14$, $M_0(3, 1, 4)$.
19. S: $x^2+y^2-z^2+xz+4y=4$, $M_0(1, 1, 2)$.
20. S: $x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5$, $M_0(-2, 1, 0)$.
21. S: $x^2+y^2-xz+yz-3x=11$, $M_0(1, 4, -1)$.

22. S: $x^2+2y^2+z^2-4xz=8$, $M_0(0, 2, 0)$.
23. S: $x^2-y^2-2z^2-2y=0$, $M_0(-1, -1, 1)$.
24. S: $x^2+y^2-3z^2+xy=-2z$, $M_0(1, 0, 1)$.
25. S: $2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0$, $M_0(1, -1, 1)$.
26. S: $x^2+y^2-z^2+6xy-z=8$, $M_0(1, 1, 0)$.
27. S: $z=2x^2-3y^2+4x-2y+10$, $M_0(-1, 1, 3)$.
28. S: $z=x^2+y^2-4xy+3x-15$, $M_0(-1, 3, 4)$.

Задание 5. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

1. $z=e^{x^2-y^2}$.
2. $z=\operatorname{ctg}(x+y)$.
3. $z=\operatorname{tg}(x/y)$.
4. $z=\cos(xy^2)$.
5. $z=\sin(x^2-y)$.
6. $z=\operatorname{arctg}(x+y)$.
7. $z=\arcsin(x-y)$.
8. $z=\arccos(2x+y)$.
9. $z=\operatorname{arcctg}(x-3y)$.
10. $z=\ln(3x^2-2y^2)$.
11. $z=e^{2x^2+y^2}$.
12. $z=\operatorname{ctg}(y/x)$.
13. $z=\operatorname{tg}\sqrt{xy}$.
14. $z=\cos(x^2y^2-5)$.
15. $z=\sin\sqrt{x^3y}$.
16. $z=\arcsin(x-2y)$.
17. $z=\arccos(4x-y)$.
18. $z=\operatorname{arctg}(5x+2y)$.
19. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.
20. $z=\ln(4x^2-5y^3)$.
21. $z=e^{\sqrt{x+y}}$.
22. $z=\arcsin(4x+y)$.
23. $z=\arccos(x-5y)$.
24. $z=\sin\sqrt{xy}$.
25. $z=\cos(3x^2-y^3)$.
26. $z=\operatorname{arctg}(3x+2y)$.
27. $z=\ln(5x^2-3y^4)$.
28. $z=\operatorname{arcctg}(x-4y)$.

Задание 6. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\frac{y}{x}.$

2. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3),\ u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3.$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+(y+1)^2).$

4. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x},\ u=x^y.$

5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u,\ u=\frac{xy}{x+y}.$

6. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=e^{xy}.$

7. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=\sin^2(x-ay).$

8. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=y\sqrt{\frac{y}{x}}.$

9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

10 $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u=e^{-\cos(x+ay)}$; 11 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=(x-y)(y-z)(z-x)$

12 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,\ u=x\ln\frac{y}{x}$; 13 $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=\ln(x^2+y^2)$;

14 $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0,\ u=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$;

15 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xyu=0,\qquad u=e^{xy}$

16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=\ln(x^2+y^2+2x+1).$

18. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0,\ u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$

19. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1,\ u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

20. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u,\ u=(x^2+y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}.$

21. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y).$

22 $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=xe^{y/x}$

23 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ u=arctg(y/x).$

24 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ u=arctg(x/y)$

Задание 7. Исследовать на экстремум следующие функции

1. $z=2x^2-xy+y^2-3x-y+1.$ 2. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y-2.$

3. $z=3x^2-2xy+y^2-2x-2y+3.$ 4. $z=2x^2+xy-y^2-7x+5y+2.$

5. $z=x^2-3xy-y^2-2x+6y+1.$ 6. $\mathrm{z=3x^2+xy-6y^2-6x-y+9}.$

7. $z=x^2-2xy+2y^2-4x+6y-2.$ 8. $z=4x^2-2xy+y^2-2x-4y+1.$

9. $z=0.5x^2+xy+y^2-x-y+8.$ 10. $z=8x^2-xy+2y^2-16x+y-1.$

11. $z=10+15x-2x^2-xy-2y^2$ 12. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$

13. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1.$ 14. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y.$

15 $z=2xy-2x^2-4y^2.$ 16 $z=x^2+xy+y^2-2x-y-2.$

17. $z=2xy-5x^2-3y^2+2.$ (*Ответ:* $z_{\max}(0,\ 0)=2.$)
18. $z=xy(12-x-y).$ (*Ответ:* $z_{\max}(4,\ 4)=64.$)
19. $z=xy-x^2-y^2+9.$ (*Ответ:* $z_{\max}(0,\ 0)=9.$)
20. $z=2xy-3x^2-2y^2+10.$ (*Ответ:* $z_{\max}(0,\ 0)=$

21 $z=x^3+8y^3-6xy+1$; 22 $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;

23 $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20.$ 24 $z=xy(4-x-y).$

Примечание. Необходимо решать: в заданиях 2,3,7 – по две задачи; остальные задания – по одной задаче.