6 ГРУППОВОЙ КОД

Лабораторная работа №6

6.1 Принцип формирования образующей матрицы

Линейными называются коды, в которых проверочные символы представляют собой линейные комбинации информационных символов. Для двоичных кодов в качестве линейной операции используют сложение по модулю 2.

Последовательность нулей и единиц, принадлежащих данному коду, называется кодовым вектором. Вес кодового вектора равен числу его ненулевых компонентов.

Свойство группового кода: минимальное кодовое расстояние между кодовыми векторами группового кода равно минимальному весу ненулевых кодовых векторов.

Групповые коды удобно задавать при помощи матриц, размерность которых определяется параметрами кода $n_и$ и $n_к$. Число строк матрицы равно $n_и$, число столбцов $n = n_и + n_к$:

$$C = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_и} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n_к} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_и} & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n_к} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_и 1} & a_{n_и 2} & \dots & a_{n_и n_и} & P & P_{n_и 1} & \dots & P_{n_и n_к} \end{Vmatrix}$$

Коды, порождаемые этими матрицами, известны как (n, k) – коды, где $k = n_и$, а соответствующие им матрицы называют *производящими, порождающими, образующими*.

Производящая матрица **C** может быть представлена при помощи двух матриц **И** и **П** (информационной и проверочной). Число столбцов матрицы **П** равно $n_к$, число столбцов матрицы **И** – $n_и$. При соблюдении всех этих условий любую производящую матрицу группового кода можно привести к следующему виду: $a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n$ и $P_1\, P_2 \dots P_{nи}$

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1(n-n_и)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2(n-n_и)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & P_{31} & P_{32} & \dots & P_{3(n-n_и)} \\ & & & \dots & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & P_{K_1} & P_{K_2} & \dots & P_{K(n-n_и)} \end{Vmatrix}$$

называемому *левой канонической*, или *приведенной ступенчатой формой производящей матрицы*.

Для кодов с $d_0 = 2$ производящая матрица С имеет вид

$$C=\begin{Vmatrix}1&0&0&\dots&0&1\\0&1&0&\dots&0&1\\0&0&1&\dots&0&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1&1\end{Vmatrix}=\begin{array}{cc}\boldsymbol{И} & \boldsymbol{П}\\ \begin{Vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{Vmatrix} & \begin{Vmatrix}1\\1\\1\\ \\1\end{Vmatrix}\end{array}$$

Во всех комбинациях кода, построенного при помощи такой матрицы, четное число единиц.

Известны формулы, по которым определяется связь между n, $n_и$ и $n_к$. В частности, если известно количество информационных разрядов $n_и$, то $n_к$ вычисляется по формуле:

$$n_к=\left[\log_2\left\{\left(n_и+1\right)+\left[\log_2\left(n_и+1\right)\right]\right\}\right] \qquad (5.1)$$

Квадратные скобки означают округление полученного числа до целого. Если известно количество разрядов в коде, т. е. n, то количество корректирующих разрядов равно: $n_к = \left[\log_2\left(n+1\right)\right]$

Пример 6.1.1. Построить матрицу для группового кода, способного исправлять одиночную ошибку при передаче 16 символов первичного алфавита.

Решение:

1. Так как число информационных разрядов кода $n_и = 4$ ($16 = 2^4 = 2^{n_и}$), то число строк производящей матрицы **С** должно быть равно 4.

2. Число столбцов матрицы **С** равно n; n – длина кода, которая равна $n_и+n_к$, а число корректирующих разрядов для кодов с $d_0=3$, $n_к=\log_2\left\{5+\left[\log_2 5\right]\right\}=\log_2 8=3$

Следовательно, число столбцов, содержащих контрольные разряды, должно быть равно 3, а общее число столбцов матрицы **С** равно $n_и + n_к = 4+3 = 7$.

3. Так как вес каждой строки проверочной матрицы **П** должен быть $W_П \geq d_0 - W_И$,
то в качестве строк проверочной матрицы могут быть выбраны трехзначные двоичные комбинации с числом единиц, большим или равным двум ($d_0 = 3$, а $W_И=1$, потому что матрицу информационных разрядов удобно выбирать единичную): 111; 110; 101; 011.

4. Окончательный вид производящей матрицы:

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \text{ или } C_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

или

$$C_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Как видно из примера, основным требованиям могут удовлетворять несколько матриц. Выбор той или иной матрицы из числа матриц, возможных для данных $n_и$, $n_к$ и d_0, определяется по дополнительным требованиям: минимум корректирующих разрядов или максимальная простота аппаратуры.

Пример 6.1.2. Определить вид производящей матрицы группового кода, оптимального с точки зрения минимума корректирующих разрядов при максимуме информационных разрядов, для использования его в системе телемеханики, проектируемой для передачи не менее 2000 различных сообщений.

Решение:

1. $2^{n_и} \geq 2000$, $n_и=11$, согласно (5.1), при $n_и=11$ и $d_0=3$, $n_к=\left[\log_2\left\{(11+1)+\left[\log_2(11+1)\right]\right\}\right]=4$

2. Проверим условие оптимальности кода. Условие оптимальности принимает вид

$$2^{n-n_и}-1=n;\ 2^{15-11}-1=15;\ 15=15.$$

3. Вес каждой комбинации проверочной матрицы **П**

$$W_п > d_0-1,\ W_п \geq 2.$$

4. Так как число строк производящей матрицы **С** равно $n_и$, то в качестве проверочных используются все четырехзначные двоичные комбинации весом $W \geq 2$.

5. Окончательный вид матрицы **С**:

$$C=\begin{Vmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1
\end{Vmatrix}$$

При четырех избыточных разрядах невозможно построить код, исправляющий одиночную ошибку, если у него будет число информационных разрядов больше 11, так как не существует больше 11 четырехзначных двоичных комбинаций, удовлетворяющих условию

$$W_n \geq d_0 - 1$$

6.2 Метод кодирования при помощи образующей матрицы

Метод кодирования при помощи образующих матриц может быть представлен следующим образом.

Строки образующей матрицы **C** представляют собой n комбинаций искомого кода. Остальные комбинации кода строятся при помощи образующей матрицы по следующему правилу: корректирующие символы, предназначенные для обнаружения или исправления ошибки в информационной части кода, находятся путем суммирования по модулю 2 тех строк матрицы **П**, номера которых совпадают с номерами разрядов, содержащих единицы в кодовом векторе, представляющем информационную часть кода. Полученную комбинацию приписывают справа к информационной части кода и получают вектор полного корректирующего кода. Аналогичную процедуру проделывают с каждой последующей информационной кодовой комбинацией, пока не будет построен корректирующий код для передачи всех символов первичного алфавита.

Алгоритм образования проверочных символов по известной информационной части кода может быть записан следующим образом:

$$P_1 = P_{11}\alpha_1 \oplus P_{21}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus P_{n_и 1}\alpha_{n_и};$$

$$P_2 = P_{12}\alpha_1 \oplus P_{22}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus P_{n_и 2}\alpha_{n_и};$$

....

$$P_{n_k} = P_{1 n_k \alpha_1} \oplus P_{2 n_k \alpha_2} \oplus \cdots \oplus P_{n_и n_k} \alpha_{n_и}$$

или

$$P_{ij} = P_{1j}\alpha_1 \oplus P_{2j}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus P_{nij}\alpha_{n_И} = \sum_{i=1}^{n_И} P_{ij}\alpha_i$$

Пример 6.2.1. Построить групповой код по заданной производящей матрице:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \underset{\boldsymbol{И}}{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}} \underset{\boldsymbol{П}}{\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}}$$

Решение:

1. Число строк матрицы $n_и$=4. Следовательно, число возможных информационных комбинаций

$$N = 2^{n_и} = 2^4 = 16$$

1)	0000	5)	0010	9)	0001	13)	0011
2)	1000	6)	1010	10)	1100	14)	1011
3)	0100	7)	0110	11)	0101	15)	0111
4)	1100	8)	1110	12)	1101	16)	1111

2. Находим последовательно корректирующие разряды всех информационных комбинаций путем суммирования по модулю 2 тех строк матрицы **П**, номера которых совпадают с номерами разрядов, содержащих единицы в информационной части кода.

1) 0 0 0	2) 1 1 1	3) 1 1 0	$4)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 1\\ \underline{1\ 1\ 0}\\ 0\ 0\ 1\end{array}$
5) 1 0 1	$6)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 1\\ \underline{1\ 0\ 1}\\ 0\ 1\ 0\end{array}$	$7)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 0\\ \underline{1\ 0\ 1}\\ 0\ 1\ 1\end{array}$	$8)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 1\\ 1\ 1\ 0\\ \underline{1\ 0\ 1}\\ 1\ 0\ 0\end{array}$
9) 1 0 1	$10)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 1\\ \underline{0\ 1\ 1}\\ 1\ 0\ 0\end{array}$	$11)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 0\\ \underline{0\ 1\ 1}\\ 1\ 0\ 1\end{array}$	$12)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 1\\ 1\ 1\ 0\\ \underline{0\ 1\ 1}\\ 0\ 1\ 0\end{array}$
$13)\oplus\begin{array}{c}1\ 0\ 1\\ \underline{0\ 1\ 1}\\ 1\ 1\ 0\end{array}$	$14)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 1\\ 1\ 0\ 1\\ \underline{0\ 1\ 1}\\ 0\ 0\ 1\end{array}$	$15)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 0\\ 1\ 0\ 1\\ \underline{0\ 1\ 1}\\ 0\ 0\ 0\end{array}$	$16)\oplus\begin{array}{c}1\ 1\ 1\\ 1\ 1\ 0\\ 1\ 0\ 1\\ \underline{0\ 1\ 1}\\ 1\ 1\ 1\end{array}$

3. Окончательно комбинации корректирующего кода имеют вид:

1) 0000000	5) 0010101	9) 0001011	13) 0011110
2) 1000111	6) 1010010	10) 1001100	14) 1011001
3) 0100110	7) 0110011	11) 0001110	15) 0111000
4) 1100001	8) 1110100	12) 1001100	16) 1111111

6.3 Коррекция ошибок в групповых кодах

Коррекции ошибок в линейных кодах связаны с выполнением проверок, идея которых в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$P_i \oplus \sum_{i=1}^{n_i} P_{ij} * a_i = S, \quad j=1,2,\dots,n_к$$

Для каждой конкретной матрицы существует своя, одна-единственная система проверок. Проверки производятся по следующему правилу: в первую проверку вместе с проверочным разрядом P_1 входят информационные разряды, соответствующие единицам первого столбца проверочной матрицы **П**, во вторую – второй проверочный разряд P_2 и информационные разряды, соответствующие единицам второго столбца проверочной матрицы, и т. д. Число проверок равно числу проверочных разрядов корректирующего кода $n_к$.

В результате проверок образуется проверочный вектор $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – синдром. Если число единиц проверяемых разрядов четно, то значение соответствующего разряда синдрома равно нулю. Если вес синдрома равен нулю, то принятая комбинация считается безошибочной. Если хотя бы один разряд проверочного вектора содержит единицу, то принятая комбинация содержит ошибку. Исправление ошибки производится по виду синдрома, так как каждому ошибочному разряду соответствует один-единственный проверочный вектор.

Вид синдрома для каждой конкретной матрицы может быть определен при помощи контрольной матрицы **H**, которая представляет собой транспонированную матрицу **П**, дополненную единичной матрицей **I**, число

$$H = \left\| \Pi^{T} I_{n_{к}} \right\|$$

Столбцы такой матрицы представляют собой значение синдрома для разряда, соответствующего номеру столбца матрицы **H**.

Пример 6.3.1 Групповой код построен по матрице

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Показать процесс исправления ошибки в произвольном разряде корректирующего кода, информационная часть которого представляет собой четырехразрядные комбинации натурального двоичного кода.

Решение:

1. Производящая матрица **С** в виде информационной матрицы **И** и проверочной матрицы **П** может быть представлена следующим образом:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \underset{\textbf{И}}{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}} \underset{\textbf{П}}{\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}}$$

Согласно принципу построения системы проверки, система проверок для кодов, построенных по матрице **С**, будет иметь вид

$$P_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = S_1$$

$$P_2 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = S_1$$

$$P_3 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = S_3$$

2. Чтобы знать, какая комбинация значений разрядов синдрома S_1, S_2, S_3 будет соответствовать ошибке в определенном разряде принятой комбинации, строим контрольную матрицу **H**, строками которой являются

столбцы матрицы **П**, дополненные единичной транспонированной матрицей $\mathbf{I_n}$, размерность которой определяется числом избыточных разрядов кода, т. е. в нашем случае равна 3. Таким образом,

$$H = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| & \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \\ \mathbf{П}^{\mathbf{T}} & \mathbf{I_n} \end{array}$$

Если разряды синдрома соответствуют первому столбцу матрицы **H**, т.е. S_j=0, S_2=1, S_3=1, то ошибки в первом разряде принятой комбинации, если синдром имеет вид 101, что соответствует второму столбцу матрицы **H**, то ошибка во втором разряде, синдром 001 соответствует ошибке в третьем проверочном разряде кода и т. д.

3. Так как информационная часть кода обычно представляет собой натуральный двоичный код разрядности $n_и$ то в качестве примера проверки корректирующих свойств кода используем информационные комбинации, соответствующие цифрам 3, 4 и 5 в четырехзначном двоичном коде: 1100, 0010 и 1010. Значение корректирующих разрядов находим путем суммирования строк матрицы **П**, соответствующих единицам в информационных

$$P' = 011 \oplus 101 = 110;$$

$$P'' = 110;$$

$$P''' = 011 \oplus 110 = 101.$$

Полные комбинации кода имеют вид соответственно: 1100110; 0010110; 1010101.

4. Пусть сбои произошли в первом разряде первой комбинации, в четвертом разряде второй и в последнем разряде третьей, т. е. приняты они в таком виде: 0100110; 0011110; 1010100.

Находим проверочные векторы согласно системе проверок. Для первой комбинации P' =110, т. е. P_1=1; P_2=1; P_3=0:

$$P_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0;$$

$$P_2 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$

$$P_3 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1.$$

Синдром 011 показывает, что в первом разряде символ следует заменить на обратный.

Для второй комбинации

$$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$$

$$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$$

$$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Синдром 1 1 1 – ошибка в четвертом разряде. Для третьей комбинации

$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$

$0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$

$0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1.$

Синдром 001 – ошибка в седьмом разряде.

6.4 Задание на лабораторную работу

6.4.1 Групповой код построен по матрице:

$$C = \begin{vmatrix} 1000 & 011 \\ 0100 & 111 \\ 0010 & 101 \\ 0001 & 110 \end{vmatrix}$$

Построить контрольную матрицу для исправления ошибки.

6.4.2 Дана образующая матрица для группового кода. Составить кодовые комбинации с учетом информационных составляющих $n_и$=1101, $n_и$=1111, $n_и$=1001.

$$C = \begin{vmatrix} 1000 & 111 \\ 0100 & 110 \\ 0010 & 101 \\ 0001 & 011 \end{vmatrix}$$

6.5 Задание на СРОП

Решить примеры, выданные преподавателем.

6.6 Вопросы для защиты лабораторной работы

6.6.1 Какие коды называются линейными?

6.6.2 Что такое кодовый вектор?

6.6.3 Определите основные шаги построения образующей матрицы линейного кода

6.6.4 Как определить корректирующую часть группового линейного кода, если задана информационная часть?

6.6.5 Опишите, как рассчитывается синдром для линейных кодов.

6.6.6 Как определить и исправить ошибку в линейном коде?