

2 УСЛОВНАЯ ЭНТРОПИЯ И ВЗАИМНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.

2.1 Теоретические сведения

Общая условная энтропия сообщения В относительно сообщения А характеризует количество информации, содержащееся в любом символе алфавита и определяется как:

$$H(B/A) = -\sum_i p(a_i) H(b_j/a_i) = \\ = -\sum_i \sum_j p(a_i) p(b_j/a_i) \log p(b_j/a_i)$$

Где $H(b_j/a_i) = -\sum_j p(b_j/a_i) \log p(b_j/a_i)$ - формула условной энтропии.

Энтропия объединения используется для вычисления энтропии совместного появления статистически зависимых сообщений.

$$H(A,B) = -\sum_i \sum_j p(a_i, b_j) \log_2 p(a_i, b_j) \text{ (бит/2 символа)}$$

В общем случае, если мы передаем m сигналов А и ожидаем получить m сигналов В, влияние помех в канале связи полностью описывается канальной матрицей. Со стороны источника сообщений канальная матрица, описывающая канал связи, имеет вид:

a/в	B_1	b_2	b_j	...	b_m
a_1	$P(b_1/a_1)$	$P(b_2/a_1)$...	$P(b_j/a_1)$...	$P(b_m/a_1)$
a_2	$P(b_1/a_2)$	$P(b_2/a_1)$	$P(b_j/a_2)$	$P(b_m/a_2)$
....
a_i	$P(b_1/a_i)$	$P(b_2/a_i)$	$P(b_j/a_i)$	$P(b_m/a_i)$
...
a_m	$P(b_1/a_m)$	$P(b_2/a_m)$	$P(b_j/a_m)$	$P(b_m/a_m)$

Вероятности, расположенные по диагонали, определяют правильный прием остальные - ложный.

Значение цифр, заполняющих колонки канальной матрицы, обычно уменьшаются по мере удаления от главной диагонали, и при полном отсутствии помех, все, кроме цифр, расположенных по главной диагонали, равны нулю. Энтропия объединения используется для вычисления энтропии совместного появления статистически зависимых сообщений. Для ансамбля переданных сообщений А и принятых сообщений В энтропия объединения:

В случае независимых ансамблей:

$$H(A,B) = H(A) + H(B)$$

Энтропия объединения и условная энтропия связаны между собой следующими соотношениями:

$$H(A,B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B)$$

Энтропия объединения может быть подсчитана при помощи матрицы вида:

$$P(a_i, b_j) = \begin{matrix} & P(a_1, b_1) & p(a_1, b_2) & \dots & p(a_1, b_m) \\ P(a_2, b_1) & p(a_2, b_2) & \dots & p(a_2, b_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(a_m, b_1) & p(a_m, b_2) & \dots & p(a_m, b_m) \end{matrix}$$

Свойства матрицы:

$$\sum_i p(a_i, b_j) = p(b_j)$$

$$\sum_j p(a_i, b_j) = p(a_i)$$

$$H(A) = -\sum_i \sum_j p(a_i, b_j) \log \sum_j p(a_i, b_j)$$

$$H(B) = -\sum_j \sum_i p(b_j, a_i) \log \sum_i p(b_j, a_i)$$

$$p(a_i / b_j) = \frac{p(a_i, b_j)}{\sum_i p(a_i, b_j)} \quad , \quad p(b_j / a_i) = \frac{p(a_i, b_j)}{\sum_j p(a_i, b_j)}$$

Взаимная информация величин X и Y показывает какое (в среднем) количество информации содержит сообщение X о сообщении Y или наоборот сообщение Y о сообщении X .

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(X) - H(X/Y) \quad , \\ I(X, Y) &= I(Y, X) = H(Y) - H(Y/X) \quad , \\ I(X, Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned}$$

Если X и Y независимы, то $I(X, Y) = 0$.

Если X и Y полностью зависимы (содержат одну и ту же информацию), то $I(X, Y) = H(X) = H(Y)$.

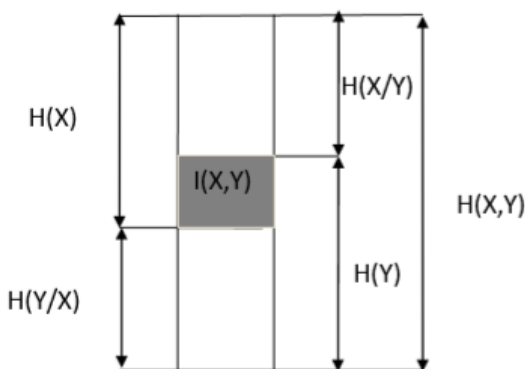


Рисунок 1. Взаимная информация источников сообщений

Понятие взаимной информации широко используется в теории передачи информации. Требования к взаимной информации различны в зависимости от того, с какой информацией работает потребитель. Например, если X и Y - это сообщения, публикуемые различными газетами, то для получения возможно большей суммарной (совместной) информации, взаимная (то есть одинаковая в данном случае) информация должна быть минимальной. Если же X и Y- это сообщения на входе и на выходе канала связи с помехами, то для получения возможно большей информации ее получателем необходимо, чтобы взаимная информация была наибольшей. Тогда условная энтропия $H(X/Y)$ – это потери информации в канале связи (ненадежность канала). Условная энтропия $H(Y/X)$ - это информация о помехах (энтропия источника помех), поступающая в канал извне или создаваемая внутренними помехами в канале.

2.2 Пример выполнения

Пример 1. Определить общую условную энтропию сообщений, составленных из алфавита A, B, если вероятности появления символов в сообщении равны $p_A=0,6$; $p_B=0,4$. Условные вероятности переходов одного символа в другой равны $p(B/A)=0,15$; $p(A/B)=0,1$.

$$H(A) = -\sum_i \sum_j p(a_i) p(b_j / a_i) \log_2 p(b_j / a_i) =$$

$$= -[0,6(0,85 \log_2 0,85 + 0,15 \log_2 0,15) + 0,4(0,1 \log_2 0,1 + 0,9 \log_2 0,9)] =$$

$$= 0,6 \cdot 0,6098 + 0,4 \cdot 0,4689 = 0,36588 + 0,18786 = 0,55374 \text{ бит/символ.}$$

Пример 2. Влияние помех в канале связи описывается следующим распределением условных вероятностей:

$$p(b/a) = \begin{vmatrix} 0,98 & 0,01 & 0,01 \\ 0,15 & 0,75 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Вычислить полную условную энтропию сообщений, передаваемых по данному каналу связи:

- а) при равновероятном появлении символов в сообщении;
- б) при вероятностях $p(a_1)=0,7$; $p(a_2)=0,2$; $p(a_3)=0,1$.

а) При равновероятном появлении символов энтропия источника сообщений $H(A) = \log_2 3 = 1,58$ бит/символ.

Полная условная энтропия

$$H(B/A) = -\frac{1}{m} \sum_j \sum_i p(b_j/a_i) \log_2 p(b_j/a_i) =$$

$$= -1/3(0,98 \log_2 0,98 + 2 \cdot 0,01 \log_2 0,01 + 0,15 \log_2 0,15 + 0,75 \log_2 0,75 + 0,1 \log_2 0,1 + 0,3 \log_2 0,3 + 0,2 \log_2 0,2 + 0,5 \log_2 0,5) = 0,9 \text{ бит/символ.}$$

б) При неравновероятном появлении символов энтропия источника сообщений

$$H(A) = -\sum_i p_i \log_2 p_i =$$

$$= -(0,7 \log_2 0,7 + 0,2 \log_2 0,2 + 0,1 \log_2 0,1) = 1,156 \text{ бит/символ.}$$

Полная условная энтропия

$$H(B/A) = -[0,7(0,98 \log_2 0,98 + 2 \cdot 0,01 \log_2 0,01) + 0,2(0,15 \log_2 0,15 + 0,75 \log_2 0,75 + 0,1 \log_2 0,1) + 0,1(0,3 \log_2 0,3 + 0,2 \log_2 0,2 + 0,5 \log_2 0,5)] = 0,463 \text{ бит/символ.}$$

Пример 3. Канал связи описан следующей канальной матрицей:

$$p(b/a) = \begin{vmatrix} 0,98 & 0,01 & 0,01 \\ 0,1 & 0,75 & 0,15 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Вычислить среднее количество информации, которое переносится одним символом сообщения, если вероятности появления символов источника сообщений равны $p(a_1)=0,7$; $p(a_2)=0,2$; $p(a_3)=0,1$. Чему равны информационные потери при передаче сообщения из 400 символов алфавита a_1, a_2, a_3 ? Чему равно количество принятой информации?

Энтропия источника сообщений

$$H(A) = -\sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i = -(0,7 \log_2 0,7 + 0,2 \log_2 0,2 + 0,1 \log_2 0,1) =$$

$$= 0,3602 + 0,4644 + 0,3322 = 1,1568 \text{ бит/символ.}$$

Общая условная энтропия

$$H(B/A) = -\sum_i p(a_i) \sum_j p(b_j/a_i) \log_2 p(b_j/a_i) = [0,7(0,98 \log_2 0,98 + 2 \cdot 0,01 \log_2 0,01) + 0,2(0,75 \log_2 0,75 + 0,1 \log_2 0,1 + 0,15 \log_2 0,15) + 0,1(0,2 \log_2 0,2 + 0,3 \log_2 0,3 + 0,5 \log_2 0,5)] = 0,7(0,0285 + 2 \cdot 0,0664) + 0,2(0,3113 + 0,322 + 0,4105) + 0,1(0,4644 + 0,5211 + 0,5) = 0,473 \text{ бит/символ.}$$

Потери в канале связи $\Delta I = kH(B/A) = 400 \cdot 0,473 = 189,5$ бит.

Энтропия приемника $H(B) = -\sum_{j=1}^m p(b_j) \log_2 p(b_j)$;

$$p(b_1) = \sum_i p(a_i) p(b_1/a_i) = p(a_1) p(b_1/a_1) + p(a_2) p(b_1/a_2) + p(a_3) p(b_1/a_3) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,726;$$

$$p(b_2) = p(a_1) p(b_2/a_1) + p(a_2) p(b_2/a_2) + p(a_3) p(b_2/a_3) =$$

$$0,7 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,187;$$

$$p(b_3) = p(a_1) p(b_3/a_1) + p(a_2) p(b_3/a_2) + p(a_3) p(b_3/a_3) =$$

$$0,7 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,15 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,087;$$

$$p(b_1) + p(b_2) + p(b_3) = 0,726 + 0,187 + 0,087 = 1, \text{ т.е. } \sum_j p(b_j) = 1.$$

$$H(B) = -(0,726 \log_2 0,726 + 0,187 \log_2 0,187 + 0,087 \log_2 0,087) = 1,094 \text{ бит/ символ.}$$

Среднее количество полученной информации

$$I = k[H(B) - H(B/A)] = kH(B) - \Delta I = 248,1 \text{ бит.}$$

2.3 Задание на лабораторную работу

Вариант 1. Определить частные условные энтропии для каждого символа алфавита a_1 - a_4 , если канал связи для передачи сообщений описывается следующей канальной матрицей:

$$p(b/a) = \begin{vmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,94 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0,98 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{vmatrix}$$

б) Чему равна общая условная энтропия для сообщений, передаваемых по каналу связи, описанному приведенной матрицей, если символы источника сообщений равновероятны

в) чему равна общая условная энтропия для сообщений, передаваемых по каналу связи, если распределение вероятностей появления символов на выходе источника сообщений имеет вид

$$p(a_1)=0,15; p(a_2)=0,32; p(a_3)=0,25; p(a_4)=0,28;.$$

Вариант 2. Задана матрица вероятностей системы, объединенной в одну систему из двух взаимозависимых систем В и А:

$$P(A, B) = \begin{vmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{vmatrix}$$

Определить условные энтропии $H(B/A)$ и $H(A/B)$.

2.4 Задание на СРОП

Решить контрольные задания, выданные преподавателем.

2.5 Вопросы для защиты лабораторной работы

1. Дать определение условной энтропии.
2. Какие формулы используются для расчета условной энтропии?
3. Какие формулы используются для расчета взаимной информации?
4. Как определяется полная средняя взаимная информация?