# ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 3

1. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций:

1.1

а) $y = 3x^4 + \dfrac{5}{x^7} - 2\sqrt[3]{x^8} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{x^5}{10} + 1$;

б) $y = \sqrt[6]{\left(5x^2 - 3x + 5\right)^5} \cdot \sin^3 2x$;

в) $y = \left(arctg\, 5x\right)^{\ln(3x+1)}$;

г) $x^2 + y^2 \cdot \ln x - \dfrac{y}{x} = 0$;

д) $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = t - arctg\, t \end{cases}$

1.2

а) $y = 3 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \dfrac{2}{3}x^5 + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{2}{x}$;

б) $y = \ln\left(1 + \sin^2 x\right) - 2\sin x \cdot arctg\left(\sin x\right)$;

в) $y = \left(tg\,\dfrac{x}{2}\right)^{\cos(3x+1)}$;

г) $y^2 \cos x - \sin\left(3x^2 y\right) = 5$;

д) $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\dfrac{t^3}{3} + t\right). \end{cases}$

1.3

а) $y = 4x^5 - \dfrac{5}{x} - \sqrt[4]{x^5} + \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{1}{5\sqrt[4]{x^9}} - 7$;

б) $y = \dfrac{\cos 2x - \dfrac{1}{3}\cos^3 2x}{(x^2 + 4) \cdot e^{-x^2}}$;

в) $y = \left(\ln(7 - x)\right)^{ctg\, 2x}$;

г) $arctg\,\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

д) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases}$

1.6

а) $y = 8 - \dfrac{4}{x} - \sqrt[3]{x^5} + 3x^6 - \dfrac{4}{x^8} - \dfrac{x^5\sqrt{x}}{7}$;

б) $y = (x+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^3} - \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$;

в) $y = \left(\log_5(2x + 5)\right)^{\cos(2x-1)}$;

г) $y^2 - \dfrac{y}{x} = \arcsin x - \arccos y$;

д) $\begin{cases} x = \ln\left(tg\, t\right), \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

1.7

а) $y = 10x^2 + \dfrac{3}{\sqrt[6]{x^5}} - \dfrac{x^6}{3} - \dfrac{4}{x} - \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{3} - 3$;

б) $y = \arccos^3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + \left(1 - x^4\right) \cdot \ln\left(\mathrm{ctg}\sqrt{1 + e^{5x}}\right)$;

в) $y = \left(\cos\dfrac{3x}{2}\right)^{\ln(x-2)}$;

г) $\sin\left(y - x^4\right) - \ln^2(y + 1) = 7$;

д) $\begin{cases} x = arctg\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right), \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

1.8

а) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^4}} - x^7 + \dfrac{\sqrt[9]{x^5}}{4} - 5x + 9$;

б) $y = x^3 \cdot e^{3x} - \sqrt[3]{1 + \ln^2(5x + 1)}$;

в) $y = \left(tg\, 7x^5\right)^{\sqrt{x+3}}$;

г) $y^2 + 4x = 5^{\ln x} - \sin y$;

д) $\begin{cases} x = \arccos\left(\dfrac{1}{t}\right), \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin\left(\dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

1.4

а) $y = 8x^3 - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^7}} - \dfrac{x^5}{4} + \dfrac{6}{x^4} - x^2\sqrt{x} - \dfrac{7}{x} + 5$;

б) $y = \dfrac{e^{2x} \cdot \sin x}{\operatorname{arctg}^3 5x}$;

в) $y = (\arccos 2x)^{\sqrt{\sin x}}$;

г) $x^2 - 2xy^2 + y - e^{y-x} = 0$;

д) $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

1.5

а) $y = \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{3}{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + 2x^7 - \dfrac{x\sqrt[4]{x^5}}{3} - 6$;

б) $y = x^2 \ln(3x^2+1) + \sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 2x}$;

в) $y = (ctg\, 2x^3)^{\log_2(x+4)}$;

г) $e^x \sin y - e^{-y^2} \cos x + 2 = 0$;

д) $\begin{cases} x = \arcsin\left(\sqrt{1-t^2}\right), \\ y = \arccos^2 t. \end{cases}$

1.9

а) $y = 7x^5 - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^5}} - \dfrac{2}{x^2} - 3x^3 + \dfrac{\sqrt{x^9}}{x^3} + 2$;

б) $y = 2^{\sqrt{x}} + \dfrac{1+\sin^2 3x}{1-\sin^2 3x}$;

в) $y = (\cos 4x)^{arctg(1/x)}$;

г) $\ln\left(y + x^2\right) + 2\sqrt{y + x^2} = 0$;

д) $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t^2), \\ y = \arccos(\cos t^2). \end{cases}$

1.10

а) $y = 7x + \dfrac{5}{x^3} - 2\sqrt[7]{x^4} + \dfrac{6}{x} - \dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{4} - 8$;

б) $y = \arcsin 3x \cdot \sqrt{1-9x^2} + \left(\dfrac{1+x^2}{x}\right)^3$;

в) $y = (\lg(8x+3))^{tg^2 5x}$;

г) $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 2y + 1 = 0$;

д) $\begin{cases} x = \left(1+\cos^2 t\right)^2, \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

2. Дана функция $y = f(x)$. Найти уравнение касательной и нормали в точке с абсциссой $x_0$.

2.1 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$;

2.2 $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$, $x_0 = -1$;

2.3 $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x_0 = -2$;

2.4 $y = \dfrac{x^2-3}{x^2+9}$, $x_0 = 1$;

2.5 $y = \dfrac{x^4+2x^2}{x^2-2}$, $x_0 = -3$;

2.6 $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $x_0 = 0$;

2.7 $y = \dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$, $x_0 = 3$;

2.8 $y = \dfrac{2x^2-1}{x^4}$, $x_0 = -2$;

2.9 $y = \dfrac{x^6+9}{1-5x^2}$, $x_0 = 1$;

2.10 $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0 = -1$.

3. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

3.1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^{10}}$

3.2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{tg\,x-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{e^x}$.

3.3 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[5]{x+2}}$.

3.4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3e^{-2x}\right)$.

3.5 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctg\,x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\sin\dfrac{3}{x}\right)$.

3.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

3.7 а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot e^{-0,04x}\right)$.

3.8 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$.

3.9 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4+7\right)\cdot e^{-2x}$.

3.10 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^2 2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

4. Провести полное исследование и построить график функции:

4.1 $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$;

4.2 $y=\dfrac{x^2+16}{4x}$;

4.3 $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3x}$;

4.4 $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$;

4.5 $y=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$;

4.6 $y=1+\dfrac{4x+1}{x^2}$;

4.7 $y=\dfrac{x+1}{1-x^2}$;

4.8 $y=x+\dfrac{x}{3x-1}$;

4.9 $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;

4.10 $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.