Практическое занятие. Тема 13

Интегрирование рациональных дробей и тригонометрических функций

Интегрирование рациональных функций

Пусть A, B, p, q, a – действительные числа; m –целое число, $m \geq 2$, $p^2-4q<0$.
Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби одного из следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^m}$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m}$.

Интеграл от простейшей дроби, в зависимости от её типа, вычисляется следующим образом:

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\cdot\ln|x-a|+C$;

2) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\cdot\ln|x-a|+C$;

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\cdot\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{(2B-Ap)}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$;

4) $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m}$,

где $t=x+\dfrac{p}{2}$; $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$; $K_m=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$.

Интеграл K_m вычисляется по рекуррентной формуле:

$$K_{m+1}=\frac{t}{2ma^2(t^2+a^2)^m}+\frac{2m-1}{2ma^2}\cdot K_m$$

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$.

► $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16}=\frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4}+C$. ◄

Пример 2. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

► $\displaystyle\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\cdot\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=$

$\displaystyle=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}+5\cdot\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C$. ◄

Пример 3. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x^5-x^2}$.

►Разложим знаменатель на множители: $x^5 - x^2 = x^2(x-1)(x^2+x+1)$. На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем:

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} \right) dx .$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, получим:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1) .$$

Перепишем предыдущее равенство в виде:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1) + Bx(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1) .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях , получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c|c} x^4 & B+C+D=0 \\ x^3 & A+C-D+E=0 \\ x^2 & C-E=0 \\ x & -B=0 \\ x^0 & -A=1 \end{array}\right\}$$

. Из которой найдем A=-1, B=0, $C = 1/3$, $D = -1/3$, $E = 1/3$.

Таким образом

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C .$$ ◄

Аудиторное задание

Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$; (Ответ: $-\frac{1}{3(x-1)^3} + C$)
2. $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$; (Ответ: $-\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$)
3. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 3}$; (Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{2}} arctg\frac{(x^2+1)}{\sqrt{2}} + C$)
4. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$; (Ответ: $\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5) - \frac{1}{6} arctg\frac{2x+1}{3} + C$)
5. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx$; (Ответ: $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7) + C$)

Домашнее задание

Найти интегралы:

1. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; (Ответ: $\ln|x-2| + \ln|x+5| + C$)
2. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$; (Ответ: $\frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$)

3. $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$; (Ответ: $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}+C$)

4. $\int \frac{4dx}{x(x^2+4)}$; (Ответ: $\ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|}+C$)

5. $\int \frac{x^2dx}{x^4-1}$; (Ответ: $\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$)

Интегрирование некоторых иррациональных функций и тригонометрических выражений

Не для всякой функции можно найти первообразную в виде элементарной функции. Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

Интеграл вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1/s_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_v/s_v}\right)dx,$

-где R– рациональная функция a,b,c,d - постоянные, r_i, s_i - целые положительные числа, $i=\overline{1,v}$, приводится к интегралу от рациональной функции новой переменой и с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=u^m$$

(здесь число m – наименьшие общее кратное (НОК) знаменателей дробей

$\frac{r_i}{s_i}$, ..., $\frac{r_v}{s_v}$, $m=НОК(s_i,....,s_v)$.

В частности, интеграл вида

$$\int R(x,x^{r_1/s_1},...,x^{r_v/s_v})\,dx$$

Приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной и с помощью подстановки $x=u^m$.

Интегрирование некоторых функций, рационально зависящих от $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Рассмотрим интеграл вида $\int\frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где P(x) – многочлен степени n .

Оказывается, что данный интеграл всегда можно представить в виде

$$\int\frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

где $\lambda\in R$; $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степени n -1 с неопределенными коэффициентами, которые находят следующим образом. Дифференцируем равенство (1), в результате получаем тождество, из которого определяем коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Интегрирование тригонометрических выражении.

Интегралы вида

$$\int R(\cos x,\sin x)\,dx, \qquad (2)$$

где R – рациональная функция, приводится к интегралам от рациональных функций новой переменной u с помощью универсальных подстановки $tg\frac{x}{2}=u.$ В этом случае

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2\,du}{1+u^2} \tag{3}$$

В случае, когда имеет место тождество $R(-\cos x, -\sin x) \equiv R(\cos x, \sin x)$,
Для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применить *упрощенную подстановку* $tg\, x = u$. При этом

$$\cos x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad dx = \frac{du}{1+u^2} \tag{4}$$

При нахождении интегралов вида

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx \qquad \text{и} \qquad \int f(\sin x)\cos x\,dx, \tag{5}$$

целесообразно применять подстановки

$$\cos x = t \quad u \quad \sin x = t \tag{6}$$

соответственно.

Пример 1. Найти $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$.

►Так как НОК (2, 4) = 4, то $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt[4]{x^3}+4} = \int \frac{x^{1/2}dx}{x^{3/4}+4} = \left| \begin{matrix} x = u^4, \\ dx = 4u^3\,du \end{matrix} \right| = 4\int \frac{u^2}{u^3+4}u^3 du =$

$$= 4\int \frac{u^5 du}{u^3+4} = 4\int \left(u^2 - \frac{4u^2}{u^3+4} \right) du = \frac{4}{3}u^3 - \frac{16}{3}\ln\left|u^3+4\right| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right| + C, \qquad \text{поскольку} \quad u = \sqrt[4]{x}\,.$$ ◄

Пример 2. Найти $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}\ dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

►Так как НОК (2,3,6) = 6, то $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}\ dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1 = u^6, \\ dx = 6u^5 du \end{matrix} \right| = \int \frac{u}{u^3+u^2} 6u^5 du =$

$$= 6\int \frac{u^4}{u+1}du = 6\int \left(u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1} \right) du = \frac{3}{2}u^4 - 2u^3 + 3u^2 - 6u + 6\ln|u+1| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + \ln\left|\sqrt[6]{x+1}\right| + C.$$ ◄

Пример 3. Найти $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

►Согласно формуле (1), имеем:

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int \frac{dx}{x^2+4}\,.$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4} + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,.$$

Умножим обе части равенства (1) на $\sqrt{x^2+4}$. Тогда

$$x^4+4x^2 = (3Ax^2+2Bx+C)\left(x^2+4\right) + (Ax^3+Bx^2+Cx+D)x + \lambda.$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & 1 = 3A + A, \\
x^3 & 0 = 2B + B, \\
x^2 & 4 = 12A + C + B, \\
x^1 & 0 = 4B + D, \\
x^0 & 0 = 4C + \lambda,
\end{array}\Bigg\}$$

Решение которой: A $=1/4$, B = 0, C = $1/2$, D = 0, λ = -2.

Следовательно,

$$\int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{x^3 + 2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C. \quad ◄$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$.

►Полагаем $tg\frac{x}{2} = u$. Тогда, согласно равенством ,

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{2\,du/\left(1+u^2\right)}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + C =. \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right| + C. \quad ◄$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$.

►Положив $tg\,x = u$, согласно формуле (3), получим:

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{du/(1+u^2)}{3+u^2/(1+u^2)} = \int \frac{du}{3+4u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2u}{\sqrt{3}+C} = \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\,x}{\sqrt{3}} + C\,.◄$$

Пример 6. Найти $\int tg^5 2x\,dx$.

► Применим подстановку $tg\,2x = u$. Тогда $x = \frac{1}{2}arctg\,u$, $dx = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}\,du$,

$$\int tg^5 2x\,dx = \frac{1}{2}\int u^5\frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\int\left(u^3 - u + \frac{u}{1+u^2}\right)du = \frac{1}{8}u^4 - \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + C =$$

$$= \frac{1}{8}tg^4 2x - \frac{1}{4}tg^2 2x + \frac{1}{4}\ln(1+tg^2 2x) + C\,.◄$$

Пример 7. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

► Проложим $\cos x = t$. Тогда

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin x\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}(-dt) = -\int \frac{1}{t^4}dt + \int \frac{1}{t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^{-3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \quad ◄$$

Пример 8. Найти $I = \int \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)^2}}dx.$

►Положим $2 + 3\sin 2x = t^3$. Тогда $\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}t^2 dt$ и

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt[3]{t^6}}\,dt=\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2+3\sin 2x}+C. \quad ◄$$

Аудиторное задание

1. Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{dx}{3x-4\sqrt{x}}.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{2}{3}\ln\left|3\sqrt{x}+4\right|+C.\right)$
2. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|+C.\right)$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+4}+2\sqrt[4]{3x+4}}.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3x+4}-2\sqrt[4]{3x+4}+4\ln(\sqrt[4]{3x+4}+21)\right)+C.\right)$
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-7\sqrt[4]{x}}.$ $\left(\textit{Ответ}:4\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x}+49\ln\left|\sqrt[4]{x}-7\right|\right)+C.\right)$
5. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$ $\left(\textit{Ответ}:\ \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\,arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.\right)$

2. Найти данные неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{d\,x}{3+5\cos x}.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C\right).$
2. $\int\frac{d\,x}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{1}{\sqrt{15}}arctg\frac{\sqrt{3}\,tg\,x}{\sqrt{5}}+C\right).$ 3.

$\int\frac{d\,x}{8-4\sin x+7\cos x}.$ $\left(\textit{Ответ}:\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C\right).$ 4.

$\int\cos^3 x\sin^{10} x\,dx$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{\sin^{11} x}{11}-\frac{\sin^{13} x}{13}+C\right).$ 5.

$\int\frac{d\,x}{\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x}.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}\right|+C\right).$ 6.

$\int\sin^4 x\,dx.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{3x}{8}-\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 12x}{96}+C\right).$

7. $\int\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx.$ $\left(\textit{Ответ}:\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right|+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C\right).$ 8.

$\int\frac{d\,x}{\sin^3 x\cos x}.$ $\left(\textit{Ответ}:\ln\left|\,tgx\,\right|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C\right).$

Домашнее задание

1. Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx;$ б) $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{x^2+2}}.$

$$\left(Ответ: а) \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\right)+C;\quad б)\ \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}+C \right).$$

2. а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx;$ б) $\displaystyle\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}.$

$$\left(Ответ: а) \frac{2}{9}\sqrt[4]{x^9}-\frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C;\quad б)\ 3\sqrt[3]{x+1}-4(x+1)+C \right).$$

3. а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}};$ б) $\displaystyle\int \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}.$

$$\left(Ответ: а)\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})\right)+C;\ б)\ \ \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-8)^4}+\frac{8}{9}(3x-8)+C \right).$$

2. Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx.$ б) $\displaystyle\int \frac{d\,x}{4-5\sin x}.$

$$\left(Ответ:\ а)\ \frac{3}{5}\cos^{5/3}x-3\cos^{-1/3}x+C;\ \ б)\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{2tg\frac{x}{2}-1}\right|+C \right).$$

2. а) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4\sin 2x}}dx.$ б) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,d\,x}{\sin x+1}.$

$$\left(Ответ: а) \frac{1}{4}\sqrt{3+4\sin 2x}+C;\quad б)\ \ \frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+x+C \right).$$

3. а) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{(3+2\cos 3x)^2}}dx.$ б) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx.$

$$\left(Ответ: а) \frac{1}{2}\sqrt{3+2\cos 3x}+C;\quad б)\ \ \sqrt{2}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)-x+C \right).$$