

Замена переменной в неопределенном интеграле и интегрирование по частям

Если функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то в данном неопределенном интеграле $\int f(x)dx$. всегда можно перейти к новой переменной t по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Затем найти интеграл из правой части и вернуться к исходной переменной. Такой способ нахождения интеграла называется методом замены переменной.

Интегрирование по частям

Метод интегрирование по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

где $u(x),v(x)$ –непрерывно дифференцируемые функции. Формула называется формулой интегрирования по частям.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int x\sqrt{x-1}dx$$

Решение. Введем новую переменную t по формуле $t = \sqrt{x-1}$. Тогда

$$x = t^2 + 1, dx = 2tdt, D_t: 0 < t < \infty, D_x: 1 < x < \infty \text{ и имеем:}$$

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (t^2 + 1)t2dt = \frac{2}{5}t^5 + 2/3t^3 + C = 2/5(x-1)^{5/2} + 2/3(x-1)^{3/2} + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int e^{-x^3} x^2 dx$$

Решение: Воспользуемся подстановкой $-x^3 = t$. Тогда имеем $-3x^2 dx = dt$ и

$$\int e^{-x^3} x^2 dx = \int e^t (-1/3)dt = -1/3 e^t + C = -1/3 e^{-x^3} + C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \sqrt[3]{1 + \sin x} \cos x dx$$

Решение. Применим подстановку $1 + \sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$ и

$$\int \sqrt[3]{1 + \sin x} \cos x dx = \int t^{1/3} dt = \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = 4/3 \sqrt[3]{(1 + \sin x)^4} + C$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл $\int x e^{-2x} dx$.

Решение. Воспользуемся методом интегрирование по частям. Положим $u=x$, $dv=e^{-2x} dx$

Тогда $du=dx$, $v=\int e^{-2x} dx = -1/2 e^{-2x} + C$ Следовательно по формуле имеем:

$$\int x e^{-2x} dx = x(-1/2 e^{-2x}) - \int -1/2 e^{-2x} dx = -1/2 e^{-2x} - 1/4 e^{-2x} + C.$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x^2 + 2x) \cos 2x dx$$

Решение:

$$\int (x^2 + 2x) \cos 2x dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2x, du = (2x + 2)dx \\ dv = \cos 2x dx, v = \int \cos 2x dx = 1/2 \sin 2x \end{array} \right| = 1/2(x^2 + 2x) \sin 2x - \int (x + 1) \sin 2x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x + 1, du = dx \\ dv = \sin 2x dx, v = -1/2 \cos 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2}(x^2 + 2x) \sin 2x + \frac{1}{2}(x + 1) \cos 2x + 1/4 \sin 2x + C.$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{2x} \sin x dx$$

Решение:

$$\int e^{2x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, du = \cos x dx \\ dv = e^{2x} dx, v = 1/2 e^{2x} \end{array} \right| = 1/2 e^{2x} \sin x - 1/2 \int e^{2x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, du = -\sin x dx \\ dv = e^{2x} dx, v = 1/2 e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= 1/2 e^{2x} \sin x - 1/4 e^{2x} \cos x + 1/4 \int e^{2x} \sin x dx.$$

Перенеся последний интеграл в левую часть равенства, получим:

$$\int e^{2x} \sin x dx = 2/3 e^{2x} \sin x - 1/3 e^{2x} \cos x + C.$$

Аудиторное задание

Найти неопределенный интеграл

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}; \quad 2. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx; \quad 3. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}; \quad 5. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

Ответы:

$$1. 2(\sqrt{x+3} - \ln |1 + \sqrt{x+3}|) + C$$

$$2. 2\sqrt{1 + \ln x} - \ln \ln x + 2 \ln |\sqrt{1 + \ln x} - 1| + C;$$

$$3. 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4(1 + \sqrt[4]{x}) + C;$$

$$4. C - \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{9x}; \quad 5. 2/3(e^x - 2)\sqrt{e^x + 1} + C.$$

Найти неопределенный интеграл

$$1. \int x \cos 3x dx; \quad 2. \int \ln^2 x dx; \quad 3. \int \arccos x dx; \quad 4. \int x^3 e^{-x^2} dx; \quad 5. \int \sin(\ln x) dx$$

Ответы:

$$1. 1/3x \sin 3x + 1/9 \cos 3x + C; \quad 2. x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C;$$

$$3. x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C; \quad 4. -1/2 e^{-x^2} (x^2 + 1) + C;$$

$$5. x/2(\sin \ln x - \cos \ln x) + C.$$

Домашнее задание

Найти неопределенный интеграл

$$1. \int x^3 \sqrt{4-3x^4} dx; \quad 2. \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx; \quad 3. \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}};$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9-2x^3}}; \quad 5. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

Ответы:

$$1. -1/8 \sqrt{(4-3x^4)^3} + C; \quad 2. 2/3 \sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C;$$

$$3. -1/2 \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} \right| + C; \quad 4. -1/4 \sqrt[3]{(9-2x^3)^2} + C;$$

$$5. C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x.$$

Найти неопределенный интеграл

$$6. \int \arcsin x dx; \quad 7. \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad 8. \int x e^{-7x} dx; \quad 9. \int \ln(1+x^2) dx; \quad 10. \int x 2^{3x} dx.$$