

**Первообразная. Неопределенный интеграл.
Простейшие приемы интегрирования**

Вопросы

1. Определение первообразной и неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Основные приемы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Метод почленного интегрирования. Метод подведения под знак дифференциала.
5. Метод подстановки.
6. Метод интегрирования по частям.
7. Интегрирование простейших дробей.
8. Интегрирование рациональных функций.
9. Интегрирование тригонометрических функций.
10. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций.
11. Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей.
12. О “неберущихся” интегралах.

Совокупность первообразных $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная, функция $f(x)$, $x \in (a, b)$, называется неопределенным интегралом функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы основных неопределенных интегралов приведем несколько примеров вычисления неопределенного интеграла.

1. *Непосредственное интегрирование функции.*

Задача нахождения неопределенных интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx.$$

Решение:

$$\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx = 4 \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^{5/3}}{5/3} + 2 \frac{x^{-2}}{-2} + x + C$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$$

Решение:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x-9)^9 dx.$$

Решение:

$$\int (2x-9)^9 dx = \frac{1}{2} \int (2x-7)^9 2dx = \frac{(2x-7)^{10}}{20} + C.$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \cos(7x-3)dx.$$

Решение:

$$\int \cos(7x-3)dx = \frac{1}{7} \int \cos(7x-3)d(7x-3) = \frac{1}{7} \sin(7x-3) + C.$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

Решение:

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C.$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \cos^2 3x dx$$

Решение:

$$\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx = 1/2 x + 1/12 \sin 6x + C$$

Пример 7. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x+3}{x+6} dx$$

Решение:

$$\int \frac{x+3}{x+6} dx = \int \frac{x+5-2}{x+5} dx = x - 2 \ln |x+5| + C.$$

Аудиторное задание

Найти указанные интегралы и результаты проверить дифференцированием.

$$1. \int \left(5x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{4} \right) dx;$$

$$2. \int \left(3 \sin x + 2^x 3^{2x} - \frac{1}{9+x^2} \right) dx;$$

$$3. \int \sqrt[7]{(5x+3)^3} dx;$$

$$4. \int \left(\sin 7x - e^{3-2x} + \frac{1}{\cos^2 4x} \right) dx;$$

$$5. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$$

$$6. \int (e^{2x} + e^{-2x}) dx;$$

$$7. \int \operatorname{ctg}^3 x dx;$$

$$8. \int \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9} dx;$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 7}$$

Домашнее задание

Найти неопределенный интеграл:

$$1 \int \cos 2x \sin 10x dx; \quad 2. \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx; \quad 3 \int \frac{x + 3}{x + 1} dx.$$

Найти указанные интегралы и результаты проверить дифференцированием:

$$1. \int (3x - \sqrt[7]{x^5} + 2 \sin x - 3) dx; \quad 2. \int (\sin 3x + x\sqrt{1 + x^2}) dx;$$
$$3. \int (x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x) dx; \quad 4. \int (x^{-2} + 7x^6 - \frac{1}{2\sqrt{x}}) dx.$$