Практическое занятие. Тема 6

Функция. Область определения функции. Предел функции

Вопросы

1. Числовая функция, свойства и способы ее задания.
2. Основные элементарные функции и их графики.
3. Предел последовательности функции при $n \to \infty$
4. Предел последовательности функции при $x \to \infty$.
5. Свойства предела.
6. Определение предела функции в точке. Основные теоремы о пределах.
7. Бесконечно малые функции и бесконечно большие функции.
8. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.
9. Первый замечательный предел и его свойства.
10. Второй замечательный предел и его свойства.
11. Непрерывность функции в точке и на плоскости. Виды разрывов функции.

Числовые множества. Определение и способы задания функций.

Совокупность рациональных Q и иррациональных чисел образует множество действительных (вещественных) чисел R. Между множеством точек прямой и множеством R всегда можно установить однозначное соответствие. Если это соответствие установлено, то прямую называют *числовой осью*. Совокупность всех чисел x, удовлетворяющих условию $a < x < b$ $(a \le x \le b)$, называется *интервалом (отрезком)* и обозначается $(a;b)$ $(|a;b|)$.

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a| = a$, если $a \ge 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Для любых действительных чисел a и b верно неравенство $|a+b| \le |a| + |b|$.

Если каждому элементу $x \in D$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y, то говорят, что задана функция $y = f(x)$, где x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Множество D называется *областью определения функции*, а множество значений, принимаемых функцией y, называется *областью ее значений (изменения)* и обозначается буквой E. В дальнейшем будем считать множества D и E числовыми, т.е. будем рассматривать числовые функции (если не оговорено противное). В качестве D и E могут быть взяты отрезок $|a,b|$, интервал $(a;b)$, полуинтервал $(a;b]$ или $[a;b)$, отдельные точки числовой оси, а также вся числовая ось $(-\infty;+\infty)$.

Основными способами задания функций являются: табличный, графический, аналитический. При аналитической записи функции $y = f(x)$ часто не указываются области D и E, но они естественным образом определяются из свойств функции $f(x)$.

Пример. Найти области определения и значений функции $y = \lg(4 - 3x - x^2)$.

Логарифмическая функция определена, если $4 - 3x - x^2 > 0$. Корни квадратного трехчлена: $x_1 = -4,\ x_2 = 1$. Записанное выше неравенство равносильно неравенству $-(x+4)(x-1) > 0$, что возможно при $x > 4$ и $x < 1$. Область D определения данной функции есть интервал $(-4;1)$. Так как в D $0 < 4 - 3x - x^2 \le 25/4$, то интервал $(-\infty; \lg(25/4))$ - область значения функции E.

Если функция $y = f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение области D на область E, то можно однозначно выразить x через $y: x = q(y)$. Последняя функция называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. Для функции $x = q(y)$ E является областью определения, а D - областью значений. Так как $q(f(x)) \equiv x$ и $f(q(y)) \equiv y$, то функции $y = f(x)$ и $x = q(y)$ - взаимно обратные. Обратную функцию $x = q(y)$ обычно переписывают в стандартном виде: $y = q(x)$, поменяв x и y местами. Взаимно обратными являются пары функций: $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$, $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, для которых области определения соответственно следующие: $x \in (-\infty;+\infty)$ и $x \in (-\infty;+\infty)$, $x \in (-\infty;+\infty)$ и $x \in (0;+\infty)$, $x \in (-\infty;+\infty)$ и $x \in (-1;+1)$.

Если функция $u = \varphi(x)$ определена на области D, G - область ее значений, функция $y = f(u)$ определена на области G, то функция $y = f(\varphi(x)) = F(x)$ называется *сложной функцией*, составленной из функции f и φ, или функцией f от функции φ. Функцию $y = f(\varphi(x))$ называют *композицией двух функций* $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Сложная функция может быть композицией большего числа функций: трех, четырех и т.д. Например, функция $y = \cos(x^2 + 1)$ – композиция двух функций $y = \cos u$ и $u = x^2 + 1$; функция $y = \lg(\sin 2^x)$ - композиция трех функций $y = \lg u$, $u = \sin \upsilon$, $\upsilon = 2^x$, а функция $y = \lg\left(\sin 2^{x^3}\right)$ – композиция четырех функций $y = \lg u$, $u = \sin \upsilon$, $\upsilon = 2^w$, $w = x^3$. Переменные величины u, υ, w называются *промежуточными аргументами*.

Функции вида $y = f(x)$ называются *явными*. Уравнение вида $F(xy) = 0$ также задает, вообще говоря, функциональную зависимость между x и y. В этом случае по определению y является неявной функцией x. Например, уравнение $y^3 + x^3 = 8$ определяет y как неявную функцию от x.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $y = f(x)$. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ симметричны относительно биссектрисы $x = y$.

К основным элементарным функциям относятся пять классов функций: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические.

Аудиторные занятия:

1. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$; б) $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x}$;

в) $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x$.

2. Представить сложные функции в виде композиции функций, являющихся основными элементарными функциями:

а) $y = 2^{\sin \sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\lg \sin x^3}$;

в) $y = tg\sqrt[5]{lx}$; г) $y = arctg\sqrt[3]{2^{x^4}}$.

3. Построить графики функций:

а) $y = (2x + 3)/(x - 1)$; б) $y = \left|3x + 4 - x^2\right|$;

в) $y = -2\sin(2x + 2)$; г) $y = xsix$.

Домашние задания:

1.Найти область определения функции $y = \lg\left(2^{3x} - 4\right)$.

2.Для функции $\begin{cases} x, & если \quad x \le 0 \\ x^2, & если \quad x > 0 \end{cases}$ найти обратную. Построить графики данной и найденной функции.

3.Найти область определения функции $y = \lg\left(-x^2 - 5x + 6\right)$.

4.Построить график функции $\begin{cases} 1 + x, & если \quad x < 0 \\ 2\sin x, & если \quad 0 \le x < \pi \\ x - \pi, & если \quad x \ge \pi \end{cases}$.

5.Найти область определения функции $y = 1/\sqrt{x^2 + x}$.

6.Для функции $\begin{cases} x - 2, & если \quad x < 1 \\ x^2 - 2, & если \quad x \ge 1 \end{cases}$ найти обратную. Построить графики данной и найденной функций.

Пределы последовательностей и функций. Раскрытие простейших неопределенностей.

Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n > N$, где N - целое, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Если A – предел последовательности $\{x_n\}$, то это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

<u>*Пример 1.*</u> Дана последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n+3}{n+1}\right\}$. Доказать, что ее предел A=2.

- Попытаемся доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|x_n - A| = \left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon .$$

Решив последнее неравенство, получим $n > 1/\varepsilon - 1$, следовательно, $N = [1/\varepsilon - 1] + 1$, где (α) - целая часть числа α. Таким образом, существует N, такое, что для любого $n > N$ выполняется $|x_n - 2| < \varepsilon$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *(в точке* $x = x_0$*),* если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если A - предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. В самой точке x_0 функция $f(x)$ может и не существовать ($f(x_0)$ не определена). Аналогично запись $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$ обозначает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что при $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ (в другой записи $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$), то он называется *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Пределы слева и справа называются односторонними. Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были раны, т.е. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

Справедливы следующие основные теоремы о пределах.

Теорема1. *Пусть существуют* $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)$.

Теорема2. *Пусть существуют* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

Если условия этих теорем не выполняются, то могут возникнуть неопределенности вида $\infty-\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ и др., которые в простейших случаях раскрываются с помощью алгебраических преобразований.

<u>Пример 2.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Чтобы раскрыть ее, приведем выражение в скобках к общему знаменателю. Получим $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-4}$, т.е. неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, которая легко раскрывается, если под знаком предела сократить дробь на общий множитель $x-2\neq 0$. В итоге исходный предел сводится к $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{1}{x+2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

<u>Пример 3.</u> Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, разделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x^3. Получим $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}$.

Знаменатель полученной дроби при $x\to\pm\infty$ не равен нулю, следовательно, можно применить теорему о пределе частного. Также применимы и другие теоремы о пределах, что в итоге приводит к равенству $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}2-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^3}}=2$.

Аудиторные занятия:

Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\left\{\dfrac{3n+5}{n-1}\right\}$ имеет предел *A=3*. Найти пределы указанных функций.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+4x^2+3x^2}{x^3-7x-10}$.

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+3}{x^2-3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x^2+10}{8-x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Домашние задания:

Вычислить пределы указанных функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$.

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$.