Методический материал
к практическому занятию 5

Элементы аналитической геометрии.

Плоскость и прямая в R^3

Определение. Плоскость – геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени относительно переменных x, y, z.

$Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ – уравнение плоскости в нормальном виде

Уравнение плоскости в отрезках.

Рассмотрим (1), если все $A, B, C \neq 0$, то: обе части на D

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, где $a = -\frac{D}{B}$; $b = -\frac{D}{B}$; $c = -\frac{D}{C}$. (3)- уравнение плоскости в отрезках.

Плоскость, проходящая через точку точку

$M_0(x_0, y_0, z_0)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ с нормальным вектором $\vec{N} = (A, B, C)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$- уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки

Расстояние от точки до плоскости: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x \\ y = y_0 + ta_y \\ z = z_0 + ta_z \end{cases}$$, где t – параметр. Это параметрическое уравнение прямой в пространстве.

$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$, где $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \neq 0$ - каноническое уравнение прямой.

В общем виде общее уравнение прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Пример 3. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями
3x + 3y + 2z – 15 = 0 и ***3x + 3y + 2z + 13 = 0.***

Для решении задачи находим любую точку принадлежащую на одной из плоскости, например считая ***y = z=*** 0 из уравнения первой плоскости находим, что ***x=5*** Тогда по формуле нахождения расстояния от данной точки $M_0(5,0,0)$ до второй плоскости находим ***d= 4.***

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P(1,0,2) перпендикулярно к двум плоскостям

2x – y + 3z – 1 = 0 и ***3x + 6y + 3z -5 = 0***
Так как коэффициенты плоскостей не пропорциональны, то они пересекаются, тогда направляющий вектор линий пересечения находим из векторного произведения нормалей двух плоскостей т.е.

$$\boldsymbol{s} = [\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 21\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}.$$

Тогда этот вектор будет нормалью искомой плоскости и по формуле (2) находим ***7x – y - 5z = 0.***

<u>Пример 5.</u> Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{\boldsymbol{x}-2}{5} = \frac{\boldsymbol{y}-3}{1} = \frac{\boldsymbol{z}+1}{2}$$ перпендикулярно к плоскости x+4y-3z+7=0.

Искомая плоскость проходить через точки прямой M_0(2,3,-1) и через направляющий вектор прямой ***s(5,1,2)*** и через нормали данной плоскости **n**(1,4,-3). Тогда из условия компланарности трех векторов **M_0M,** **s** и **n** находим

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}-2 & \boldsymbol{y}-3 & \boldsymbol{z}+1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$ и ***11x - 17y - 19z + 10 = 0.***