

Методический материал к практическому занятию 4

Элементы аналитической геометрии.

Линейные геометрические объекты. Прямые в \mathbb{R}^2 .

Различные формы уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние точки от прямой. Уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Определение 1. Прямая – геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени относительно переменных x, y . Известно уравнение прямой с угловым коэффициентом.

$$y = kx + b \quad (1)$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha, \quad b = OB.$$

$$Ax + By + C = 0, \text{ где } A^2 + B^2 \neq 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется уравнением прямой в общем виде.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом, равным числу k , проходящей через заданную точку (x_0, y_0) : $y - y_0 = k(x - x_0)$. (3)

Написать уравнение прямой, проходящей через заданные две точки. Предполагается, что эти точки разные (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \quad (5)$$

формулу угла между прямыми.

$$\text{Если прямые параллельны, } \omega = 0 \Rightarrow k_2 = k_1 \quad (6)$$

$$\text{Если прямые перпендикулярны, } \omega = 90^\circ \Rightarrow 1 + k_2 k_1 = 0, \quad k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad (7)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad - \text{ уравнение прямой в отрезках.} \quad (8)$$

Пусть $\vec{n} \perp l$, $|\vec{n}| = p$. $M(x, y) \in l$, тогда $np_{\vec{n}} OM = p$.

$$\text{Но } np_{\vec{n}} OM = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}, \text{ где } \vec{n}^\circ = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$
$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}^\circ = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p - \text{ нормальное уравнение прямой.} \quad (9)$$

Расстояние от точки до прямой

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin - p|.$$

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4, -3)$ и образующий с осями координат треугольник площадью 3.

Так как заданная точка лежит в IV четверти то искомая прямая должен отсекает отрицательную часть оси OY и положительную часть оси OX. Напишем уравнение на отрезках проходящую через данную точку.

$$\frac{x-4}{a} = \frac{y+3}{b}.$$

По условию задачи должна быть $|a \cdot b| = 2 \cdot 3 = 6$

Если мы подберем $a=2$ и $b=-3$, то получим прямую $3x + 2y = 6$ удовлетворяющей условие задачи. Такая прямая не одна.

Пример 2. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующий угол 45° с прямой $y=2x+5$.

Так как угол между прямыми 45° , то по формуле (17) записываем два уравнения с неизвестными k_1 и k_2 ; т. е.

$$1 = \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \quad \text{и} \quad 1 = \frac{2 - k_1}{1 + 2k_1}$$

Тогда уравнения прямой проходящей через начало координат и угловыми коэффициентами $k_2=-3$ и $k_1=1/3$ будут соответственно

$$y = -3x \quad \text{и} \quad y = 1/3x.$$