Методический материал к практическому занятию 3
Элементы векторной алгебры

Векторы и линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Вопросы

1.Векторы. Основные сведения о векторах.
2.Действия с векторами.
3.Векторное пространство. Линейная зависимость и независимость векторов.
4.Базис системы векторов.
5.Разложение вектора по базису.
6.Скалярное произведение векторов.
7.Векторное и смешанное произведение векторов.

Цель: Ознакомить с основными операциями, производимыми над векторами, восстановить навыки работы с векторами, полученными в школе.

План:

1) ***Векторы, их обозначения и виды;***
2) Линейные операции над векторами (умножения вектора на число свойства вектора;
3) Проекция вектора на ось.
4) Линейно зависимые и независимые вектора. Понятие базиса в R_3.
5) Скалярное произведение векторов, основные свойства.

Методический материал

1. **Векторы и линейные операции над векторами.**

Определение. Вектором называется упорядоченный набор чисел.

Над векторами вводятся следующие операции:

1. Сложение векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

2. Умножение векторов на число λ :

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

Складывать можно только вектора одной и той же размерности.
Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

А) ассоциативное: $(x + y) + z = x + (y + z)$,

Б) распределительное по отношению к умножению на число: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Есть отличия операций над векторами от операции над числами. Нельзя сравнивать какой из векторов больше, только для векторов одной и той же размерности можно говорить о равенстве или неравенстве этих векторов.

Определение 2. Система векторов $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ называется линейно независимой, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0 \quad ,$$

иначе система - линейно независимая.
Записи |**AB**| и **| a |** обозначают модули векторов **AB** и **a**.
Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой, и компланарными, если они параллельны одной плоскости.
Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.
Произведением вектора **a** и числа α называется вектор, обозначаемый $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{a}$. (или наоборот $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}$), модуль которого равен $|\boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{a}| = |\boldsymbol{\alpha}||\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора **a,** если $\alpha>0$, и противоположно ему, если $\alpha< 0$.

Координатами вектора **a** называются его проекции на оси координат O_x, O_y, O_z. Они обозначаются соответственно буквами x, y, z. $\mathbf{a} = (x, y, z)$.

Для равенства векторов необходимо достаточно, чтобы их соответствующие координаты были равны. Если $M_1(x_1\ y_1\ z_1)$, $M_2(x_2\ y_2\ z_2)$, то $\mathbf{M_1M_2} = (x_2\text{-}x_1,\ y_2\text{-}\ y_1,\ z_2\text{-}z_1)$.

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a_i}$ называется вектор **a**, определяемый по формуле $\mathbf{a} = \sum^n{}_{i=1}$, где λ_i – некоторые числа.

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам, по форме аналогичным свойствам умножения и сложения чисел. Например,
$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\ \mathbf{a},\ (\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\ \beta\mathbf{a},\ \alpha(\mathbf{a}+\ \mathbf{b}) = \alpha\ \mathbf{a}+\ \alpha\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}+(-1)\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = 0,\ 1\mathbf{a} = \mathbf{a},$
$\bar{\mathbf{o}}\mathbf{a} = \bar{\mathbf{o}}$ и т. д.

Если для системы n векторов $\mathbf{a_i}$ равенство

$$\sum^n{}_{i=1} \lambda_i\ \mathbf{a_i} = 0 \qquad (1)$$

верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется линейно независимой. Если же равенство (1) выполняется для λ_i, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов $\mathbf{a_i}$ называется линейно зависимой. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Три упорядочных линейно независимых вектора $\bar{\mathbf{e}}_1,\ \bar{\mathbf{e}}_2,\ \bar{\mathbf{e}}_3$ в пространстве называется базисом. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис. Любой вектор **a** в пространстве можно разложить по базису $\bar{\mathbf{e}}_1,\ \bar{\mathbf{e}}_2,\ \bar{\mathbf{e}}_3$, т. е. представить **a** в виде линейной комбинации базисных векторов: $\mathbf{a} = x\ \bar{\mathbf{e}}_1 + y\ \bar{\mathbf{e}}_2 + z\ \bar{\mathbf{e}}_3$, где x, y, z являются координатами вектора **a** в базисе $\bar{\mathbf{e}}_1,\ \bar{\mathbf{e}}_2,\ \bar{\mathbf{e}}_3$.

Базис называется ортонормированным, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис **i, j, k**, т. е. **i**(1, 0, 0)**,** **j**(0, 1, 0), **k**(0, 0, 1).
*Определение.*Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называется число, обозночаемое $\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\ \mathbf{a}\ |\ |\ \mathbf{b}\ |\ \mathrm{Cos}\ (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$, где $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$

обозначает меньший угол между направлениями векторов **a** и **b**. Отметим, что всегда $(0 \le \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} \le \pi)$.

Перечислим основные свойства скалярного произведения векторов:

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\ \mathbf{a};$
2. $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \cdot(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b});$
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c};$
4. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\ \mathbf{a}\ |\ \text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\ \text{пр}_{\mathbf{b}}|\ \mathbf{a}\ |;$
5. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\ \mathbf{a}\ |^2;$
6. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то в базисе (**i, j, k**):

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2+ y_1y_2 +z_1z_2$, $|\ \mathbf{a}\ | = \sqrt{}x_1{}^2+ y_1{}^2+ z_1{}^2$, $|\ \mathbf{b}\ | = \sqrt{}x_2{}^2+ y_2{}^2+ z_2{}^2$.

Обозначим через α, β, γ углы, которые образуют вектор $\mathbf{a}\ (x_1, y_1, z_1)$ с осями координат O_x, O_y, O_z соответственно (или, что то же самое, с векторами **i**, **j**, **k**). Тогда справедливы следующие формулы:

$\mathrm{Cos}\ \alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}/\ |\ \mathbf{a}\ | = x_1/\ (\sqrt{}x_1{}^2+ y_1{}^2+ z_1{}^2\ )$, $\mathrm{Cos}\ \beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}\ /\ |\ \mathbf{a}\ | = y_1/|\ \mathbf{a}\ |$,

$\mathrm{Cos}\ \gamma = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}\ /\ |\ \mathbf{a}\ | = z_1/|\ \mathbf{a}\ |$, $\mathrm{Cos}^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\beta + \mathrm{Cos}^2\,\gamma = 1$.

Величины Cos α, Cos β, Cos γ называются направляющими косинусами вектора **a**.

Работа A силы **F,** произведенная этой силой при перемещении тела на пути |S|, определяемой вектором **s**, вычисляется по формуле
$A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}= |\mathbf{F}|\ |\mathbf{S}|\cdot\mathrm{Cos}(\mathbf{F}\wedge\mathbf{s})$.
<u>Пример 1.</u> Вычислить работу равнодействующей **F** сил $\mathbf{F_1} = (3, -4, 5)$,
$\mathbf{F}_2 = (2, 1, -4)$, $\mathbf{F_3} = (-1, 6, 2)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4, 2, -3)$ в точку
$M_2(7, 4, 1)$.

*Решение***.** Так как $F=F_1+F_2+F_3$, $F=\mathbf{(4, 3, 3)}$, $M_1M_2=S=\mathbf{(3, 2, 4)}$,
то $A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}=4*3+3*2+3*4=30$.

2.Даны векторы a,b,c (рис.1). Изобразить на рисунке их линейную комбинацию $-2a + \frac{1}{3}b + 4c$.

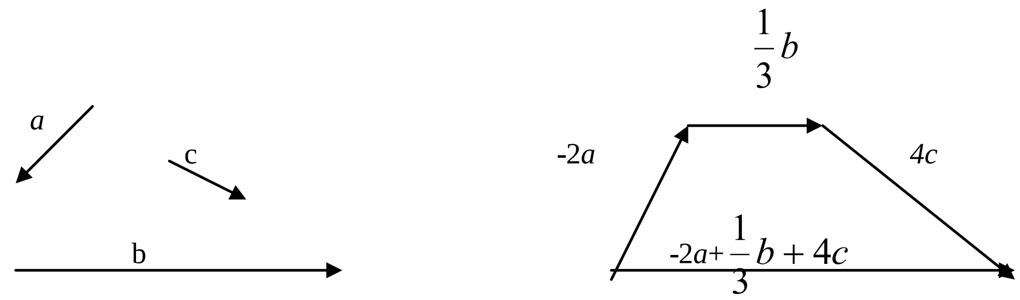


Рис.1

Выбираем на плоскости произвольную точку O и откладываем от нее вектор –2a . Затем от конца вектора –2a откладываем вектор $\frac{1}{3}$ и, наконец, строим вектор 4c, выходящий из конца вектора $\frac{1}{3}b$. Искомая линейная комбинация изображается вектором, замыкающим полученную ломаную, начало которого находится в точке O.

3.Векторы заданы в ортонормированном базисе **i, j, k** координатами: ***a*** = (2,-1,8), $\boldsymbol{e_1}$ = (1,2,3), $\boldsymbol{e_2}$ = (1,-1,-2),$\boldsymbol{e_3}$ = (1,-6,0). Убедиться, что тройка $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$ образует базис, и найти координаты вектора ***a*** в этом базисе.

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix},$$

составленный из координат векторов $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$, не равен 0, то векторы $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что

Δ = -18-4+3-12=-31 $\neq 0$.

Таким образом, тройка $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ - базис.

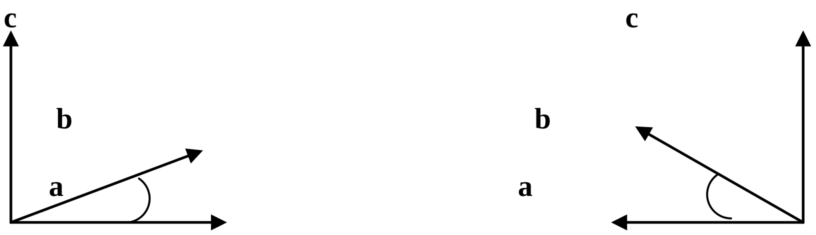
Обозначим координаты вектора ***a*** в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ через *x,y,z*. Тогда $\boldsymbol{a} = (x,y,z) = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}$. Так как по условию $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$,то из равенства $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2} + z\boldsymbol{e_3}$ следует, что $2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 3x\boldsymbol{k} + y\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k} + z\boldsymbol{i} - 6z\boldsymbol{j} = (x+y+z)\boldsymbol{i} + (2x-y-6z)\boldsymbol{j} + (3x-2y)\boldsymbol{k}$. Как видно, вектор в левой части полученного равенства равен вектору в правой его части, а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных *x, y, z* :

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 2x - y - 6z &= -1, \\ 3x - 2y &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Ее решение: *x* = 2, y = -1, z = 1. Итак, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$ = (2,-1,1).

2. Векторное, смешанное произведение векторов и их свойства.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов **a, b, c** с общим началом в точке O называется правой, если кратчайший поворот от вектора **a** к вектору **b** наблюдается из конца вектора **c** происходящим против движения часовой стрелки. В противном случае данная тройка называется левой (Рис.4).



Правый базис Левый базис

Рис. 4

Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c**, обозначаемый **c = a *b**, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. |**c**| = **| a |** |**b**| Sin **(a^b);**
2. **c ⊥ a, c ⊥ b;**
3. тройка **a, b, c** – правая.

Перечислим основные свойства векторного произведения векторов:

1. **a *b = - (b* a);**
2. **(λ a)*b= λ (a *b) = a *(λb);**
3. **a *(b+c) = a *b+ a *c;**
4. **a *b = 0,** если **a ∥ b;**
5. **| a *b|** = S, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, имеющих общее начало в точке φ. (см. рис. 5)
6.

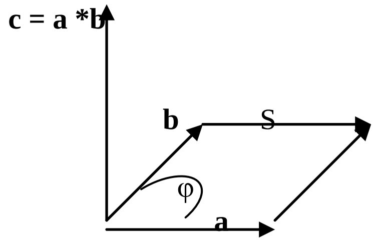


Рис.5

Если **a** =(x_1, y_1, z_1), **b** =(x_2, y_2, z_2), то векторное произведение **a * b** выражается через координаты данных векторов **a** и **b**, следующим образом:

$$\mathbf{a*b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Определение. Смешанным произведением векторов **a**, **b** и **c** называется число **(a *b) c.**

Перечислим основные свойства смешанного произведения векторов:

1. **(a*b)·c = a·(b*c)**, поэтому смешанное произведение можно обозначить проще **abc = (a*b)·c;**
2. **abc =bca = cab = -bac = -cba = - acb;**
3. геометрический смысл смешанного произведения векторов в следующем: **abc** = ± V, где V – объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, взятый со знаком «+» плюс, если тройка векторов **a, b, c** – правая, или со знаком «-» минус, если она левая.
4. **abc** = 0, если **a, b, c** компланарны.

Если **a** =(x_1, y_1, z_1), **b** =(x_2, y_2, z_2), **c** = (x_3, y_3, z_3), то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример 1. Даны векторы **a** = (1, 3, 1), **b** = (-2, 4, -1), **c** = (2, 4, -6). Требуется установить, компланарны ли данные векторы, в случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить объем построенного на параллелипипеда.

Решение: Вычислим

$$\mathbf{a\,bc} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78 \neq 0.$$

из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны, образуют левую тройку и V = 78.

Пример 2. Даны векторы **a** = λ**i**+2**j**+3**k**, **b** = 4**i** + λ**j**-4**k**. При каком значении λ эти векторы перпендикулярны?

Решение:

Находим скалярное произведение этих векторов **a·b** = 4λ +2λ -12; так как **a** ⊥ **b**, то **a·b** =0. отсюда 4λ+2λ-12 = 0; 6λ = 12; λ = 2.

Пример 3. Определить угол между векторами **a** = **i** + 2**j** + 3**k**,
b = 6**i** + 4**j** - 2**k**.

Решение:

Так как **a·b = | a | | b |** Cos **(a^b)** = **| a | | b |** Cos φ, то
Cosφ = **a·b/| a | | b |, a·b** = 6 + 8 - 6 = 8. | **a |** = √1+4+9 = √14,
| **b** | = √36+16+4 **=** √56 = 2√14, Cosφ = 8/√14*2√14 = 2/7, φ = arccos 2/7.

Пример 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** = 2**i** +3**j**, **b** = **i** -4**j**. Здесь **i** (1, 0), **j**(0, 1)- единичные векторы, взаимно перпендикулярны.

Решение:

a*b = (2**i** +3**j**)*(**i** -4**j**) = 2**i*** **i** +3**j*****i** -8 **i** ***j**-12**j*****j** = -3**i** ***j**-8**i** ***j** = -11**i** ***j** = **c**;
Sпар. = |**c**| = 11|**i*j**| = 11*1*1Sinπ /2 = 11.

Пример 5. Заданы векторы **a** = (0, 1, 0) және **b** = (2, -1, 3). Найти координаты векторного произведения этих векторов и длину.

Решение:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \; 0+0-2\text{к}-0-0 = 3\mathbf{i} - 2\text{к} = \mathbf{c}$$

c(3, 0, -2), |**c**| = | **a *b**| = √9+0+4 = √13.

Пример 6. Показать, что векторы **a** = 2 **i** +5**j**+7**k**, **b** = **i** +**j**-**k**, **c** = **i** +2**j**+2**k** компланарны.

Решение:

Если векторы **a**, **b**, **c** компланарны, то **a bc =** 0.

$$\mathbf{a\,bc} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4+14-5-7+4-10 = 0.$$

Векторы **a**, **b, c** компланарны.