Практическое занятие 2

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Методические материалы

1. **Матричный метод.**

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение матрицы –столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

и основную матрицу для коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ для которой } \det A \neq 0,$$

тогда для A существует единственная обратная матрица A^{-1}. Систему (1) можно записать в матричной форме $AX = B$, отсюда $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

имеем: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -8$, обратная матрица $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

Находим:

$$X = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 3(-1) - 7\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1(-1) - 5\cdot 1 \\ 4\cdot 3 - 2(-1) - 6\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x = 2, \quad y = 0, \quad z = -1$ - решение данной системы.

2. Формулы Крамера.

Если для системы (1) $\det A \neq 0$, то верны формулы Крамера для вычисления неизвестных $x_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$: $x_i = \frac{\Delta i}{\Delta}, \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$, где $\Delta = \det A$, а Δ_i являются определителями n-го порядками, которые получаются из Δ путем замены в нем i-го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Пример. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

Вычислим $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 - 21 = 79.$

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237$. Следовательно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{395}{79} = 5$,

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-158}{79} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

3. Метод последовательных исключений Жордана-Гаусса

Пример. С помощью метода Гаусса решить вопрос о совместности данной системы и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицы $\overline{B}$ и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right) \approx -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_4 = -1 \end{array}\right\}$$

из нее двигаясь снизу вверх, последовательно находим:

$$x_4 = -1, \quad x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1, \quad x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0,$$

$$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2.$$

Итак, система совместна, ее решение единственно $(r = n = 4)$: $x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1$. Проверкой легко убедиться в правильности найденного решения.