Практическое занятие 1.
Элементы линейной алгебры:
Определители и их свойства. Вычисление определителей.
Матрица и операции над ними

Вопросы

1.Определители 2-го, 3-го и n-го порядков (определение и их свойства).
2.Понятие матрицы. Виды матриц. Транспонирование матриц. Равенство матриц.

3.Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц.
4.Разложение определителя по элементам строки или столбца.
5.Матрица и порожденные ею определители. Особенная и неособенная квадратная матрица, присоединенная матрица.
6.Матрица, обратная данной, и алгоритм ее вычисления.
7.Понятие минора k-го порядка. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы. Пример.

Цель П.З. Добиться умения осознанно применять те или иные методы вычисления определителей любого порядка.
Уметь выполнять основные операции над матрицами. Научить вычислять обратную матрицу и ранг матрицы.
План П.З.:
1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков. Иллюстрация основных понятий.
2. Методы вычисления определителя. Метод понижения порядка. Приведение определителя к треугольному виду.
3. Операции над матрицами (сложение матрицы, умножение матрицы на число, умножение матриц).
4. Вычисление обратной матрицы.
5. Ранг матрицы.

Литература

1)А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть, Индивидуальные задания по высшей математике, - Мн.: Выш. Шк., 2000, 303 с.
2)Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, Ч.1: Учеб. Пособие для втузов. М.: Высш. Школа, 1999 - 304 с.

Методические материалы

1.1. Определители и их свойства.

Значение определителей 2–го порядка находится по следующему правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Примеры: 1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 17$, 2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 0 = -6$$

3) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 = 5 + 6 = 11$.

Замечание. Если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель, вообще говоря, тоже функции (но может быть и числом).

Например,

4) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$,

5) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

6) $\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ \frac{1}{2} & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

Вычисления определителя III-го порядка осуществляются по правилу треугольников (или по правилу Саррюса)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4(-1) \cdot (-3) - (-3) \cdot 6 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 = 71$$

Определителем n-го порядка называется число Δ, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка, вычерчиванием i-й строки и j-го столбца. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Для произвольного n $\qquad \Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k}$,

где $A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$, а миноры M_{1k} являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из Δ вычерчиванием первой строки и k-го столбца.

Например, для определителя III-го порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 7 & -2\\ 3 & -1 & 5\\ 5 & 0 & 7\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 0 & 7\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=4(-7)-7\cdot(21-25)-2\cdot 5=-10$$

для определителя IV-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 1 & -2\\ 1 & -3 & -1 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}4 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}0 & 4 & -2\\ 1 & -3 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{vmatrix}-$$

$$-0\cdot\begin{vmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}=-(4(-4)+3\cdot 4-2\cdot 0)-(0\cdot(-4)-4-2\cdot 5)+$$

$$+2\cdot(0(-12)-4\cdot 4-2\cdot 15)=-74$$

Рассмотрим основные методы вычисления определителей.

1.2. Метод понижения порядка.

Вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен.

Используя основные свойства определителей, вычисление определителя n-го порядка всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ все элементы, кроме одного, равными нулю. (Определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число λ).

Пример1. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}30 & -10 & 120 & 80\\ -5 & 3 & -34 & -23\\ 1 & 1 & 3 & -7\\ -9 & 2 & 8 & -15\end{vmatrix}$$

из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3,1,2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками. Тогда, имеем

$$\Delta=10\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 12 & 8\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 15 & 1\\ -3 & 0 & 32 & 1\end{vmatrix}$$

полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца

$$\Delta=10\cdot\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 4 & 15 & 1\\ -3 & 32 & 1\end{vmatrix}$$

Получили определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу треугольников или подобным же приемом свести к вычислению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку получаем:

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910.$$

1.3. Приведение определителя к треугольному виду.

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***определителем треугольного вида***. В этом случае определитель равен произведению элементов главной диагонали. Приведение любого определителя к треугольному виду всегда возможно.

Пример-2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

Выполним следующие операции. Пятый столбец определителя сложим в первым, этот же столбец умноженный на 3-со вторым, на 2- с третьим, на 8-с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 22 \cdot 1 = -5544$$

АЗ.: 1. С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Ответ: а) –36; б) 0; в) 87.

2. Методом понижения порядка вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 22198; б) 16.

1. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 48; б) 20.

2. Вычислить определители, предварительно упростив их:

а) $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & ax & 1 \\ x^2+y^2 & ay & 1 \\ x^2+y^2 & az & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) $a(x-y)(y-z)(x-z)$; б) 5.

1.4. Матрица и операции над ними

Сложение и вычитание матриц

Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности.

Если $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),\ (i=\overline{1,m});\quad j=\overline{1,n}\quad \Rightarrow A\pm B=C$,

где $C=(c_{ij})$ и $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$.

Например, пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}\quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad A+B=\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A и числа λ, обозначающим λA, называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, где a_{ij}-элементы матрицы A, т.е. при умножении матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число.

Например, пусть

$$\lambda=-2,\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow \lambda A=-2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Пусть $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n};\quad B=(b_{ij}),\ i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,p}\Rightarrow$

$C=A\cdot B=(c_{ij}),\ i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,p}$, где $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\cdot b_{kj}$.

Число строк матрицы $A\cdot B$ равно числу строк A, а число столбцов – числу столбцов B.

Пример 1. Найти $A \cdot B$ и BA, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + (-5)(-2) + 8 \cdot 3 & 4 \cdot 5 + (-5)(-3) + 8 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-1) + 3(-2) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 3(-3) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Далее находим,

$$BA = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 1 & (-1) \cdot (-5) + 5 \cdot 3 & (-1) \cdot 8 + 5(-1) \\ (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 1 & (-2)(-5) + (-3) \cdot 3 & (-2) \cdot 8 + (-3)(-1) \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix} \text{ и так, } AB \neq BA.$$

Пример 2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 5(-1) & 3(-5) + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $AB \neq BA$. (В этом случае матрицы называются не*перестановочными*).

Пример 3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Имеем $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $(AB)C = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$,

$$BC = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(BC) = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ т.е } (AB)C = A(BC).$$

1.5. Обратная матрица

Только для квадратных невырожденных матриц $A=\left(a_{ij}\right)$ $i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,n}\quad (\det\ A\neq 0)$ вводится понятие обратной матрицы A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример-1. Дана матрица А. Убедиться, что она невырожденная, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равенств $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, если

а) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Имеем $\det A=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0$. Находим алгебраические дополнения: $A_{11}=3,\quad A_{12}=-1,\quad A_{21}=-2,\quad A_{22}=-1$. Следовательно,

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},\quad AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^{-1}A.$$

б) Вычислим $\det A=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$ и алгебраические дополнения: $A_{11}=-2,\quad A_{12}=2,\quad A_{13}=4,\quad A_{21}=3,\quad A_{22}=1,\quad A_{23}=-2,$
$A_{31}=-7, A_{32}=-5,\quad A_{33}=-6$.

Тогда, $A^{-1}=\dfrac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix},\quad AA^{-1}=A^{-1}A=E.$

1.6. Ранг матрицы

Выделим в матрице A k строк и k столбцов, где k - число, меньшее или равное меньшему из чисел m и n. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется минором или определителем k порядка, порожденным матрицей A. Например для матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

при $k=2$ определители $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$ будут порожденными данной матрицей.

Рангом матрицы A (r_A) называется наибольшей порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля. Если равны нулю все определители порядка k, порожденных данной матрицей A, то $r_A < k$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определяет ранг исходной матрицы, т.к. полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножим третий столбец матрицы A на $\frac{1}{2}$. Далее полученную строку умножим на 2 и вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях.

Имеем

$$A \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$A \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $r_A = 3$.