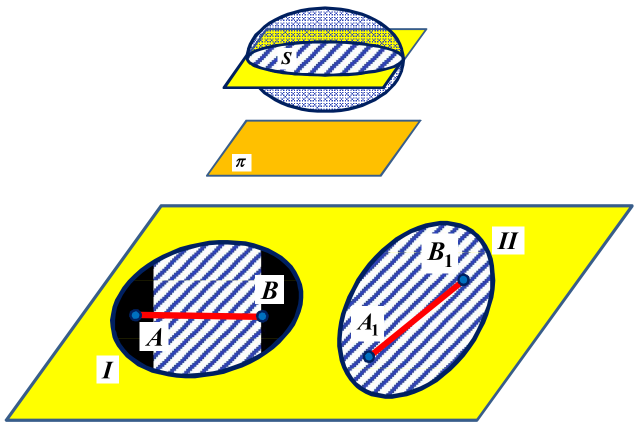
Лекция 8

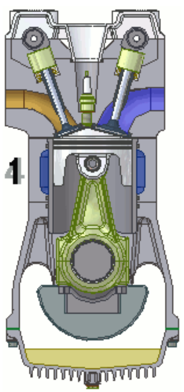
Плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела

Скорости и ускорения точек тела

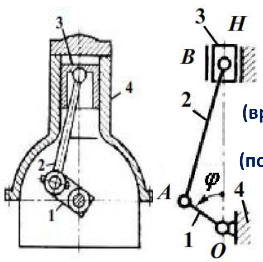
Плоская фигура, образованная сечением тела неподвижной плоскостью, во все время движения остаётся в этой плоскости



Плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела – движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости



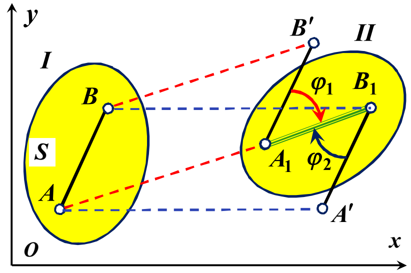
Кривошипно-шатунный механизм



ОА – кривошип (вращательное движение)
В – ползун (поступательное движение)
АВ – шатун (плоское движение)

Разложение плоскопараллельного движения твердого тела на поступательное и вращательное

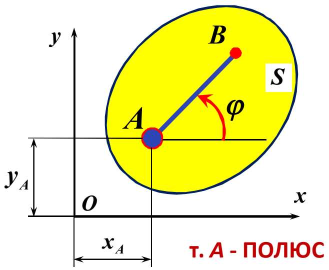
Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в её плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательное перемещение плоской фигуры вместе с произвольной точкой, называемой ПОЛЮСОМ и поворота вокруг полюса



ПОЛЮС (т. *A* или т. *B*) – точка плоской фигуры, определяющая положение этой фигуры вместе с углом поворота относительно неподвижных осей координат

Движение плоской фигуры в её плоскости в каждый момент времени можно рассматривать как совокупность ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И ВРАЩЕНИЯ

Уравнения движения плоской фигуры



$$x_A = f_1(t)$$

$$y_A = f_2(t)$$

$$\varphi = f_3(t)$$

т. *A* - ПОЛЮС

Кинематические характеристики тела при плоском движении:

$\vec{V}_A$ - скорость полюса

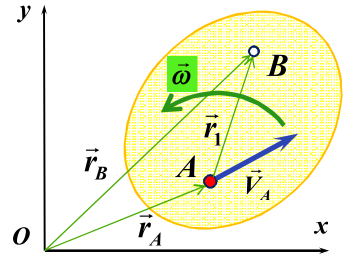
ω - угловая скорость

$\vec{a}_A$ - ускорение полюса

ε - угловое ускорение

Теорема о сложении скоростей точек тела

При плоском движении твердого тела скорость любой его точки равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в её вращении вокруг полюса



ω - угловая скорость

т. *A* - полюс

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_1$$

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_1$$

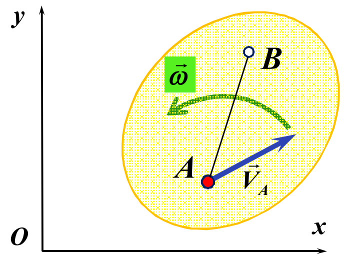
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$\vec{V}_A$ - скорость полюса

$\vec{V}_{BA}$ - скорость т. *B* вокруг полюса

Теорема о сложении скоростей точек тела

При плоском движении твердого тела скорость любой его точки равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в её вращении вокруг полюса



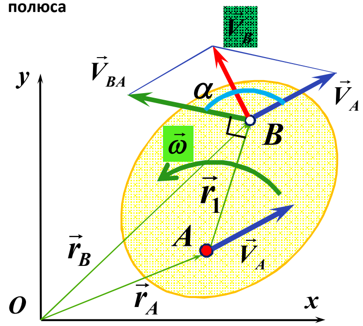
т. *A* - полюс

$\vec{V}_A$ - скорость полюса

ω - угловая скорость

Теорема о сложении скоростей точек тела

При плоском движении твердого тела скорость любой его точки равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в её вращении вокруг полюса



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$\vec{V}_A$ - скорость полюса

Определяется методами кинематики точки

$\vec{V}_{BA}$ - скорость т. *B* вокруг т. *A*

Определяется методами кинематики вращательного движения

$$\left|\vec{V}_{BA}\right| = |\omega| \cdot AB$$

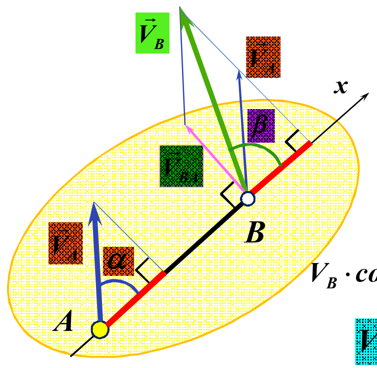
Модуль скорости точки *B*

$$\left|\vec{V}_B\right| = \sqrt{V_A^2 + V_{BA}^2 + 2V_A \cdot V_{BA} \cdot \cos\alpha}$$

$$\left|\vec{V}_B\right| = \sqrt{V_A^2 + V_{BA}^2} \quad (\alpha = 90^\circ)$$

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

При плоском движении проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой



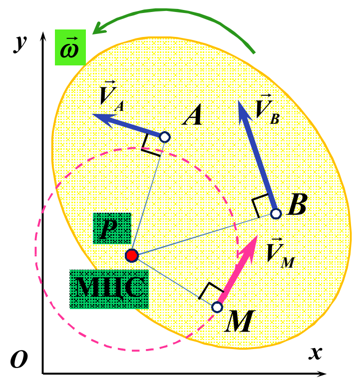
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

Спроецируем обе части равенства на ось x

$$V_B \cdot cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha + V_{BA} \underbrace{cos\,90^\circ}_{=0}$$

$$V_B \cdot cos\beta = V_A \cdot cos\alpha$$

При плоском движении для любой точки M



$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}$$

(т. P – полюс)

$$\vec{V}_P = 0$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{MP}$$

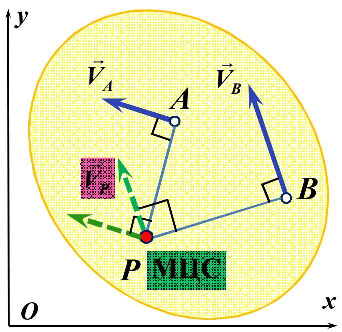
Скорость любой точки равна её вращательной скорости вокруг МЦС

$$V_M = V_{MP} = \omega \cdot MP$$

MP - кратчайшее расстояние от т. M до т. P

Теорема о существовании и единственности мгновенного центра скоростей (МЦС)

Если тело движется не поступательно $(\omega \neq 0)$, то в каждый момент времени существует точка и при том единственная, скорость которой равна нулю (МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ - МЦС).



Предположим, что $\vec{V}_P \neq 0$

Проекция скоростей на AP

$$\underbrace{\underbrace{V_A}_{\neq 0} \cdot \underbrace{cos\,90^\circ}_{=0}}_{=0} = V_P \cdot \underbrace{cos\,90^\circ}_{=0}$$

Проекция скоростей на BP

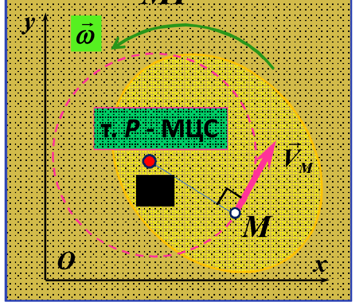
$$\underbrace{\underbrace{V_B}_{\neq 0} \cdot \underbrace{cos\,90^\circ}_{=0}}_{=0} = V_P \cdot \underbrace{cos\,90^\circ}_{=0}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_P = 0$$

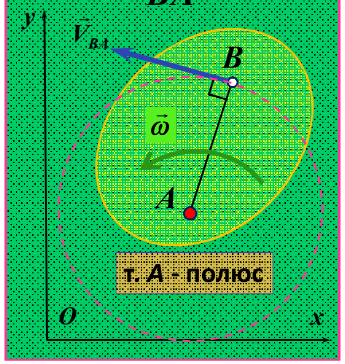
Определение мгновенной угловой скорости

1. $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

2. $\omega = \dfrac{V_M}{MP}$

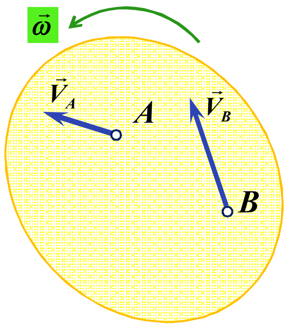


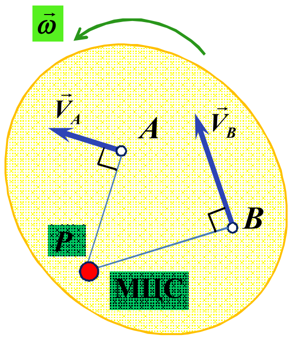
3. $\omega = \dfrac{V_{BA}}{BA}$



Способы определения положения МЦС

1. Если известны направления скоростей двух точек плоской фигуры

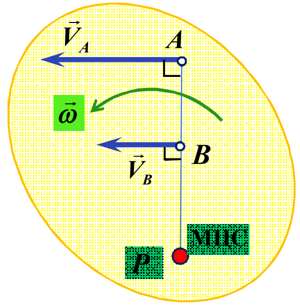




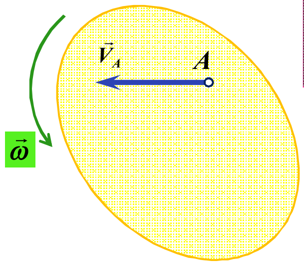
Частные случаи определения положения МЦС

1. Если скорости 2-х точек *A* и *B* плоской фигуры известны по модулю, параллельны между собой, перпендикулярны *AB*, а также известно, что модули скоростей точек фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, то концы скоростей этих точек лежат на прямой, проходящей через мгновенный центр скоростей. Пересечение этой прямой с прямой *AB* определяет положение мгновенного центра скоростей.

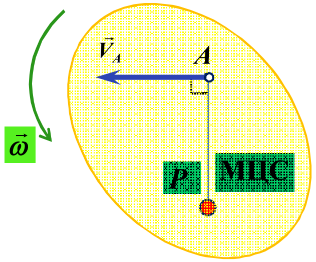
[redacted]



2. Если известны модуль и направление окружной скорости какой - либо точки и угловой скорости плоской фигуры

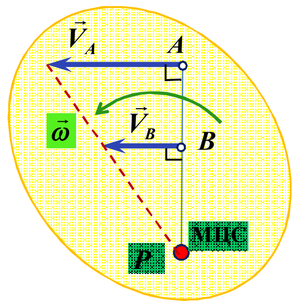


$$AP = \frac{V_A}{\omega}$$



1.1

$$\vec{V}_A \uparrow\uparrow \vec{V}_B$$
$$V_A \neq V_B$$
$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}$$



Угловая скорость

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

Концы скоростей точек *A* и *B* лежат на прямой, проходящей через мгновенный центр скоростей. Пересечение этой прямой с прямой *AB* определяет положение мгновенного центра скоростей.

1.2

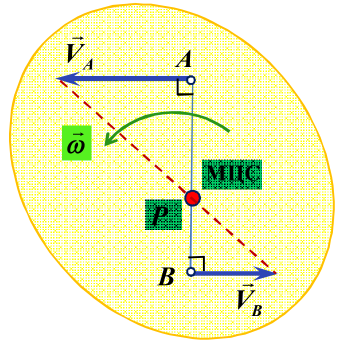
$\vec{V}_A \uparrow\downarrow \vec{V}_B$

$|\vec{V}_A| > |\vec{V}_B|,$

$|\vec{V}_A| < |\vec{V}_B|,$

$|\vec{V}_A| = |\vec{V}_B|$

$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}$



Угловая скорость

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

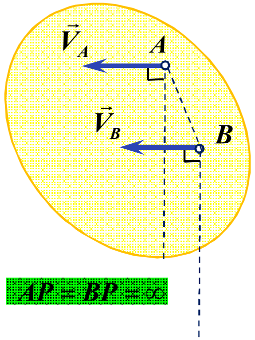
Концы скоростей точек *A* и *B* лежат на прямой, проходящей через мгновенный центр скоростей. Пересечение этой прямой с прямой *AB* определяет положение мгновенного центра скоростей.

2. Если скорости 2-х точек *A* и *B* плоской фигуры равны по модулю, параллельны между собой и направлены в одну сторону, то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности.

2.2

$\vec{V}_A \uparrow\uparrow \vec{V}_B$

$|\vec{V}_A| = |\vec{V}_B|$



$AP = BP = \infty$

Угловая скорость

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$$

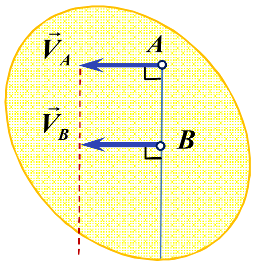
Мгновенное поступательное движение

2. Если скорости 2-х точек *A* и *B* плоской фигуры равны по модулю, параллельны между собой и направлены в одну сторону, то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности.

2.1

$\vec{V}_A \uparrow\uparrow \vec{V}_B$

$|\vec{V}_A| = |\vec{V}_B|$



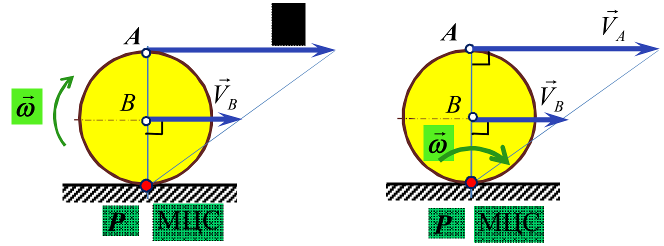
$AP = BP = \infty$

Угловая скорость

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$$

Мгновенное поступательное движение

3. Если тело катится по поверхности без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке касания тела с плоскостью.



$V_A = \omega \cdot AP$ $\quad$ $V_B = \omega \cdot BP$