Лекция 6

Введение в кинематику
Кинематика точки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА | **КИНЕМАТИКА** | **ДИНАМИКА**

СТАТИКА – раздел механики, в котором изучаются общие свойства сил и условия равновесия материальных тел, находящихся под действием этих сил.

КИНЕМАТИКА – раздел механики, в котором изучается механическое движение материальных тел с геометрической точки зрения, т.е. без учета их массы и действующих на них сил.

Основная задача кинематики –
установление закона движения тела, определение скорости и ускорения точки

Кинематические величины – путь, скорость, ускорение

Кинематика точки

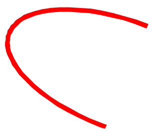
Основные кинематические характеристики точки

Движение – изменение положения рассматриваемой точки тела относительно выбранной системы отсчета (или другого тела)

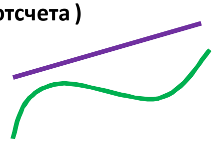
Тело отсчета - тело, с которым производится сравнение положения рассматриваемой точки

Система отсчета – система координат, неизменно связанная с телом отсчета

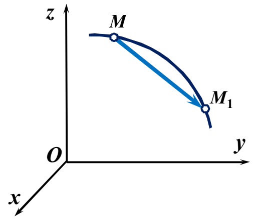
Траектория точки – геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета (непрерывная линия, которую описывает материальная точка, относительно выбранной системы отсчета)



Виды траекторий:
- прямолинейные
- криволинейные



Вектор перемещения $\overline{MM_1}$ - вектор, соединяющий точки на перемещении



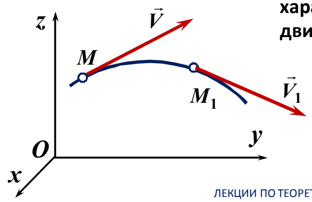
Средняя скорость точки – отношение вектора перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение совершено

$$V_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$$

Скорость точки в данный момент времени определяется как предел средней скорости при $\Delta t \to 0$

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$$

Скорость точки – векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета



Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории в сторону движения точки

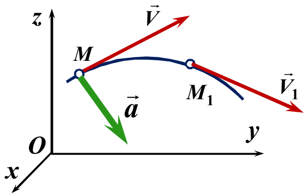
Ускорение точки – векторная величина, характеризующая изменение вектора скорости точки с течением времени

Среднее ускорение точки равно отношению вектора приращения скорости к промежутку времени, за которое это приращение произошло

$$a_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Ускорение точки в данный момент времени определяется как предел среднего ускорения точки при $\Delta t \to 0$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{V}'$$



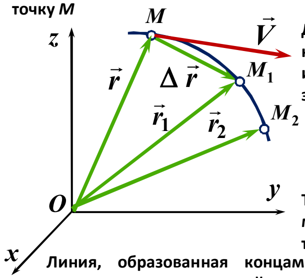
Вектор ускорения точки направлен в сторону вогнутости траектории, если она криволинейная

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ:

Векторный
Естественный
Координатный

ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Положение точки *M* в пространстве однозначно определяется заданием радиус–вектора, проведенного из некоторого неподвижного центра *O* в данную точку *M*



Для определения положения точки необходимо знать, как с течением времени изменяется радиус–вектор, т.е. должна быть задана функция

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

- закон движения точки в векторной форме

Траектория точки является геометрическим местом концов радиус-вектора движущейся точки

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется **гадографом** этого вектора

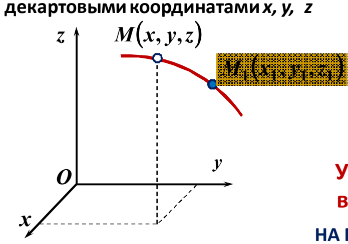
Т.о., траектория точки *M* является гадографом её радиус-вектора

Скорость и ускорения точки определяются по формулам:

$$\vec{V} = \vec{r}' \qquad \vec{a} = \vec{V}' = \vec{r}''$$

КОРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Положение точки *M* в системе отсчета *Oxyz* определяется тремя декартовыми координатами *x, y, z*

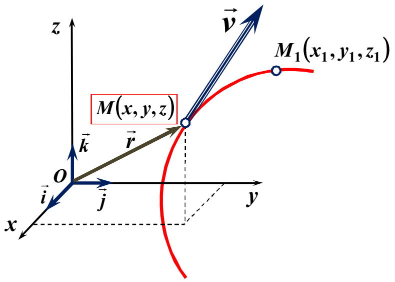


При движении точки *M* её координаты изменяются с течением времени, следовательно, координаты *x, y, z* движущейся т. *M* являются функциями от времени

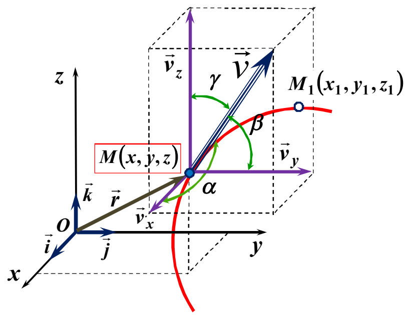
Уравнения движения точки в декартовых координатах:

	НА ПЛОСКОСТИ	В ПРОСТРАНСТВЕ
- уравнение траектории в **НЕЯВНОЙ** форме	$x = f_1(t)$ $y = f_2(t)$	$x = f_1(t)$ $y = f_2(t)$ $z = f_3(t)$
- уравнение траектории в **ЯВНОЙ** форме	$f(x, y) = 0$	$f(x, y, z) = 0$

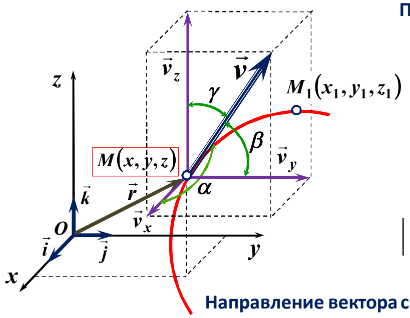
Скорость точки



Скорость точки



$$\vec{v} = \vec{r}' = \left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z\vec{k}\right)' = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$



Проекции вектора скорости на оси координат:

$$v_x = x'$$
$$v_y = y'$$
$$v_z = z'$$

Модуль скорости точки

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

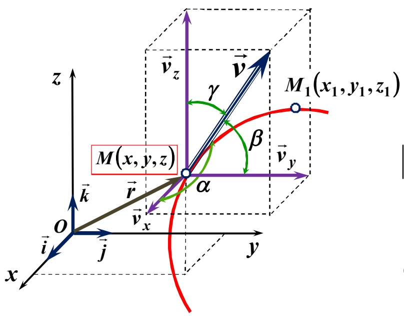
Направление вектора скорости

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{v}, \vec{i}\right) = \frac{v_x}{|v|}$$
$$\cos\beta = \cos\left(\vec{v}, \vec{j}\right) = \frac{v_y}{|v|}$$
$$\cos\gamma = \cos\left(\vec{v}, \vec{k}\right) = \frac{v_z}{|v|}$$

Ускорение точки

$$\vec{a} = \vec{v}' = \left(v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}\right)' = v_x' \cdot \vec{i} + v_y' \cdot \vec{j} + v_z' \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

Проекции вектора ускорения на оси координат:



$$a_x = v_x' = x''$$
$$a_y = v_y' = y''$$
$$a_z = v_z' = z''$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{a}, \vec{i}\right) = \frac{a_x}{|v|}$$
$$\cos\beta = \cos\left(\vec{a}, \vec{j}\right) = \frac{a_y}{|v|}$$
$$\cos\gamma = \cos\left(\vec{a}, \vec{k}\right) = \frac{a_z}{|v|}$$

Характер движения точки определяется по формуле

$$\frac{dV}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{V}$$

ЕСЛИ:

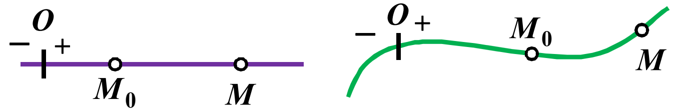
- движение ускоренное

$\frac{dV}{dt} = 0$ - движение равномерное

$\frac{dV}{dt} < 0$ - движение замедленное

ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

применяется в случае, когда заранее известна траектория движения точки



Положение движущейся точки на траектории определяется дуговой координатой

$\overset{\smile}{OM} = S$ - дуговая координата

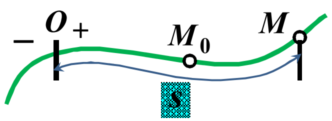
т. O – начало отсчета дуговой координаты

Дуговая координата – расстояние, отложенное по траектории от начала отсчета O

При движении т. М расстояние S от этой точки до неподвижной т. O изменяется с течением времени, т.е. дуговая координата является функцией времени

$S = f(t)$ - закон движения точки по траектории (уравнение движения точки)

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ОПРЕДЕЛЕНО, если известны: траектория точки, начало и направление отсчета дуговой координаты и уравнение движения точки



M_0 - положение точки в начальный момент времени t_0

M - положение точки в момент времени t

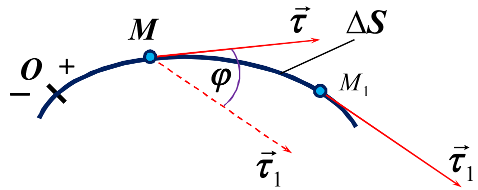
σ - длина пути, пройденного движущейся точкой

Пройденный путь при движении точки в одном направлении за промежуток времени $[0, t]$

$$\sigma = |M_0M| = |OM - OM_0| = |S - S_0|$$

Дуговая координата равна пройденному пути в том случае, если движение начинается из т. О и совершается в положительном направлении

$$[S] = [м] \qquad [\sigma] = [м]$$



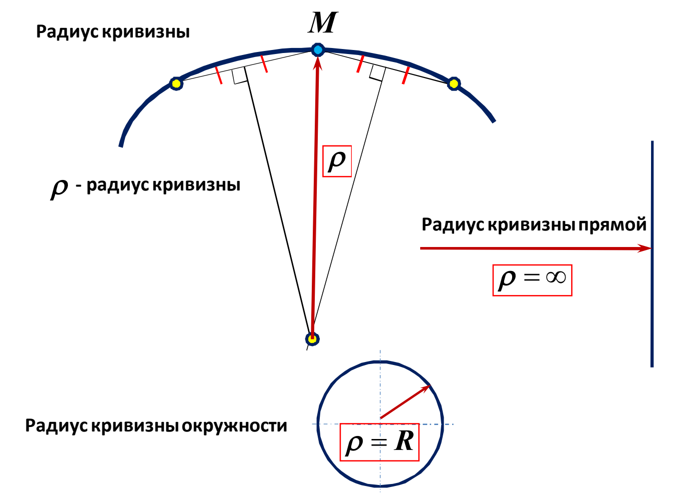
φ - угол смежности (угол между двумя соседними касательными)

Кривизна кривой в точке M – предел отношения угла смежности к приращению дуговой координаты

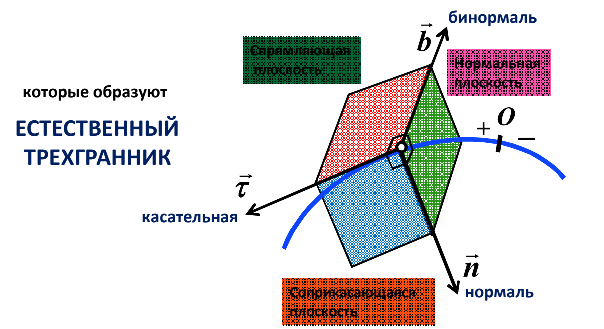
$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi}{\Delta S}$$

Радиус кривизны кривой – величина, обратная кривизне кривой

$$\boxed{\rho = \frac{1}{K}}$$

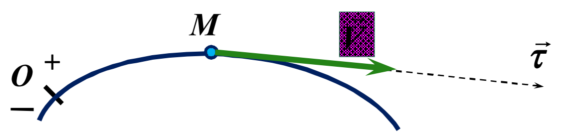


Для нахождения скорости и ускорения точки используют **ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ КООРДИНАТ**: касательную, нормаль и бинормаль (три взаимно перпендикулярные оси),

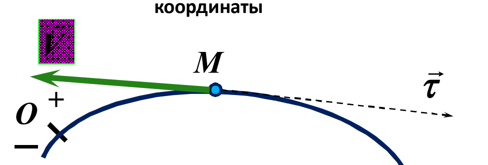


СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Если $V = S' > 0$ - точка движется в сторону **ВОЗРАСТАНИЯ** дуговой координаты

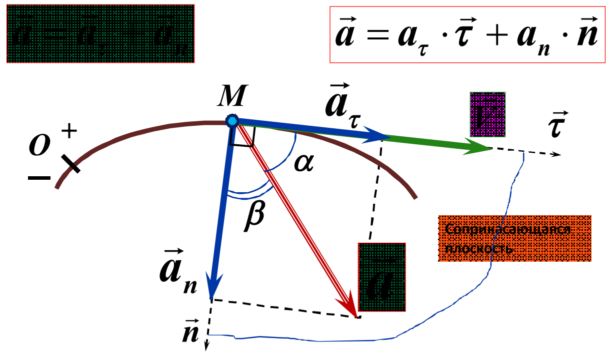


Если $V = S' < 0$ - точка движется в сторону **УБЫВАНИЯ** дуговой координаты



УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

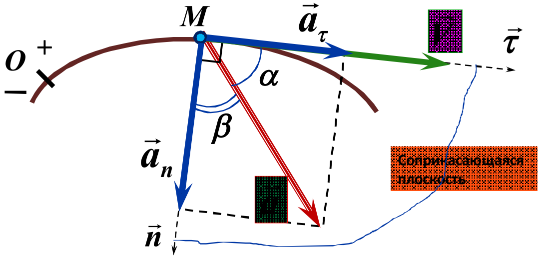
$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}$$



$\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau}$ - Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории

$\vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n}$ - Вектор нормального ускорения направлен вдоль главной нормали в сторону вогнутости кривой

Вектор полного ускорения точки [redacted] лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в строну вогнутости кривой



$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = S''$$

- проекция ускорения на касательную

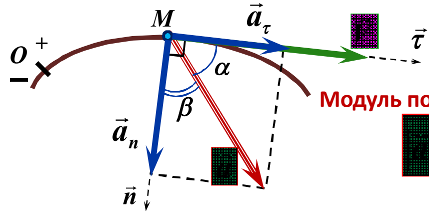
КАСАТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ характеризует изменение скорости по величине

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

- проекция ускорения на главную нормаль

НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ характеризует изменение скорости по направлению

Полное ускорение точки [redacted]

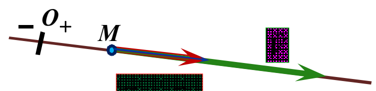


Модуль полного ускорения точки

[redacted]

$$tg\beta = \frac{|a_\tau|}{a_n}$$

Если точка движется по прямой



$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0$$

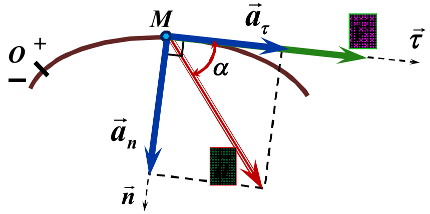
[redacted] [redacted] [redacted]

Признаки ускоренного и замедленного движения

1. Если **МОДУЛЬ СКОРОСТИ** с течением времени **ВОЗРАСТАЕТ**, то движение называется **УСКОРЕННЫМ**

[redacted]

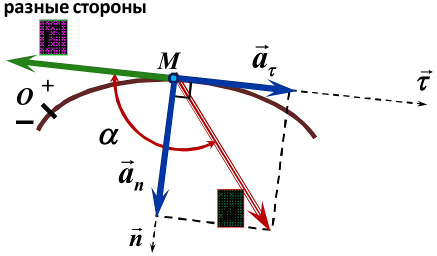
- Знаки скорости и ускорения одинаковы
- Вектора скорости и ускорения направлены в одну сторону



2. Если **МОДУЛЬ СКОРОСТИ** с течением времени **УМЕНЬШАЕТСЯ**, то движение называется **ЗАМЕДЛЕННЫМ**

$$1.\ V \cdot a_\tau < 0$$
$$2.\ \vec{V} \uparrow\downarrow \vec{a}_\tau$$
$$3.\ \alpha > \frac{\pi}{2}$$

- Знаки скорости и ускорения различны
- Вектора скорости и ускорения направлены в разные стороны

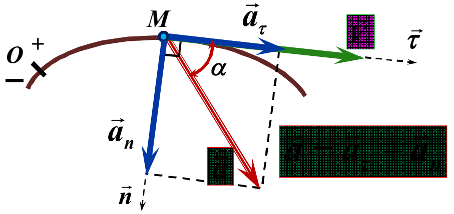


Если модуль скорости остается неизменным, то движение называется **РАВНОМЕРНЫМ** [redacted]

Классификация движений точки

1. Равнопеременное КРИВОЛИНЕЙНОЕ

$a_\tau = const$

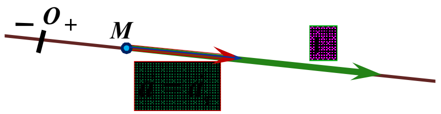


[redacted]

2. Равнопеременное ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ

$a_\tau = const$

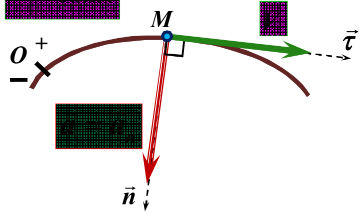
$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0$$



[redacted]

3. Равномерное КРИВОЛИНЕЙНОЕ

[redacted]



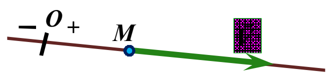
$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

[redacted]

4. Равномерное ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ

[redacted]



$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0$$

[redacted]