

## Лекция 2

# Классификация систем сил Условия равновесия систем сил

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### Аналитический способ задания силы

Сила аналитически задается её проекциями на оси координат, а направление определяется углами, которые она образует с осями координат

$$F_x = |\vec{F}| \cos \alpha$$

$$F_y = |\vec{F}| \cos \beta$$

$$F_z = |\vec{F}| \cos \gamma$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Формулы направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|}$$

$$\cos \beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}|}$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### Классификация систем сил

**1. Система сходящихся сил (с.с.с.)** – система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке

**1.1 Плоская система сходящихся сил**

**1.2 Пространственная система сходящихся сил**

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**2. Плоская система сил** – система сил, линии действия которых расположены в одной плоскости

**2.1 Произвольная плоская система сил (п.п.с.с.)**

**2.2 Плоская система параллельных сил**

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**3. Пространственная система сил** – система сил, линии действия которых расположены в пространстве

**3.1 Пространственная произвольная система сил**      **3.2 Пространственная система параллельных сил**

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Теорема о равнодействующей сходящейся системы сил**  
 Любая система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и приложенную в точке пересечения линий их действия

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Условия равновесия сходящейся системы сил**  
 Для равновесия твердого тела, находящегося под действием с.с.с. необходимо и достаточно, чтобы:

- векторная сумма всех сил была равна нулю (векторная форма равновесия)
- силовой многоугольник был замкнут (геометрическая форма равновесия)

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0 \quad \vec{R} = 0$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Условия равновесия сходящейся системы сил**  
 Для равновесия твердого тела, находящегося под действием с.с.с. необходимо и достаточно, чтобы:

- сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей была равна нулю (аналитическая форма равновесия)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky} = 0 \end{cases}$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

## Теория моментов сил

### Момент силы относительно точки и относительно оси

### Теорема Вариньона

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### Векторный и алгебраический моменты силы относительно точки

**Момент силы относительно точки** – вектор, приложенный в т.  $O$  перпендикулярно плоскости проходящей через т.  $O$  и линию действия силы и направленный в ту сторону, откуда вращение тела под действием данной силы происходит против хода часовой стрелки

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### ВЕКТОРНЫЙ МОМЕНТ СИЛЫ относительно точки

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма построенного на векторах сомножителях

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha$$

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### ВЕКТОРНЫЙ МОМЕНТ СИЛЫ

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha$$

$$h = |\vec{r}| \cdot \sin \alpha$$

### АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СИЛЫ относительно точки

$$|M_O(\vec{F})| = |\vec{F}| \cdot h$$

### ПРАВИЛО ЗНАКОВ !!!

$$M_O(\vec{F}) = \pm |\vec{F}| \cdot h$$

$$[M] = [H \cdot m]$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### СВОЙСТВА МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

1. Момент силы относительно точки не изменится, если точку приложения силы перенести вдоль линии её действия.
2. Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.
3. Момент силы относительно точки равен взятой со знаком «+» или «-» удвоенной площади треугольника.

$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$

$M_O(\vec{F}) = \pm |\vec{F}| \cdot h$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} |\vec{F}| \cdot h$

$2S_{\Delta AOB} = |\vec{F}| \cdot h$

$M_O(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta AOB}$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси – равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью

$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy})$

Момент силы относительно оси – равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью

$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}''$

$\vec{F}'' \parallel OZ \Rightarrow M_z(\vec{F}'') = 0$

$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}')$

$\vec{F}' = \vec{F}_{xy}$

$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy})$

$M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm |\vec{F}_{xy}| \cdot h$

$M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| \cdot h$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

### Порядок определения момента силы относительно оси:

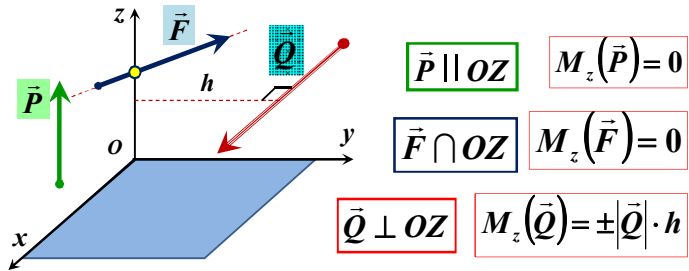
1. Провести плоскость, перпендикулярную оси.
2. Спроецировать силу на плоскость и найти величину проекции  $\vec{F}_{xy}$
3. Из точки пересечения оси с плоскостью опустить перпендикуляр на линию действия проекции силы, приняв его за плечо. Определить плечо  $h$
4. Перемножить  $\vec{F}_{xy}$  и  $h$  приписав произведению знак «+» или «-», учитывая правило знаков

$M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{F}_{xy}| \cdot h$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**СВОЙСТВА МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ:**

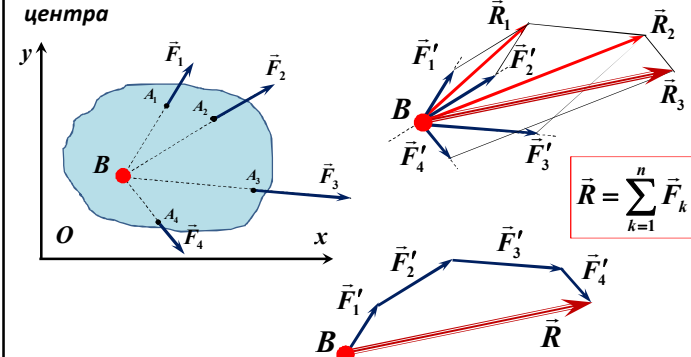
1. Если сила параллельна оси, то её момент равен нулю.
2. Если линия действия силы пересекает ось, то момент силы равен нулю.
3. Если сила перпендикулярна оси, то её момент равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью.



ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно центра**

Векторный момент равнодействующей сходящейся системы сил относительно любого центра равен геометрической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра



ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$

$\vec{M}_o(\vec{R}) = \vec{OB} \times \vec{R} = \vec{OB} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \vec{OB} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k)$

**Векторный момент**     $\vec{M}_o(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k)$

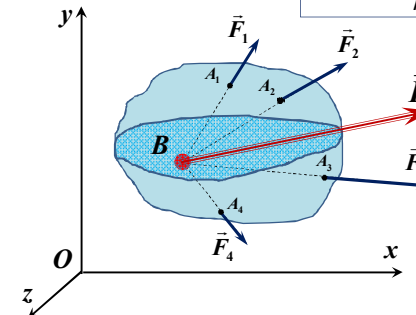
**Алгебраический момент**     $M_o(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k)$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Теорема Вариньона для пространственной системы сил**

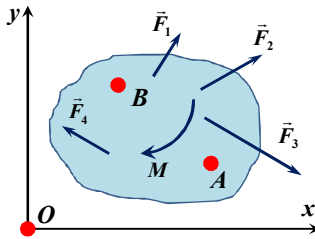
Момент равнодействующей относительно какой-либо оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси

$M_z(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k)$



ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Условия равновесия произвольной плоской системы сил (п.п.с.с.)**



$$I \begin{cases} \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases}$$

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием п.п.с.с. необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на две координатные оси равнялась нулю и сумма моментов всех сил относительно любой точки плоскости равнялась нулю

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Условия равновесия произвольной плоской системы сил**



$$I \begin{cases} \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases}$$

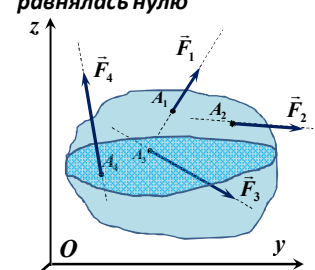
$$II \begin{cases} \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \quad AB \not\parallel OX$$

$$III \begin{cases} \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0 \end{cases}$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ

**Условия равновесия произвольной пространственной системы сил**

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на три координатные оси равнялась нулю и сумма моментов всех сил относительно трех координатных осей равнялась нулю



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0 \end{cases}$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ - ТВРИМ