Министерство образования и науки Республики Казахстан

ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Д. Серикбаева

Л.П. Есипенко
Г.А. Байзакова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и задания для самостоятельной работы студентов

Усть-Каменогорск
Өскемен
2011

УДК 531

Есипенко Л.П. Теоретическая механика: Методические указания и задания для самостоятельной работы студентов (СРС) специальностей 5B071700, 5B070500, 5B070700, 5B073100 и задания для курсовой работы (для студентов специальности 5B071700) обучающихся по кредитной системе / Л.П. Есипенко, Г.А. Байзакова. - Изд-во ВКГТУ. – Усть-Каменогорск, 2011. – 98с.

Методическое указание содержит исходные данные и варианты расчетно-графических (РГР) и курсовой работы, требования к их выполнению и примеры решения соответствующих задач.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – это наука о простейшей форме движения материи, об общих законах механического движения и равновесия материальных тел.

На базе теоретической механики студентами изучаются такие дисциплины, как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин. Знание законов механики необходимо для решения задач, связанных с проектированием и эксплуатацией все усложняющейся техники.

Для удобства изучения теоретическую механику подразделяют на статику, кинематику и динамику.

При решении задач механики рассматриваются следующие модели:

1. Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.
2. Механическая система – любая совокупность материальных точек (жидкая, газообразная среда, деформируемое тело).
3. Абсолютно твердое тело – тело, у которого расстояние между любыми его двумя точками остается неизменным. Это условие, принятое в теоретической механике, значительно упрощает решение задач о движении и равновесии.

В данном методическом пособии представлены расчетно-графические работы (РГР) по статике, кинематике, динамике, а так же курсовая работа, предусмотренные программой, выполняемые студентами самостоятельно в процессе изучения курса теоретической механики.

В их число входят задания:

С-1 «Определение реакций опор твердого тела»;

К-1 «Определения скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения»;

Д-1 «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил»;

Цель данного пособия заключается в оказании помощи студентам кредитной системы обучения при выполнении РГР. В пособии приведена краткая теория, исходные данные, варианты, содержание заданий и примеры выполнения заданий. Каждое задание содержит 30 вариантов. Типовые примеры расчета, охватывающие все РГР, имеются в рекомендуемой литературе [5].

По желанию успевающих студентов в РГР могут включаться (в индивидуальном порядке) специальные вопросы и задачи с элементами научных исследований.

1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

СРС по теоретической механике представляет самостоятельное выполнение нескольких РГР, состоящих из отдельных задач по основным разделам изучаемого курса, число которых зависит от специальности и количества кредитов (см. Sillabus). Каждая задача решается в соответствии с исходными данными индивидуального варианта, который определяет преподаватель.

Все РГР оцениваются в баллах после их защиты во внеаудиторное время, указанное преподавателем, путем собеседования, а так же на основании выполнения простейших примеров расчета и по результатам письменного теста. Приступать к решению той или иной задачи нужно после изучения курса по литературным источникам [1,2,3].

Каждая расчетно-графическая и курсовая работа оформляется на отдельных листах писчей бумаги (с одной стороны) формата А-4. К каждому заданию заполняется титульный лист с соблюдением требований ГОСТа. На титульном листе следует четко написать номер РГР и ее полное наименование с указанием: названия дисциплины; ФИО студента; шифр группы, ФИО преподавателя; наименование факультета и университета (ВКГТУ); номер варианта; календарный год и город (нижняя часть титульного листа).

Перед решением каждой задачи требуется : а) записать полностью ее условие с количественными данными; б) сделать чертеж в масштабе и указать на нем в буквах и цифрах все величины, используемые при расчетах.

Вычисления следует вести с точностью до двух значащих цифр после запятой и должны сопровождаться краткими, последовательными и грамотными пояснениями с приложением необходимого количества рисунков (чертежей, расчетных схем).

2. СТАТИКА

2.1 Краткие сведения из теории. Свободное и несвободное тело

Статика изучает условия равновесия тел под действием сил.

Одна из основных аксиом статики гласит, что несвободное твердое тело можно формально представить свободным, если мысленно отбросить механические связи и их действие на тело заменить реакциями связей.

Тела, ограничивающие перемещение других тел, называются связями. Силы, действующие от связей и препятствующие в перемещении, называются реакциями связи. Реакция связи всегда направлена с той стороны, куда нельзя перемещаться.

Условия равновесия составляют для свободных тел. Связи и реакции связей представлены в Приложении А, условия равновесия для различных систем сил представлены в Приложении Б.

Для составления условий равновесия необходимо составить проекции сил на оси и моменты сил относительно точки и оси.

2.2 Проекция силы на ось

Проекцией силы на ось называют произведение модуля силы $\overline{F}$ на косинус угла между линией действия силы и положительным направлением оси (рисунок 1).

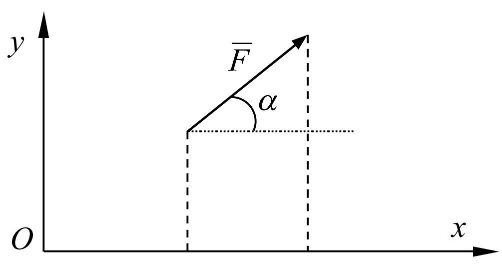


Рисунок 1

Если этот угол острый, - проекция положительна, если тупой, - отрицательна, а если сила перпендикулярна оси, - ее проекция на ось равна нулю.

2.3 Момент силы относительно точки и оси

Вращательный эффект действия силы на тело характеризуется ее моментом.

Если линия действия сил, действующих на тело, лежат в одной плоскости, то момент силы относительно точки – алгебраический.

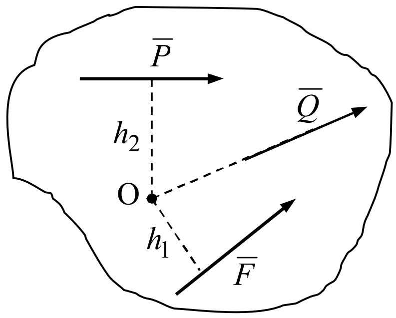


Рисунок 2

Алгебраический момент силы относительно точки – это скалярная величина, равная взятому со знаком «+» или «-» произведению модуля силы на ее плечо.

Плечо – это перпендикуляр, опущенный из моментной точки на линию действия силы.

Если сила стремится вращать тело вокруг моментной точки против хода часовой стрелки, принимаем знак «+», если по часовой стрелке – знак «-». Если линия действия силы проходит через моментную точку, то момент этой силы равен нулю. Для рисунка 2:

$$M_0\left(\overline{P}\right) = -P \cdot h_2; \quad M_0\left(\overline{F}\right) = F \cdot h_1; \quad M_0\left(\overline{Q}\right) = 0. \tag{1}$$

Для пространственной системы сил вводится понятие векторного момента сил относительно точки.

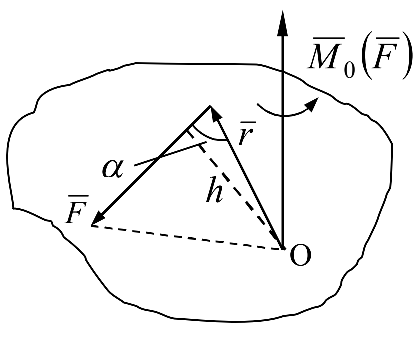


Рисунок 3

Момент силы относительно точки – это вектор, приложенный в моментной точке, равный векторному произведению радиуса-вектора на вектор силы:

$$\overline{M}_0\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F}. \tag{2}$$

Радиус-вектор $\overline{r}$ соединяет моментную точку с точкой приложения силы. По модулю этот вектор равен:

$$M_0(\overline{F}) = |\overline{r}| \cdot |\overline{F}| \sin(\overline{r}, \overline{F}) = r \cdot F \sin\alpha = F \cdot h. \tag{3}$$

Направлен этот вектор перпендикулярно плоскости, проведенной через моментную точку и вектор силы.

При решении задач удобнее рассматривать проекции векторного момента силы относительно точки на оси координат, которые называются моментами силы относительно координатных осей.

Момент силы $\overline{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z относительно точки O, пересечения этой оси с плоскостью.

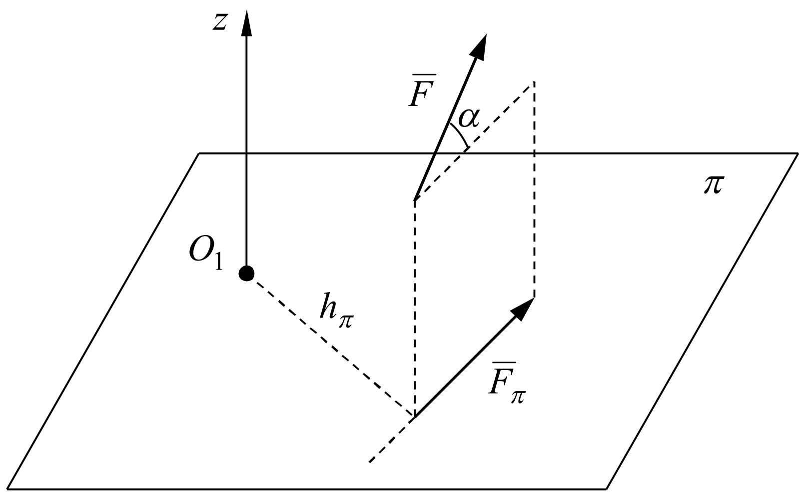


Рисунок 4

$$M_z(\overline{F}) = \pm(F_\pi) \cdot h_\pi. \tag{4}$$

Свойства момента силы относительно оси.

1. $M_z(\overline{F})$ не изменится, если точку приложения силы перенести вдоль линии действия.
2. Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы параллельна или пересекает ось, т.е. если сила и ось лежат в одной плоскости.
3. Если сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси, то ее момент относительно оси равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью.

Правило вычисления момента силы относительно оси:

1. В любом месте проводим плоскость, перпендикулярную данной оси;
2. проецируем силу на проведенную плоскость;
3. находим точку пересечения оси с плоскостью;

4. вычисляем алгебраический момент проекции на плоскость относительно точки пересечения оси с плоскостью.

При решении задач удобно пользоваться методом разложения силы на составляющие, а затем применить теорему Вариньона:

Если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра (оси) равен сумме моментов составляющих относительно того же центра.

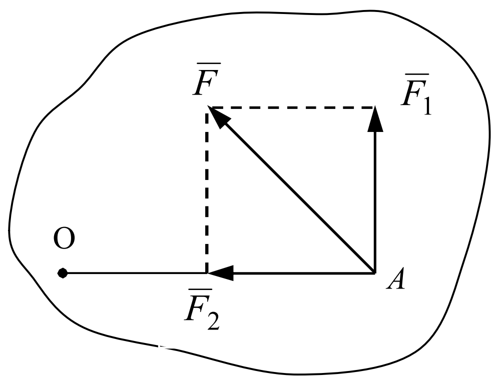


Рисунок 5

$$M_0\left(\overline{F}\right)=M_0\left(\overline{F}_1\right)+M_0\left(\overline{F}_2\right).$$

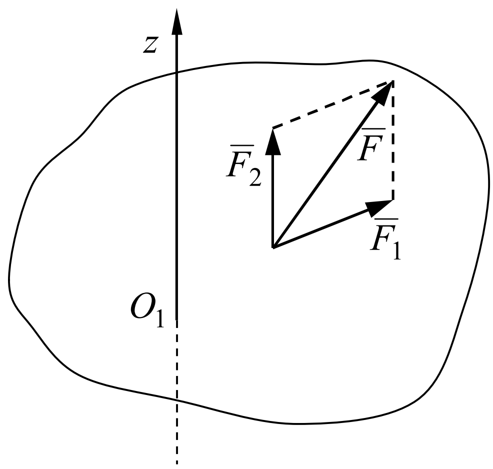


Рисунок 6

$$M_z\left(\overline{F}\right)=M_z\left(\overline{F}_1\right)+M_z\left(\overline{F}_2\right).$$

2.4 Пара сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил.

Плоскость, в которой расположена пара сил, называется *плоскостью действия пары сил.*

Кратчайшее расстояние между линиями действия пары сил называется *плечом пары сил.*

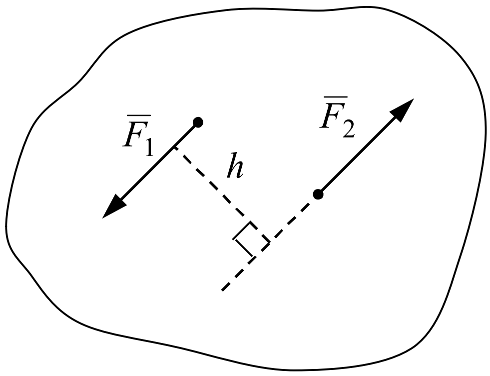


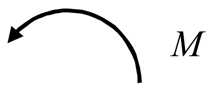
Рисунок 7

При составлении уравнений проекций сил на оси координат сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

Вращательный эффект действия пары сил на тело для плоской системы сил оценивается алгебраическим моментом пары.

Алгебраический момент пары сил – это скалярная величина, равная взятому со знаком «+» или «-» произведению модуля одной из сил пары на ее плечо. Знак «+» берется в том случае, если пара пытается повернуть тело против часовой стрелки, и «-», если по часовой стрелке.

Действие пары сил на тело не изменится, если силы, образующие пару, переносить в плоскости действия пары сил, повернуть, изменить модули сил пары и ее плечо, сохраняя неизменным ее алгебраический момент. Поэтому пару сил в дальнейшем будем обозначать так:



Для пространственной системы сил пользуются векторным моментом пары:

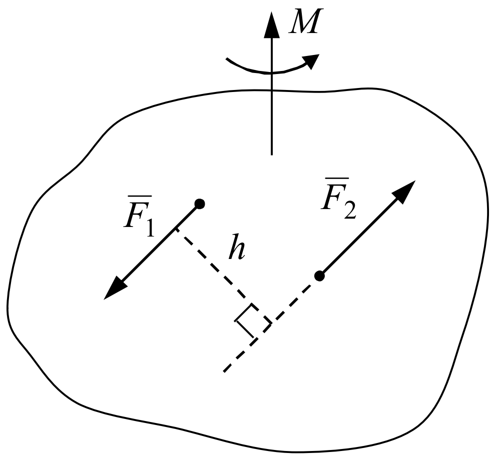


Рисунок 8

Векторным моментом пары сил называется свободный вектор, перпендикулярный плоскости действия пары сил, направленный так, чтобы глядя ему навстречу видеть стремление пары повернуть тело против хода часовой стрелки и равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на ее плечо.

При составлении уравнений моментов относительно осей используется свойство пары сил:

Сумма моментов сил, образующих пару, относительно любой оси, равна проекции на эту ось векторного момента пары.

2.5 Задание С-1. Определение реакций опор твердого тела

На схемах (Рисунок 9-11) изображен брус, ось которого – ломаная линия. Найти реакции опор конструкции. Нагрузка указана в таблице 1.

Таблица 1

№ варианта (Рис. 11-13)	P, $кН$	M, $кН \cdot м$	q, $\frac{кН}{м}$		№ варианта (Рис.9-11)	P, $кН$	M, $кН \cdot м$	q, $\frac{кН}{м}$
1	10	6	2		16	12	6	2
2	20	5	4		17	20	4	3
3	15	8	1		18	14	4	2
4	5	2	1		19	16	6	2
5	10	5	2		20	10	5	4
6	6	2	1		21	20	10	2
7	2	4	2		22	6	10	1
8	20	10	4		23	10	4	2
9	10	6	2		24	4	3	1
10	4	2	2		25	10	5	2
11	4	10	1		26	20	5	1
12	10	5	2		27	10	6	2
13	20	12	2		28	20	10	2
14	15	4	3		29	25	15	2
15	10	5	2		30	20	10	2

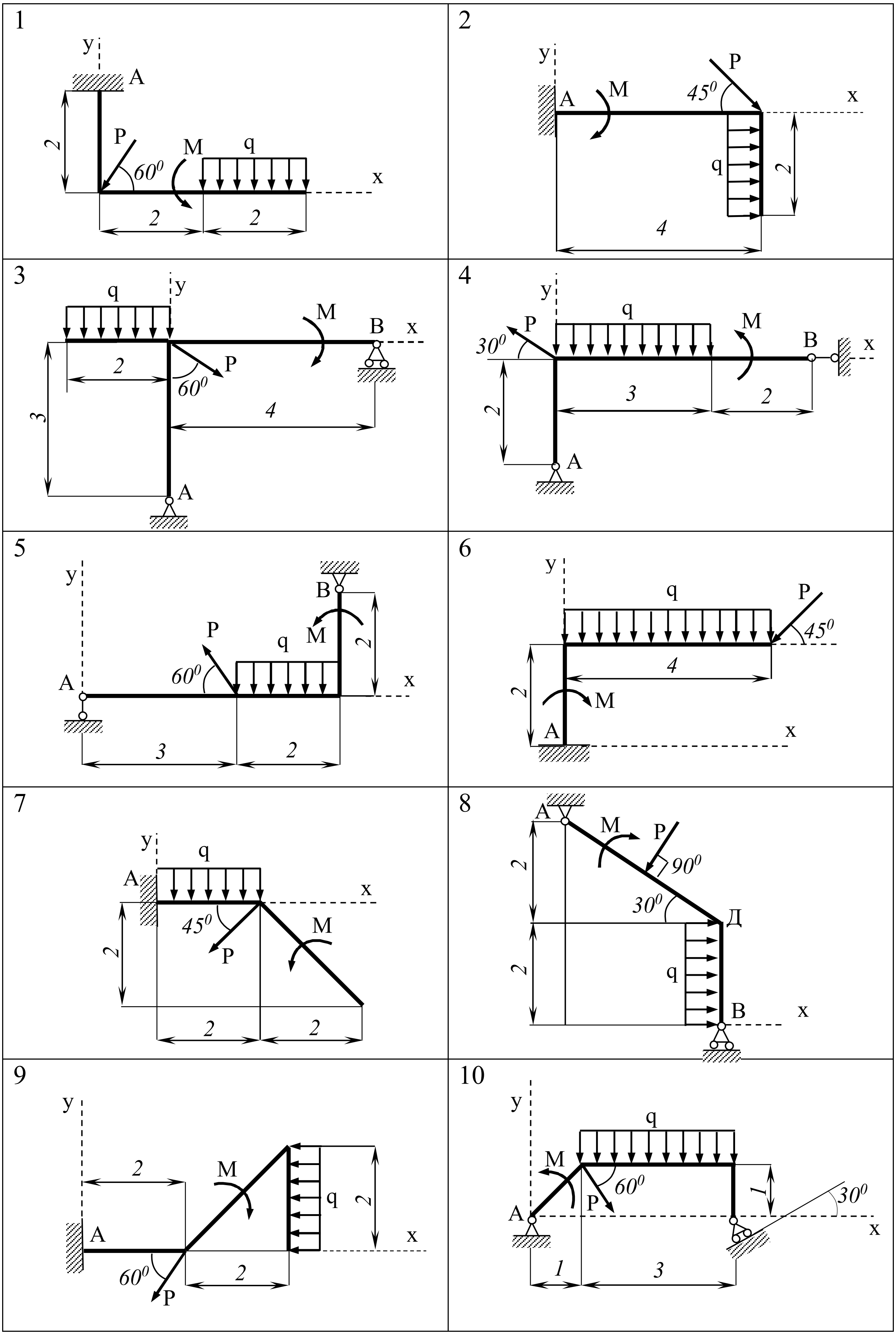

1
y
A
2
P
60⁰
M
q
x
2
2
2
y
A
M
P
45⁰
x
q
2
4
3
q
y
M
B
x
2
P
60⁰
4
3
A
4
y
P
q
M
30⁰
B
x
2
3
2
A
5
y
B
P
M
q
2
A
60⁰
x
3
2
6
y
q
P
45⁰
4
2
M
A
x
7
y
q
A
x
45⁰
M
2
P
2
2
8
A
M
P
2
90⁰
30⁰
Д
2
q
B
x
9
y
2
M
q
2
A
x
60⁰
2
P
10
y
q
M
60⁰
1
30⁰
A
P
x
1
3

Рисунок 9

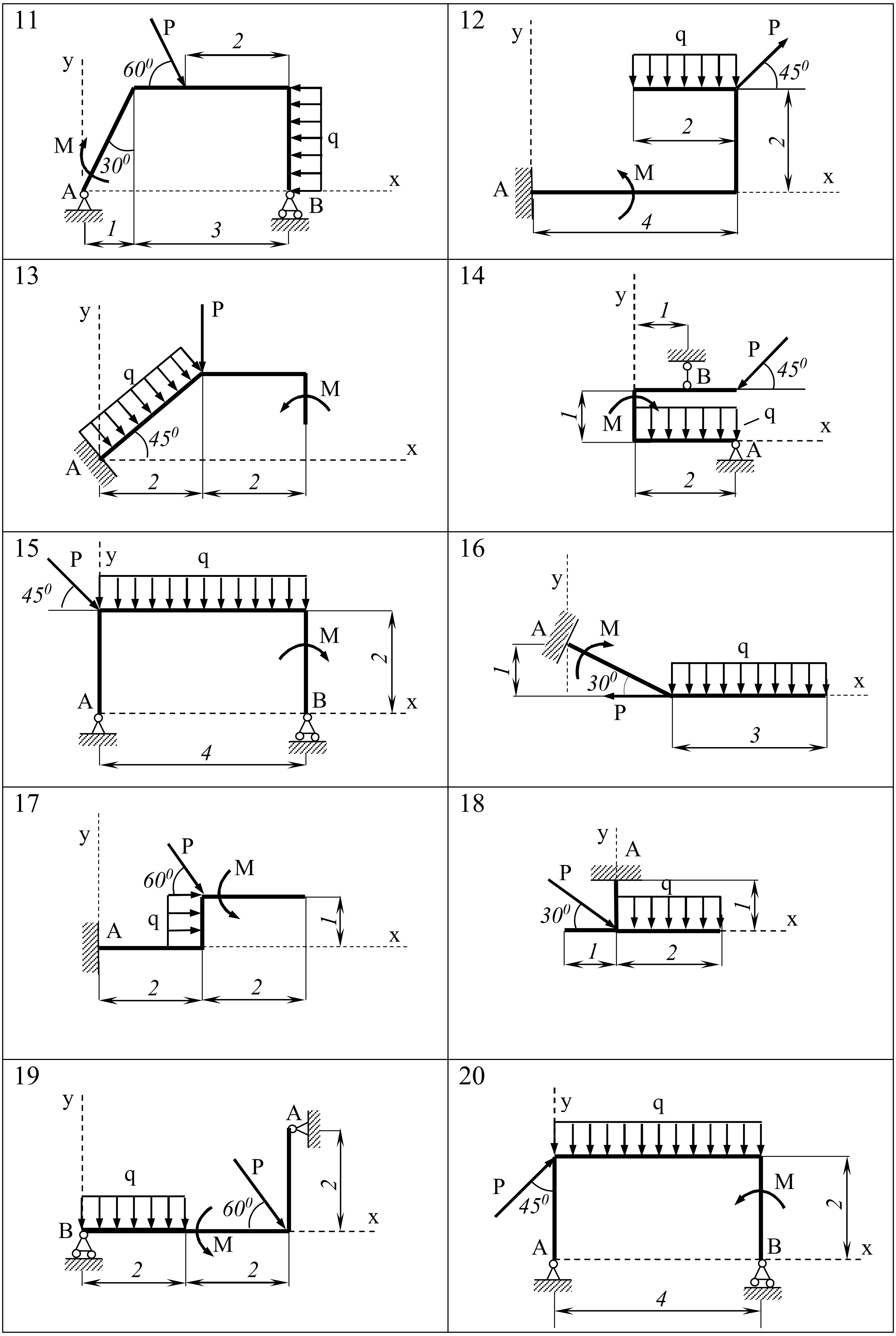

11
P
60⁰
2
y
M
30⁰
q
A
x
B
1
3
12
y
q
P
45⁰
2
2
M
A
x
4
13
y
P
q
M
45⁰
A
x
2
2
14
y
1
P
B
45⁰
1
M
q
x
A
2
15
P
y
q
45⁰
M
2
A
B
x
4
16
y
A
M
q
1
30⁰
x
P
3
17
y
P
M
60⁰
q
1
A
x
2
2
18
y
A
P
q
30⁰
1
x
1
2
19
y
A
q
P
2
60⁰
x
B
M
2
2
20
y
q
P
M
45⁰
2
A
B
x
4

Рисунок 10

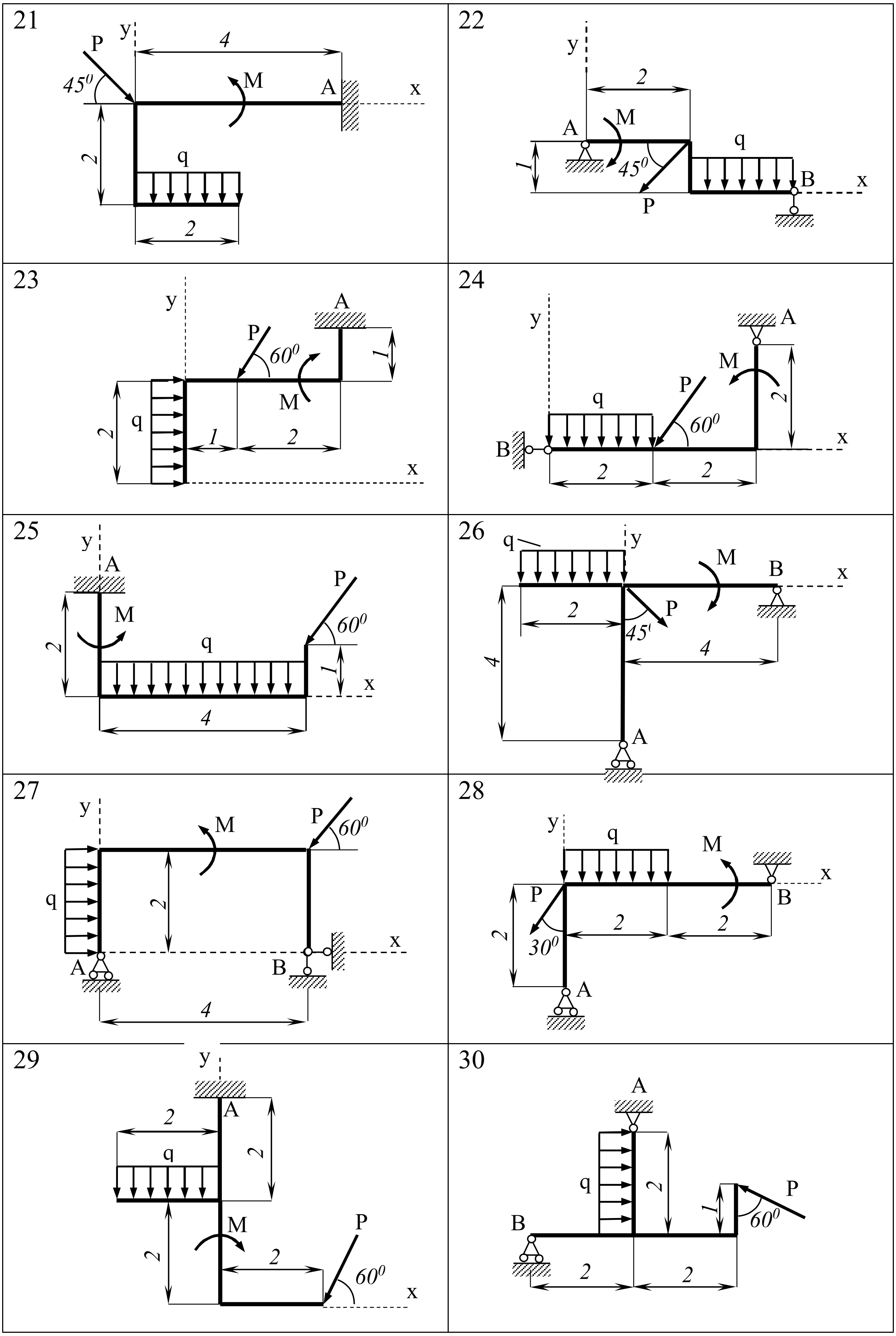

21
y
P
4
45⁰
M
A
x
2
q
2
22
y
2
A
M
q
1
45⁰
B
x
P
23
y
A
P
60⁰
1
M
2
q
1
2
x
24
y
A
M
P
2
q
60⁰
x
B
2
2
25
y
A
P
M
60⁰
2
q
1
x
4
26
q
y
M
B
x
2
P
45⁰
4
4
A
27
y
M
P
60⁰
q
2
x
A
B
4
28
y
q
M
x
P
B
2
2
2
30⁰
A
29
y
A
2
2
q
M
P
2
2
60⁰
x
30
A
q
2
P
1
B
60⁰
2
2

Рисунок 11

2.6 Пример выполнения задания С-1

Схема конструкции изображена на рисунке 12. Данные для вычисления: $G = 10 кН$, $P = 5 кН$, $M = 8 кН \cdot м$, $q = 0{,}5 \, {кН}/{м}$, $\alpha = 30^0$. Размеры на рисунке указаны в *м*. Определить реакцию опоры *A* и реакцию стержня *CD*.

<u>Решение:</u>

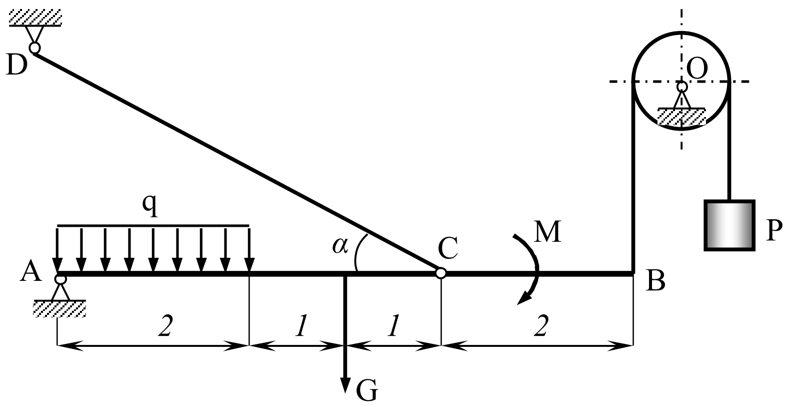


Рисунок 12

Рассмотрим равновесие балки *AB*. Отбрасываем связи: шарнирно-неподвижную опору *A*, невесомый стержень *CD* и нить.

Действие связей на тело заменяем их реакциями (Рисунок 14).

Так как направление реакций шарнирно-неподвижной опоры *A* неизвестно, то определяем ее составляющие $\overline{x}_A$, $\overline{y}_A$. Реакцию стержня $\overline{S}_{CD}$ направляем вдоль стержня. Равномерно-распределенную нагрузку интенсивности q заменяем сосредоточенной силой Q, равной:

$$Q = l \cdot q = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \;\; кН,$$

и приложенной в центре тяжести эпюры этой нагрузки.

Для нахождения реакции нити рассмотрим равновесие системы тел: груз, нить и блок (Рисунок 13), на которую действуют силы $\overline{P}$, $\overline{T}'$.

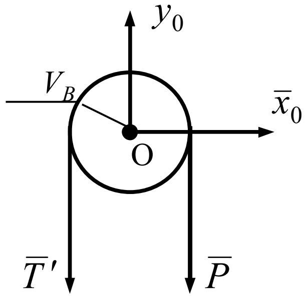


Рисунок 13

Реакция шарнира O представлена двумя составляющими $\overline{x}_O$, $\overline{y}_O$. Для полученной произвольной плоской системы сил составим одно уравнение:

$$\sum M_O\left(\overline{F}_k\right) = 0$$

$$-P \cdot r + T' \cdot r = 0, \tag{5}$$

из которого находим T': $\qquad T' = P = 5кН$.
По 3-му закону Ньютона реакция нити T равна по модулю T': $\quad T = T' = 5кН$

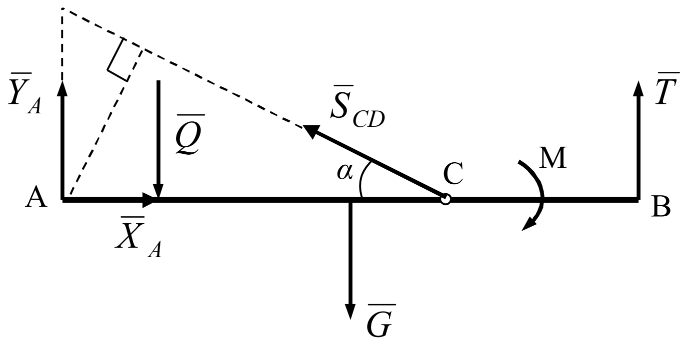


Рисунок 14

Для произвольной плоской системы сил, приложенных к балке, составим три уравнения равновесия:

$$\sum M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0: \quad -Q \cdot 1 - G \cdot 3 + S_{CD} \cdot 4 \cdot \sin 30^0 - M + T \cdot 6 = 0 \tag{6}$$

$$\sum F_{kx} = 0: \qquad X_A - S_{CD} \cdot \cos 30^0 = 0 \tag{7}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \qquad Y_A - Q - G + S_{CD} \cdot \sin 30^0 + T = 0. \tag{8}$$

Из уравнения (6) находим S_{CD}:

$$S_{CD} = \frac{Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - T \cdot 6}{4 \cdot \sin 30^0} = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0{,}5} = 4{,}5 \;\; кН.$$

Из уравнения (7):

$$X_A = S_{CD} \cdot \cos 30^0 = 4{,}5 \cdot 0{,}866 = 3{,}90 \;\; кН .$$

Из уравнения (8):

$$Y_A = Q + G - S_{CD} \cdot \cos 60^0 - T = 1 + 10 - 4{,}5 \cdot 0 = 3{,}75 \;\; кН.$$

Значения X_A, Y_A, S_{CD} получились положительными. Это указывает на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями.

3 КИНЕМАТИКА

Кинематика – это раздел теоретической механики, который изучает геометрические свойства движущихся материальных объектов без учета действия на них сил.

3.1 Основные кинематические характеристики точки

Под *движением* в механике понимается изменение с течением времени положение одного тела в пространстве по отношению к другому телу, которое называется телом отсчета. Система координат, связанная с телом отсчета, называется *системой отсчета.*

Траектория точки – геометрическое место последовательных положений точки.

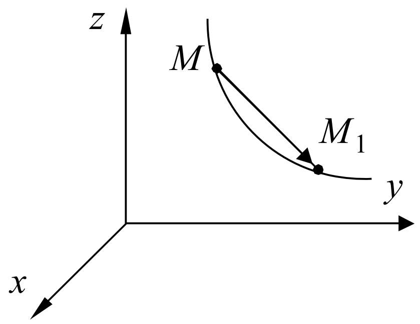


Рисунок 15

Вектор перемещения $\overline{MM_1}$ - вектор, соединяющий точки на траектории.

Средняя скорость точки – отношение вектора перемещения к промежутку времени Δt, за которое это перемещение произошло:

$$\overline{V}_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \tag{9}$$

Скорость точки в данный момент времени определяется как предел средней скорости при $\Delta t \to 0$

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \tag{10}$$

Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

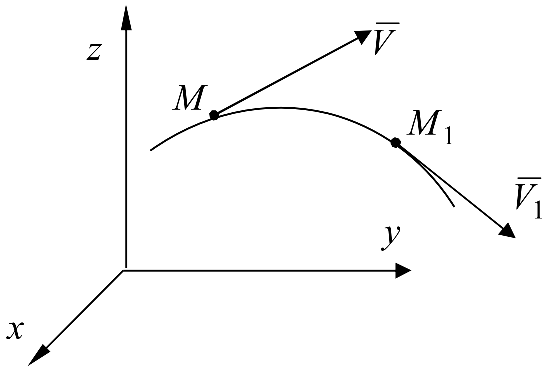


Рисунок 16

Ускорение точки - векторная величина, характеризующая изменение вектора скорости точки с течением времени.

Среднее ускорение точки равно отношению вектора приращения скорости к промежутку времени, за которое это приращение произошло

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}. \tag{11}$$

Ускорение точки в данный момент времени определяется как предел среднего ускорения точки при $\Delta t \to 0$

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \bar{V}'. \tag{12}$$

Вектор ускорения точки направлен в сторону вогнутости траектории, если она криволинейная.

Для того чтобы определить кинематические характеристики точки, нужно *задать* движение точки, т.е. указать способ, позволяющий определять положение точки в данный момент времени в выбранной системе отсчета.

Основные задачи кинематики точки – задав ее движение, найти способы определения скорости и ускорения точки.

3.2 Векторный способ задания движения точки

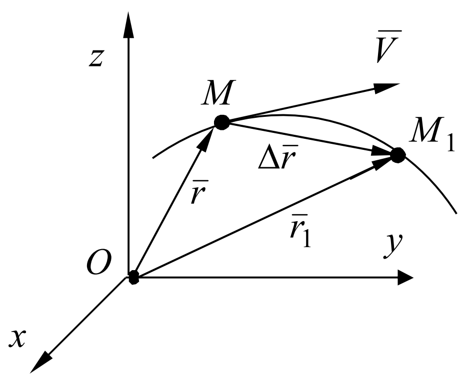


Рисунок 17

Положение точки в данный момент времени определим вектором, соединяющим точку с началом координат. Уравнение движение точки имеет вид:

$$\bar{r} = f(t). \tag{13}$$

Скорость и ускорения точки определяются по формулам:

$$\bar{V} = \bar{r}', \qquad \bar{a} = \bar{V}' = \bar{r}''. \tag{14}$$

3.3 Координатный способ задания движения

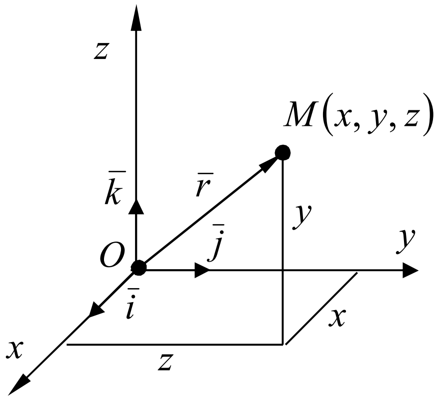


Рисунок 18

Положение точки определяем координатами в данной системе отсчета. При движении точки по пространственной траектории уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \tag{15}$$

Если точка движется по плоской траектории, ее движение описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned} \tag{16}$$

Для нахождения уравнения траектории точки выразим t из одного уравнения, например из второго:

$$t = \varphi(y),$$

и подставим в первое уравнение:

$$x = F[\varphi(y)].$$

Проекции скорости точки на оси координат определяем по формулам:

$$V_x = x'$$
$$V_y = y'$$

Модуль скорости равен:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,. \tag{17}$$

Направление вектора скорости определяют направляющие косинусы:

$$\cos\left(x, \overline{V}\right) = \frac{V_x}{V}; \qquad \cos\left(y, \overline{V}\right) = \frac{V_y}{V}. \tag{18}$$

Проекции ускорения точки на оси координат определяем по формулам:

$$a_x = V_x' = x'',$$
$$a_y = V_y' = y''$$

Модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,.$$

Направление вектора ускорений определяют направляющие косинусы

$$\cos\left(x, \overline{a}\right) = \frac{a_x}{a}; \qquad \cos\left(y, \overline{a}\right) = \frac{a_y}{a}.$$

Характер движения точки определяем по формуле:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \tag{19}$$

Если $\dfrac{dV}{dt} > 0$, движение ускоренное;

$\dfrac{dV}{dt} = 0$, движение равномерное;

$\dfrac{dV}{dt} < 0$, движение замедленное.

3.4 Естественный способ задания движения

Если траектория точки известна, применяем естественный способ задания движения. Для этого на траектории точки выбираем точку О – начало отсчета дуговой координаты, выбираем положительное и отрицательное направление отсчета координаты.

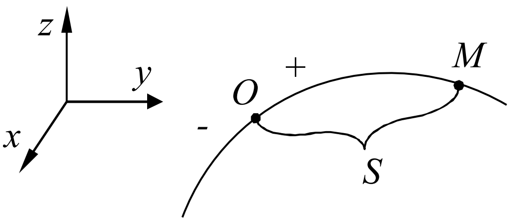


Рисунок 19

Закон движения точки имеет вид:

$$S = f(t) \tag{20}$$

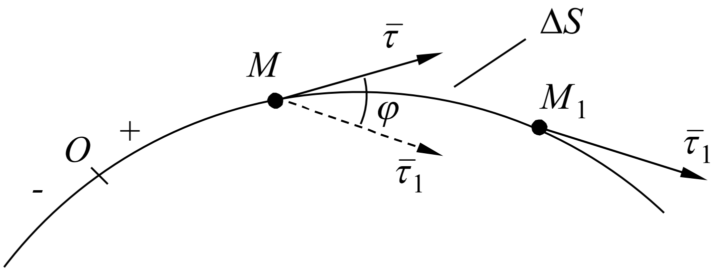


Рисунок 20

Угол φ между двумя соседними касательными к траектории точки называется *углом смежности.*

Кривизной кривой в точке М называется предел отношения угла смежности к приращению дуговой координаты:

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi}{\Delta S}. \tag{21}$$

Величина, обратная кривизне кривой, называется радиусом кривизны траектории в данной точке кривой:

$$\rho = \frac{1}{K}. \tag{22}$$

Для окружности радиус кривизны равен ее радиусу:

$$\rho = R\,.$$

Для прямой радиус кривизны равен бесконечности:

$$\rho = \infty\,.$$

Для нахождения скорости и ускорения точки используем естественные оси координат – касательную, главную нормаль, бинормаль – три взаимно перпендикулярные оси. Эти оси образуют в точке *M естественный* трехгранник.

Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль, называется *соприкасающейся плоскостью.*

Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, называется *спрямляющей плоскостью*.

Плоскость, проходящая через главную нормаль и бинормаль, называется *нормальной плоскостью.*

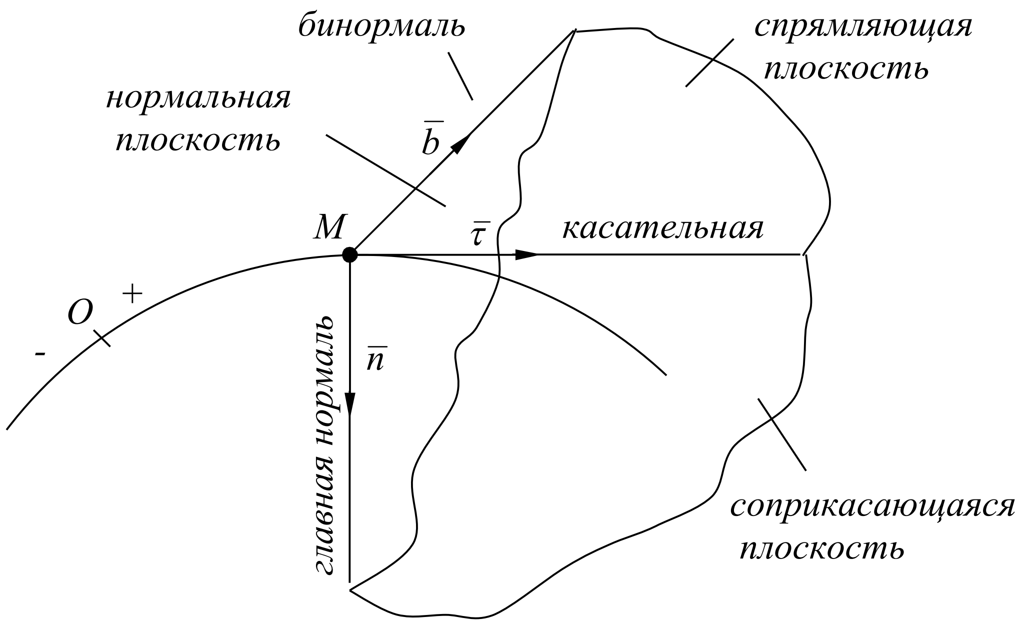


Рисунок 21

Скорость точки *M* определяем по формуле:

$$\bar{V} = V_\tau \cdot \tau\,, \tag{23}$$

где $V_\tau = S'$. Если $S' > 0$, точка движется в сторону возрастания дуговой координаты; если $S' < 0$, точка движется в сторону убывания дуговой координаты.

Ускорение точки лежит в соприкасающейся плоскости и состоит из двух составляющих:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n . \tag{24}$$

Касательное ускорение точки $\bar{a}_\tau$ следит за изменением модуля скорости точки и определяется по формуле:

$$\bar{a}_\tau = a_\tau \cdot \bar{\tau} , \tag{25}$$

где

$$a_\tau = V_\tau{}' = S'' = \pm \frac{dV}{dt} . \tag{26}$$

Если $a_\tau > 0$, вектор a_τ направлен в сторону возрастания дуговой координаты Если $a_\tau < 0$, то в сторону убывания дуговой координаты.

Нормальное ускорение точки a_n следит за изменением направления вектора скорости и определяется по формуле:

$$\bar{a}_n = a_n \cdot \bar{n} , \tag{27}$$

где

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(S')^2}{\rho} . \tag{28}$$

Вектор нормального ускорения точки направлен по главной нормали в сторону вогнутости траектории.

Пусть $S' < 0$, а $S'' > 0$

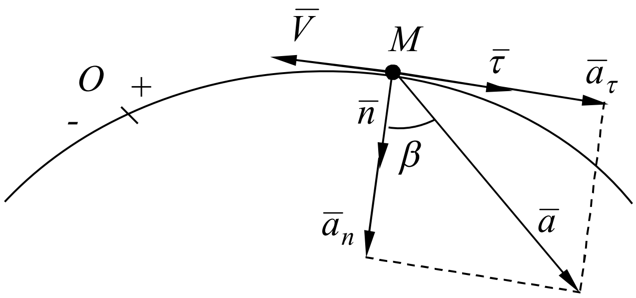


Рисунок 22

Модуль полного ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \tag{29}$$

Направление ускорения точки M определяется углом β, тангенс которого равен:

$$tg\beta = \frac{|a_\tau|}{a_n}. \qquad (30)$$

3.5 Кинематика твердого тела

В кинематике, как и в статике все тела рассматриваем как абсолютно твердые, т.е. расстояния между любыми двумя точками тела при его движении остаются неизменными.

Задачи кинематики твердого тела будем решать в следующем порядке:
1) задание движения и определение кинематических характеристик тела;
2) определение кинематических характеристик отдельных точек тела.

3.6 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором отрезок прямой, соединяющих его любые две точки, перемещается параллельно своему начальному положению.

При поступательном движении траектории точек могут быть как прямолинейными, так и криволинейными. Примеры поступательного движения:

1. Кузов автомобиля на прямолинейном участке пути.
2. Ползун B в кривошипно-шатунном механизме.

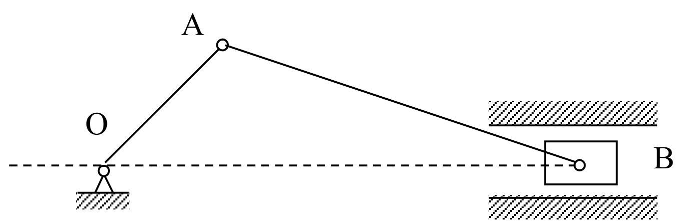


Рисунок 23

3. Спарник AB при вращении кривошипов OA и O_1B ($OA = O_1B$) движется поступательно

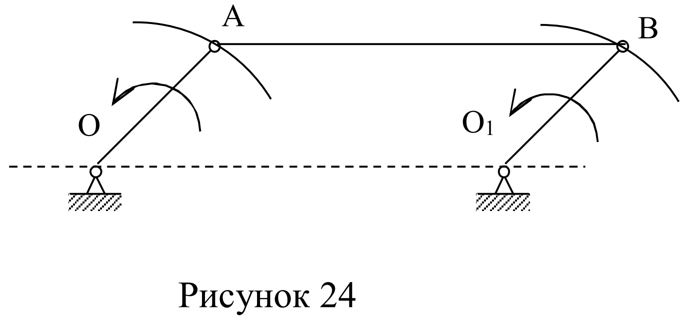


Рисунок 24

Точки А и В движутся по окружностям. Свойства поступательного движения определяет теорема: Все точки тела при поступательном движении имеют одинаковые траектории и геометрически равные скорости и ускорения.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь его точки. Таким образом, изучение поступательного движения тела сводится к кинематике точки, рассмотренной ранее.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\overline{V}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\overline{a}$ - ускорением поступательно движения тела. Векторы $\overline{V}$ и $\overline{a}$ можно изображать приложенными к любой точке тела.

3.7 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором две точки этого тела (или неизменно связанные с ним точки) во все время движения остаются неподвижными.

Прямая, проходящая через неподвижные точки *A* и *B*, называется осью вращения. Все точки, принадлежащие оси вращения, при движении тела остаются неподвижными. Все остальные точки тела будут двигаться по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на оси вращения.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения две полуплоскости: неподвижную I, и подвижную II, вращающуюся вместе с телом.

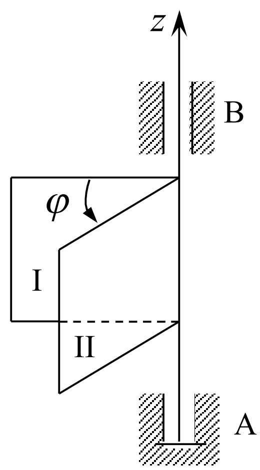


Рисунок 25

Тогда положение тела в любой момент времени определяется углом φ, который называется углом поворота тела. Угол φ считается положительным, если он отложен от неподвижной полуплоскости в направление против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси Az), и отрицательным, если по ходу часовой стрелки. Измеряется угол поворота в радианах.

Для определения положения тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла поворота от времени, т.е.

$$\varphi = f(t). \tag{31}$$

Уравнение (31) называется законом вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

Основными характеристиками вращательного движения тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Численное значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени

$$\omega = \varphi'.$$

Если $\omega > 0$, вращение происходит против хода часовой стрелки, если $\omega < 0$ - по ходу часовой стрелки. Измеряется угловая скорость в *рад/с.*

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

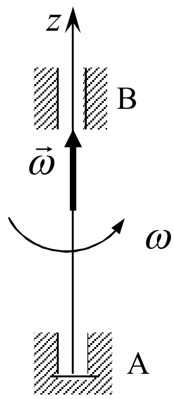


Рисунок 26

Угловое ускорение ε характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Численное значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости тела или второй производной от угла поворота по времени.

$$\varepsilon = \omega' = \varphi''. \tag{32}$$

Измеряется угловое ускорение в *рад/с²*.

Если модуль угловой скорости возрастает с течением времени, вращение называется ускоренным, если убывает – замедленным.

Вращение будет ускоренным, если ω и ε одного знака, и замедленным, если знаки разные.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ можно так же изобразить в виде вектора, направленного вдоль оси вращения. Если вращение ускоренное, векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены в одну сторону, если замедленное – в противоположные стороны.

3.8 Нахождение скорости точек при вращательном движении тела

Рассмотрим точку М тела, совершающего вращательное движение, находящуюся на расстоянии *h* от оси вращения.

Тело вращается с угловой скоростью ω в направлении указанном на рис. 27. Точка М будет описывать окружность радиуса *h*, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, о центр О лежит на оси вращения.

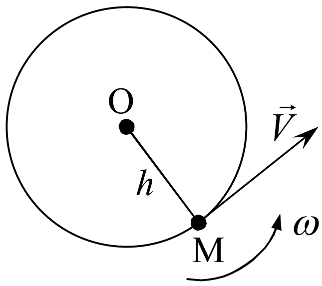


Рисунок 27

Вектор скорости точки направлен перпендикулярно радиусу окружности по касательной к траектории в сторону вращения тела и равен по модулю угловой скорости тела на расстоянии h от этой точки до оси вращения.

$$V = \omega \cdot h. \tag{33}$$

3.9 Нахождение ускорений точек вращающегося тела

Тело вращается вокруг неподвижной оси, имея в данный момент времени угловую скорость ω и угловое ускорение ε. Пусть вращение тела замедленное. Рассмотрим точку М тела, находящуюся на расстоянии *h* от оси вращения. При вращении тела точка движется по окружности радиуса h с центром на оси вращения.

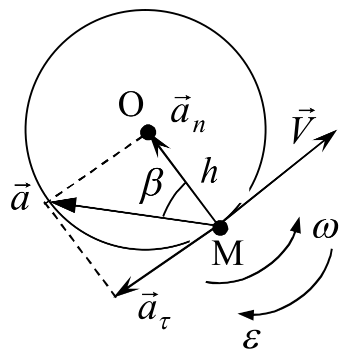


Рисунок 28

Полное ускорение точки состоит из двух составляющих – касательного и нормального ускорений.

Касательное ускорении точки $\overline{a}_\tau$ направлено перпендикулярно радиусу окружности по касательной в сторону вращения тела, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если вращение замедленное (на рис.28 $\overline{a}_\tau$ направлено в сторону, противоположную вращению тела, т.к. мы рассматриваем замедленное вращение).

Модуль касательного ускорения определяем по формуле:

$$|a_\tau| = |\varepsilon| \cdot h. \tag{34}$$

Нормальное ускорение точки всегда направлено по радиусу окружности к центру и численно равно:

$$a_n = \omega^2 \cdot h. \tag{35}$$

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{36}$$

Полное ускорение точки образует с радиусом окружности угол β, тангенс которого определяется по формуле:

$$tg\beta = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{37}$$

3.10 Сложное движение точки. Разложение сложного движения точки на переносное и относительное

Сложное движение точки – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

Примеры сложного движения точки:

1. движение лодки, переплывающей реку;

2. движение пассажира в движущемся автобусе;
3. движение человека по лестнице движущегося эскалатора.

Для изучения сложного движения точки применим метод разложения движения. Для этого введем две системы отсчета: неподвижную $\hat{I}_1\tilde{o}_1y_1z_1$ и подвижную $\hat{I}\tilde{o}yz$, связанную с движущимся телом.

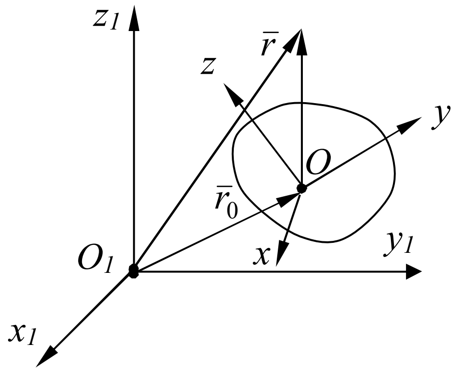


Рисунок 29

Мысленно остановим движение подвижной системы отсчета, относительно неподвижной. Движение точки, относительно подвижной системы отсчета называется относительным. Траектория точки, скорость и ускорение по отношению к подвижной системе отсчета называются относительной траекторией, относительной скоростью и относительным ускорением. Будем обозначать относительную скорость $\overline{\upsilon}_r$, относительно ускорение $\overline{a}_r$.

Мысленно остановим движение точки относительно подвижной системы отсчета. Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется переносным. Скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает рассматриваемая точка, называются переносной скоростью и переносным ускорением. Будем обозначать переносную скорость $\overline{\upsilon}_{\mathring{a}}$, а переносное ускорение $\overline{a}_{\mathring{a}}$. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета, складывающееся из переносного и относительного называется абсолютным или сложным. Скорость и ускорение точки в сложном движении будем обозначать $\overline{\upsilon}_{\grave{a}}$ - абсолютная скорость, $\overline{a}_{\grave{a}}$ - абсолютной ускорение.

3.11 Нахождение скорости точки в сложном движении

Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\overline{\upsilon}_{\grave{a}} = \overline{\upsilon}_{\mathring{a}} + \overline{\upsilon}_r \tag{38}$$

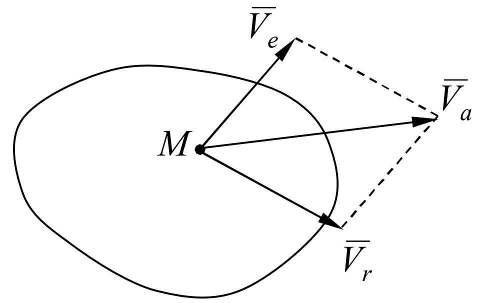


Рисунок 30

3.12 Нахождение ускорения точки в сложном движении

Абсолютное ускорение точки в сложном движении в данный момент времени равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a}_{à} = \bar{a}_{å} + \bar{a}_r + \bar{a}_c . \tag{39}$$

Для определения величин, характеризующих относительное движение необходимо мысленно остановить переносное движение и к относительному движению применить методы кинематики точки. Чтобы изучить переносное движение мысленно остановим относительное движение, и для точки, принадлежащей теперь телу, совершающему переносное движение применяем формулы кинематики твердого тела.

Ускорение Кориолиса определяем по формуле:

$$\bar{a}_{ñ} = 2[\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r], \tag{40}$$

где $\overline{\omega}_e$ - вектор угловой скорости переносного движения;

$\overline{\upsilon}_r$ - вектор относительной скорости.

Модуль ускорения Кориолиса определяем по формуле:

$$|\bar{a}_c| = 2|\overline{\omega}_e| \cdot |\overline{\upsilon}_r| \sin\alpha , \tag{41}$$

где α - угол между векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\upsilon}_r$.

Направление вектора Кориолисова ускорения находим двумя способами:

1. Правило векторного произведения:

Вектор $\bar{a}_c$ направляем перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\upsilon}_r$ таким образом, чтобы глядя ему навстречу видеть кратчайший поворот от вектора $\overline{\omega}_e$ к вектору $\overline{\upsilon}_r$, происходящим против хода часовой стрелки.

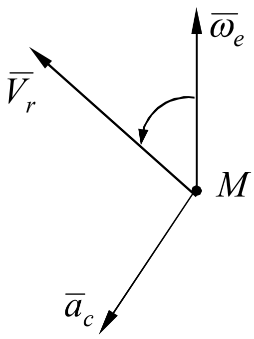


Рисунок 31

2. Правило Жуковского:

Для нахождения направления $\overline{a}_c$ поступаем следующим образом:

1) через точку M проводим плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{\omega}_e$;
2) спроектируем $\overline{\upsilon}_r$ на проведенную плоскость;
3) Полученную проекцию поворачиваем в сторону переносного вращения на 90^0 (рис. 32).

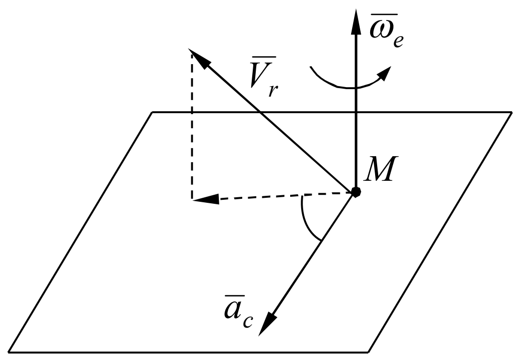


Рисунок 32

Замечание:

Если $\overline{\omega}_e \perp \overline{\upsilon}_r$, то для нахождения направления $\overline{a}_c$ достаточно вектор $\overline{\upsilon}_r$ повернуть в сторону переносного вращения на 90^0.

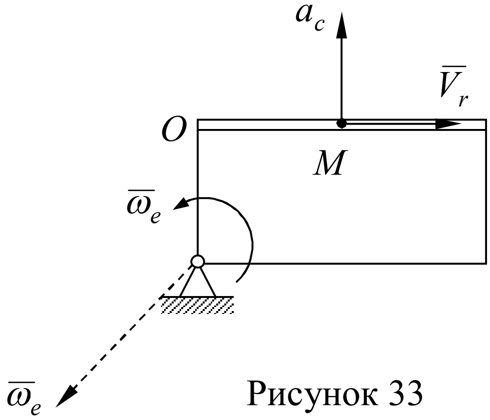


Рисунок 33

3.13 Задание К-1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорение, а так же радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ варианта	Уравнения движения точки		t_1, c
	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	
1	*2*	*3*	*4*
1	$-2t^2 + 3$	$-2t$	$\frac{1}{2}$
2	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 2$	$4\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
3	$\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 3$	$\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-\frac{4}{t+1}$	2
5	$2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-4t$	$\frac{1}{2}$
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - \frac{5t}{3} - 2$	1
8	$7\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3$	$2 - 7\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	1
9	$-\frac{3}{t+2}$	$3t + 6$	2
10	$-4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$-3t$	$\frac{1}{2}$
12	$5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-5\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 3$	1

Продолжение таблицы К-1

1	*2*	*3*	*4*
13	$-2t-2$	$-\dfrac{2}{t+1}$	2
14	$4\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	$-3\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	1
15	$3t$	$4t^2+1$	$\dfrac{1}{2}$
16	$3\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)-3$	$4\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$	1
17	$3-4t^2$	$-2t$	1
18	$2t$	$4t^2-2t+1$	$\dfrac{1}{2}$
19	$3t$	$4-9t^2$	1
20	$2t^2$	$4t$	1
21	$2\sin(\pi t)-2$	$2\cos(\pi t)$	$\dfrac{1}{6}$
22	$5\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	$-5\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	1
23	$6\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)-2$	$6\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)+3$	1
24	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+\dfrac{5t}{3}$	1
25	$-4\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)-1$	$-4\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	1
26	$-t$	$-2t^2-4$	1
27	$-3-9\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$	$-9\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-2t$	1
29	$5t^2+\dfrac{5t}{3}-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)-2$	$-2\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)+3$	1

3.14 Пример выполнения задания К-1

Исходные данные:

$$x = 2\cos 2t; \qquad y = 3\sin t \qquad (42)$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ (размерности: } x \text{ и } y \text{ - в м, } t \text{ и } t_1 \text{ - в с)}$$

Решение:

Уравнения движения (42) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в явном виде, исключим t из уравнений (42). Для этого учтем, что $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$, $\sin t = \frac{y}{3}$ (из второго уравнения). Подставим эти функции в первое уравнение (42), получим уравнение траектории:

$$x = 2 - \frac{4}{9}y^2 \qquad (43)$$

Траекторией точки является парабола, изображенная на рисунке 34.

Определим координаты точки при $t_0 = 0$ и $t_1 = \frac{\pi}{4}$.

$x_0 = 2 \cdot \cos 0 = 2$ *м*; $\qquad y_0 = 3 \cdot \sin 0$; $\qquad M_0(2;\ 0)$

$x_1 = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $\qquad y_1 = 3 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 2{,}1$ *м*; $\qquad M_1(0;\ 2{,}1)$

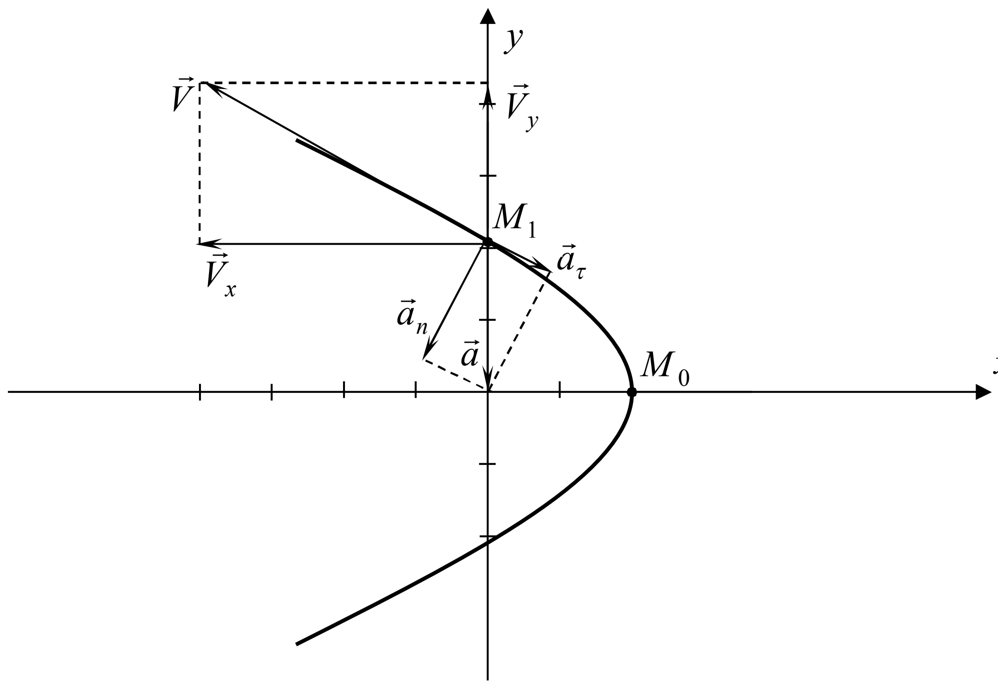


Рисунок 34

Скорость и ускорение точки определим по формулам:

$$\overline{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j}$$

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} \tag{44}$$

Здесь $\bar{i}$, $\bar{j}$ - орты осей x и y; V_x, V_y, a_x, a_y - проекции скорости и ускорения на оси координат. Найдем их, дифференцируя уравнения движения (42):

$V_x = x' = -4 \cdot \sin 2t$, $\qquad V_{x_1} = -4 \cdot \sin\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) = -4 \ \text{м}/\text{с}$

$V_y = y' = 3 \cdot \cos t$, $\qquad V_{y_1} = 3 \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} = 2{,}1 \ \text{м}/\text{с}$

$a_x = V_x' = -8 \cdot \cos 2t$, $\qquad a_{x_1} = -8 \cdot \cos\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$a_y = V_y' = -3 \cdot \sin t$, $\qquad a_{y_1} = -3 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = -2{,}1 \ \text{м}/\text{с}^2$

По найденным проекциям определяем модули скорости и ускорения:

$$V_1 = \sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2{,}1^2} = 4{,}52 \ \text{м}/\text{с}$$

$$a_1 = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2} = \sqrt{0^2 + (-2{,}1)^2} = 2{,}1 \ \text{м}/\text{с}^2$$

Для определения характера движения точки воспользуемся формулой:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V}.$$

Для $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$ имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-4 \cdot 0 + 2{,}1 \cdot (-2{,}1)}{4{,}52} = -\frac{4{,}41}{4{,}52}$$

$$\frac{dV}{dt} = -0{,}98 \ \text{м}/\text{с}^2 < 0 \tag{45}$$

Следовательно, при $t_1 = \dfrac{\pi}{4} c$ точка движется замедленно.

Для нахождения радиуса кривизны траектории воспользуемся формулой:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \tag{46}$$

откуда

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} \tag{47}$$

Нормальное ускорение точки определим следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \tag{48}$$

где $|a_\tau| = \left|\frac{dV}{dt}\right| = 0{,}98 \ ^{м}/_{c^2}$

$$a_n = \sqrt{2{,}1^2 - 0{,}98^2} = 1{,}86 \ ^{м}/_{c^2} \tag{49}$$

Подставляя (49) в (47), находим радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{4{,}52^2}{1{,}86} = 10{,}98 \ м.$$

На рисунке 34 показано положение точки в данный момент времени. Вектор $\overline{V}$ строим по составляющим $\overline{V}_x$, $\overline{V}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\overline{a}$ строим по составляющим $\overline{a}_x$, $\overline{a}_y$, затем раскладываем на составляющие $\overline{a}_n$, $\overline{a}_\tau$. Совпадение $\overline{a}_\tau$, $\overline{a}_n$, найденных из чертежа с их значениями, полученными аналитически служит контролем правильности решения.

4 ДИНАМИКА

Динамика – это раздел теоретической механики, который изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Движение тел с геометрической точки зрения рассматривалось в кинематике. Понятие о силе как об основной мере механического действия, оказываемого на материальное тело, было введено в статике. Но в отличие от статики, в динамике наряду с постоянными силами рассматриваются переменные силы. Силы могут зависеть от времени, от положения тела и его скорости.

Изучать динамику начнем с материальной точки.

4.1 Динамика точки. Законы Галилея-Ньютона

В основе динамики лежат законы Галилея-Ньютона.

Первый закон (закон инерции).

Существуют системы отсчета в которых изолированная от внешних воздействий материальная точка имеет ускорение, равное нулю, т.е либо находится в покое, либо равномерно прямолинейно, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называются инерциальными системами отсчета (ИСО). Это либо системы отсчета, которые находятся в покое, либо движутся поступательно равномерно прямолинейно.

Второй закон (основной закон динамики).

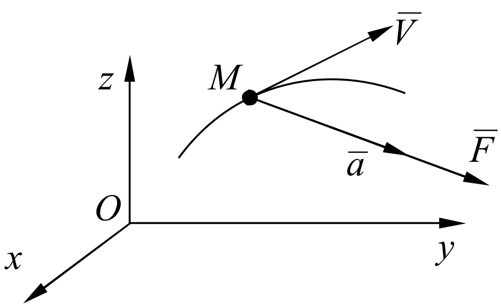


Рисунок 35

Ускорение, которое получает материальная точка в ИСО под действием приложенной к ней силы $\overline{F}$, прямо пропорционально действующей силе и обратно пропорционально массе точки.

$$\overline{a} = \frac{\overline{F}}{m} \tag{50}$$

или $m\overline{a} = \overline{F}$.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то основное уравнение динамики точки в ИСО записывается в виде:

$$m\bar{a} = \sum_k \bar{F}_k \tag{51}$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). Все действия материальных тел взаимны.

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, одинаковыми по величине, направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны, в соответствии с рисунком 36.

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 \tag{52}$$

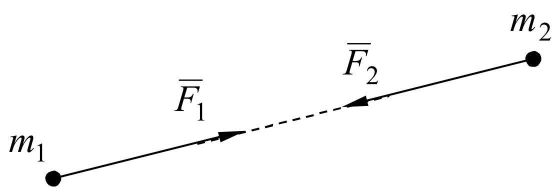


Рисунок 36

Если система отсчета движется либо не поступательно, либо неравномерно, она является неинерциальной (не ИСО).

Основное уравнение динамики в не ИСО имеет вид:

$$m\bar{a}_r = \sum_k \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c, \tag{53}$$

где $\bar{a}_r$ - относительное ускорение;

$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ - переносная сила инерции;

$\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ - Кориолисова сила инерции.

Переносная и Кориолисова силы инерции направляются по той же прямой, что и соответствующие ускорения, только в противоположную сторону.

4.2 Две основные задачи динамики точки

При решении задач динамики, если материальная точка несвободная, применяется принцип освобождаемости от связей, известный из статики.

Все задачи динамики можно разделить на две группы:

1-ая (прямая задача динамики). По известной массе точки и известным ее кинематическим характеристикам определить действующие на точку силы.

2-ая (обратная задача динамики). По известной массе точки, известным действующим силам и начальным условиям определить кинематические характеристики точки.

Начальные условия – это значения координат точки и проекций скорости на оси координат в начальный момент времени.

4.3 Дифференциальные уравнения движения точки

Для решения задач динамики основное уравнение динамики точки в ИСО спроектируем на оси координат.

Если движение задано координатным способом, уравнения записываются в виде:

$$mx'' = \sum_k F_{kx},$$
$$my'' = \sum_k F_{ky}, \qquad (54)$$
$$mz'' = \sum_k F_{kz}.$$

Если движение точки задано естественным способом, уравнения движения имеют вид:

$$mS'' = \sum_k F_{k\tau},$$
$$m\frac{V^2}{\rho} = \sum_k F_{kn}, \qquad (55)$$
$$0 = \sum_k F_{kb}.$$

4.4 Задание Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1-5 (рис.37, схема 1).

Тело движется из точки *A* по участку *AB* (длиной *l*) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течении τ с. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке *B* тело покидает плоскость со скоростью V_B и попадает со скоростью V_C в точку *C* плоскости *BD*, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе *T* с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано:

$$\alpha = 30^0; \;\; V_A = 0; \;\; f = 0{,}2; \;\; l = 10 м; \;\; \beta = 60^0.$$

Определить τ и *h.*

Вариант 2. Дано:

$$\alpha = 15^0; \;\; V_A = 2\, м/с; \;\; f = 0{,}2; \;\; h = 4 м; \;\; \beta = 45^0.$$

Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Вариант 3. Дано:

$\alpha = 30^0$; $V_A = 2{,}5\,{}^{м}\!/_{с}$; $f \neq 0$; $l = 8м$; $d = 10м$; $\beta = 60^0$.

Определить V_B и τ.

Вариант 4. Дано:

$V_A = 0$; $\tau = 2с$; $l = 9{,}8м$; $\beta = 60^0$ $f = 0$.

Определить α и T.

Вариант 5. Дано:

$\alpha = 30^0$; $V_A = 0$; $f \neq 0$; $l = 9{,}8м$; $\tau = 3с$; $\beta = 45^0$.

Определить f и V_C.

Варианты 6-10 (рис.37, схема 2).

Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l, со скоростью V_A. Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f. Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью V_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью V_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано:

$\alpha = 20^0$; $f = 0{,}1$; $\tau = 0{,}2с$; $h = 40м$; $\beta = 30^0$.

Определить l и V_C.

Вариант 7. Дано:

$\alpha = 15^0$; $f = 0{,}1$; $V_A = 16\,{}^{м}\!/_{с}$; $l = 5м$; $\beta = 45^0$.

Определить V_B и T.

Вариант 8. Дано:

$V_A = 21\,{}^{м}\!/_{с}$; $f = 0$; $\tau = 0{,}3с$; $V_B = 20\,{}^{м}\!/_{с}$; $\beta = 60^0$.

Определить α и d.

Вариант 9. Дано:

$\alpha = 15^0$; $\tau = 0{,}3с$; $f = 0{,}1$; $h = 30\sqrt{2}м$; $\beta = 45^0$.

Определить V_B и V_A.

Вариант 10. Дано:

$\alpha = 15^0$; $f = 0$; $V_A = 12\,{}^{м}\!/_{с}$; $d = 50м$; $\beta = 60^0$.

Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC.

Варианты 11-15 (рис. 37, схема 3).

Имея в точке A скорость V_A, мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l, составляющему с горизонтом угол α. При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость V_B и перелетает через ров шириной d, находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью V_C. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано:

$$\alpha = 30^0;\ \ P \neq 0;\ \ l = 40м;\ \ V_A = 0;\ \ V_B = 4{,}5\, м/с;\ \ d = 3м.$$

Определить τ и h.

Вариант 12. Дано:

$$\alpha = 30^0;\ \ P = 0;\ \ l = 40м;\ \ V_B = 4{,}5\, м/с;\ \ h = 1{,}5м.$$

Определить V_A и d.

Вариант 13. Дано:

$$\alpha = 30^0;\ \ m = 400кг;\ \ V_A = 0;\ \ \tau = 20с;\ \ d = 3м;\ \ h = 1{,}5м.$$

Определить P и l.

Вариант 14. Дано:

$$\alpha = 30^0;\ \ m = 400кг;\ \ P = 2{,}2кН;\ \ V_A = 0;\ \ l = 40м;\ \ d = 5м.$$

Определить V_B и V_C.

Вариант 15. Дано:

$$\alpha = 30^0;\ \ V_A = 0;\ \ P = 2кН;\ \ l = 50м;\ \ h = 2м;\ \ d = 4м.$$

Определить T и m.

Варианты 16-20 (рис.37, схема 4).

Камень скользит в течении τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f. Имея в точке B скорость V_B, камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену.

При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано:

$$\alpha = 30^0;\ \ V_A = 1\, м/с;\ \ l = 3м;\ \ f = 0{,}2;\ \ d = 2{,}5м.$$

Определить h и T.

Вариант 17. Дано:

$$\alpha = 45^0;\ \ l = 6м;\ \ V_B = 2V_A;\ \ \tau = 1с;\ \ h = 6м.$$

Определить d и f.

Вариант 18. Дано:

$$\alpha = 30^0;\ \ l = 2м;\ \ V_A = 0;\ \ f = 0{,}1;\ \ d = 3м.$$

Определить h и τ.

Вариант 19. Дано:

$\alpha = 15^0$; $l = 3м$; $V_B = 3\,{}^{м}\!/_{с}$; $f \neq 0$; $\tau = 1{,}5с$; $d = 2м$.

Определить V_A и h.

Вариант 20. Дано:

$\alpha = 45^0$; $V_A = 0$; $f = 0{,}3$; $h = 4м$; $d = 2м$.

Определить l и τ.

Варианты 21-25 (рис.37, схема 5).

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ с тело в точке B со скоростью V_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью V_C; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано:

$\alpha = 30^0$; $f = 0{,}1$; $V_A = 1\,{}^{м}\!/_{с}$; $\tau = 1{,}5с$; $h = 10м$.

Определить V_B и d.

Вариант 22. Дано:

$\alpha = 45^0$; $V_A = 0$; $l = 10м$; $\tau = 2с$.

Определить f и уравнение траектории на участке BC.

Вариант 23. Дано:

$V_A = 0$; $f = 0$; $l = 9{,}81м$; $\tau = 2с$; $h = 20м$.

Определить α и T.

Вариант 24. Дано:

$V_A = 0$; $\alpha = 30^0$; $l = 10м$; $f = 0{,}2$; $d = 12м$.

Определить τ и h.

Вариант 25. Дано:

$\alpha = 30^0$; $V_A = 0$; $f = 0{,}2$; $h = 4{,}5м$; $l = 6м$.

Определить τ и V_C.

Варианты 26-30 (рис.37, схема 6)

Имея в точке A скорость V_A, тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течении τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. Со скоростью V_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью V_C, находясь в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано:

$V_A = 7\,{}^{м}\!/_{с}$; $f = 0{,}2$; $l = 8м$; $h = 20м$.

Определить d и V_C.

Вариант 27. Дано:

$V_A = 4 \,{}^{м}\!/\!{}_{c}$; $f = 0{,}1$; $d = 2м$; $\tau = 2c$.

Определить V_B h.

Вариант 28. Дано:

$V_B = 3 \,{}^{м}\!/\!{}_{c}$; $f = 0{,}3$; $l = 3м$; $h = 5м$.

Определить V_A и T.

Вариант 29. Дано:

$V_A = 3 \,{}^{м}\!/\!{}_{c}$; $V_B = 1 \,{}^{м}\!/\!{}_{c}$; $l = 2{,}5м$; $h = 20м$.

Определить f и d.

Вариант 30. Дано:

$f = 0{,}25$; $h = 5м$; $l = 4м$; $d = 3м$.

Определить V_A и τ.

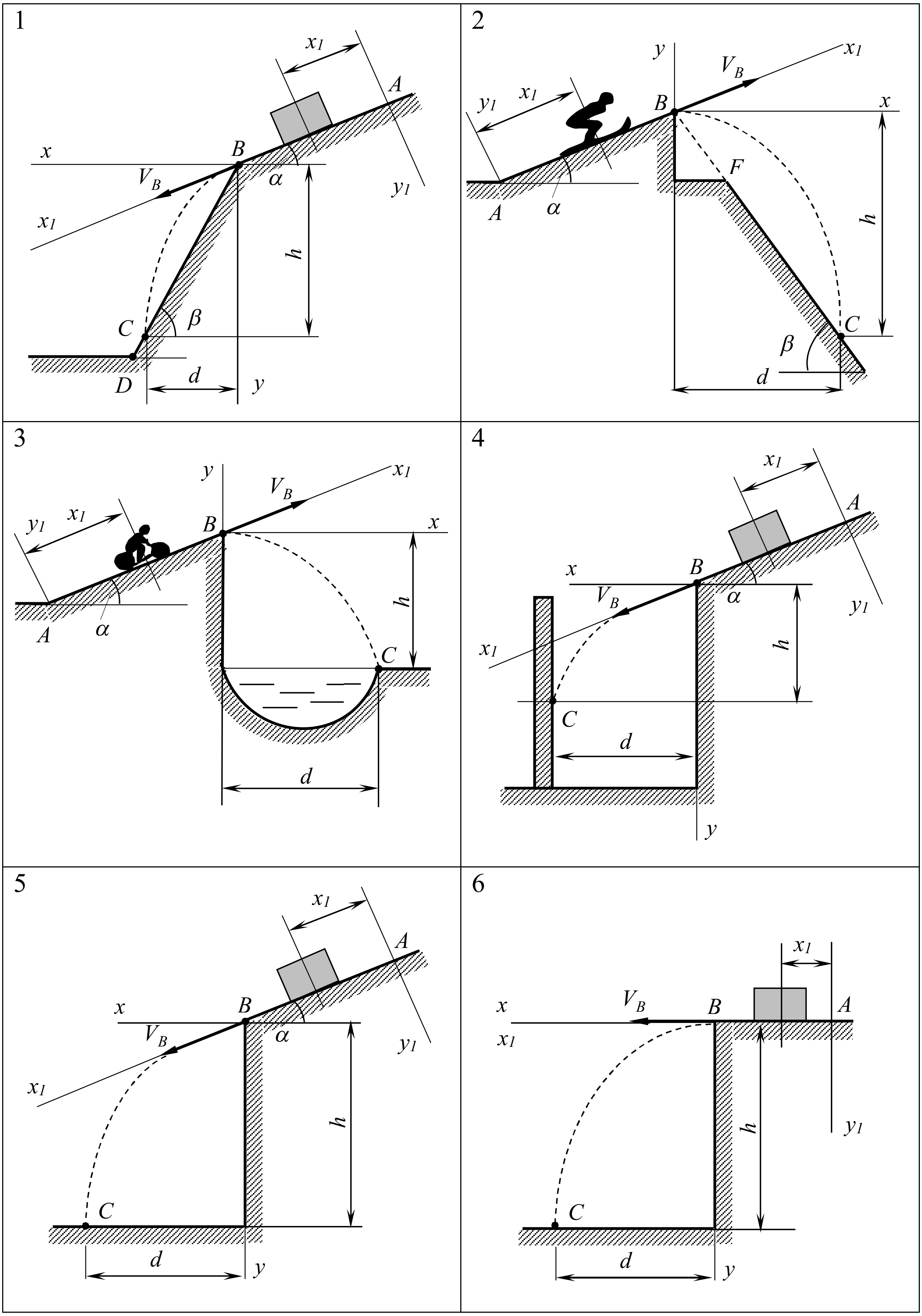

1
x
B
V_B
x_1
A
α
y_1
h
C
β
D
d
y
2
y
V_B
x_1
y_1
B
x
F
A
α
h
C
β
d
3
y
x_1
V_B
y_1
B
x
A
α
h
C
d
4
x_1
A
x
B
V_B
α
h
y_1
C
d
y
5
x_1
A
x
B
V_B
α
y_1
h
C
d
y
6
x_1
x
V_B
B
A
y_1
h
C
d
y

Рисунок 37

4.5 Пример выполнения задания Д-1

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом в течении τ с. (Рисунок 38). Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

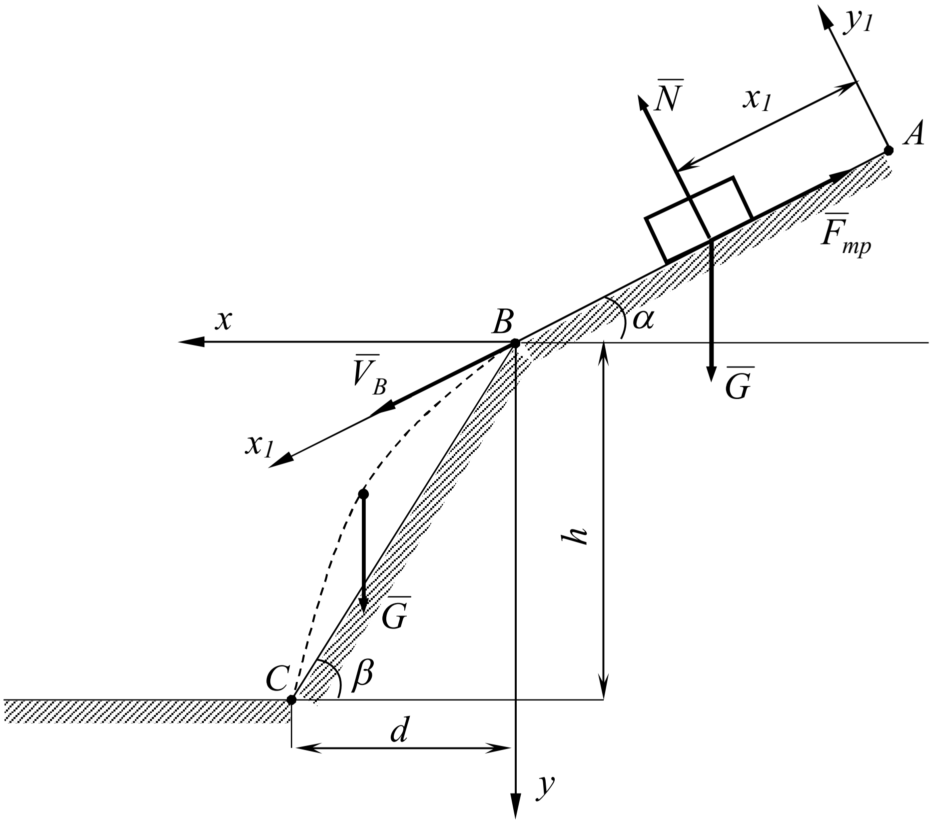


Рисунок 38

В точке B тело покидает плоскость со скоростью V_B и попадает со скоростью V_C в точку С плоскости BC, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку. Сопротивление воздуха не учитывать.

<u>Исходные данные:</u>

$$V_A = 1\,{}^{м}\!/_{c};\;\; \alpha = 30^0;\;\; l = 4м;\;\; \tau = 1c;\;\; f \neq 0;\;\; h = 5м;\;\; \beta = 60^0.$$

Определить V_C и уравнение траектории на участке BC.

<u>Решение:</u>

Рассмотрим движение тела на участке AB. Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на тело силы (Рис. 38): вес $\overline{G}$, нормальную реакцию $\overline{N}$ и силу трения скольжения $\overline{F}_{тр}$. Запишем уравнение движения тела на участке *AB* в векторной форме:

$$m\overline{a}_1 = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{тр} \tag{56}$$

Спроектируем уравнение (56) на оси x_1, y_1:

$$\left.\begin{aligned} ma_1 &= G\sin\alpha - F_{тр} \\ 0 &= N - G\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Из второго уравнения системы (57) находим:

$$N = G\cos\alpha \,.$$

При движении сила трения равна:

$$F_{тр} = f \cdot N = f \cdot G\cos\alpha \tag{58}$$

По второму закону Ньютона

$$G = mg \,. \tag{59}$$

Подставим (58) и (59) в первое уравнение системы (57), сократим на массу и получим:

$$a_1 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha \tag{60}$$

Учитывая, что $a_1 = \dfrac{dV_1}{dt}$, уравнение (60) преобразуем к виду:

$$\frac{dV_1}{dt} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha \tag{61}$$

Мы получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dV_1 = \int g(\sin\alpha - f\cos\alpha)dt$$

или

$$V_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1 \tag{62}$$

Подставим $V_1 = \dfrac{dx_1}{dt}$, разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dx_1}{dt} = g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha)t + C_1$$

$$\int dx_1 = \int g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha)t\,dt + \int C_1 dt$$

$$x_1 = g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{63}$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями:

при $t_0 = 0$
$$x_{10} = 0;$$
$$V_{x_1 0} = V_A$$

Подставляя начальные условия в (62) и (63), получим:

$$C_1 = V_A; \;\; C_2 = 0.$$

Тогда (62) и (63) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} V_{x_1} &= g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha)t + V_A \\ x_1 &= g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha)\frac{t^2}{2} + V_A t \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Запишем конечные условия для участка AB при $t = \tau$; $x_1 = l$; $V_{x_1} = V_B$ и подставим в (64):

$$\left.\begin{aligned} V_B &= g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha)\tau + V_A \\ l &= g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha)\frac{\tau^2}{2} + V_A \tau \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Так как f неизвестно, исключим $g\sin\alpha - f\cos\alpha$ из системы (65). Для этого выразим его из первого уравнения и подставим во второе:

$$g(\mathbf{sin}\,\alpha - f\,\mathbf{cos}\,\alpha) = \frac{V_B - V_A}{\tau},$$

$$l = \frac{V_B - V_A}{\tau} \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \cdot \tau \qquad (66)$$

Из (66) найдем V_B:

$$V_B = \frac{2l}{\tau} - V_A = \frac{2 \cdot 4}{1} - 1 = 7\ ^{м}\!/_{с} \qquad (67)$$

Рассмотрим движение тела от точки *B* до точки *C*. Движение происходит под действием силы тяжести. Движение тела описывает второй закон Ньютона:

$$m\overline{a} = \overline{G} \qquad (68)$$

Спроектируем (68) на оси *x, y* и учтем (59):

$$\left.\begin{aligned} ma_x &= 0 \\ ma_y &= mg \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Из первого уравнения системы (69), учитывая, что $m \neq 0$, получаем:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0 \qquad (70)$$

Из (70) следует, что

$$V_x = const = C_3 \qquad (71)$$

Так как $V_x = \dfrac{dx}{dt}$, то в уравнении (71) можно разделить переменные и проинтегрировать:

$$\frac{dx}{dt} = C_3 \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int C_3 \cdot dt \qquad (72)$$

$$x = C_3 t + C_4 \qquad (73)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (69). Сократив на массу *m*, и учитывая, что $a_y = \dfrac{dV_y}{dt}$, получим уравнение: $\dfrac{dV_y}{dt} = g$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dV_y = \int g dt$$

$$V_y = gt + C_5 \qquad (74)$$

Подставим вместо $V_y = \dfrac{dy}{dt}$, еще раз разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dy}{dt} = gt + C_5$$

$$\int dy = \int gtdt + \int C_5 dt$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6 \qquad (75)$$

Запишем начальные условия при $t_0 = 0$:

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$V_{x_0} = V_B \cos\alpha$$
$$V_{y_0} = V_B \sin\alpha$$

Подставляя начальные условия в (71), (73), (74), (75), находим:

$C_3 = V_B \cos\alpha;$ $\qquad C_4 = 0$
$C_5 = V_B \sin\alpha;$ $\qquad C_6 = 0.$

Получим следующие уравнения проекций скоростей на оси координат:

$$V_x = V_B \cos\alpha; \qquad V_y = gt + V_B \sin\alpha \qquad (76)$$

И уравнения движения тела:

$$\left.\begin{aligned} x &= V_B \cos\alpha \cdot t \\ y &= \frac{gt^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot t \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Запишем конечные условия:

при $t = T;\quad x = d;\quad y = h;\quad V_x = V_{Cx};\quad V_y = V_{Cy}$.

Подставим конечные условия во второе уравнение системы (77):

$$h = \frac{gT^2}{2} + V_B \sin\alpha \cdot T\ .$$

Подставляя численные значения, получим уравнение для нахождения T:

$$5 = \frac{9{,}8 \cdot T^2}{2} + 7 \cdot 0{,}5 \cdot T$$

$$4{,}9 \cdot T^2 + 3{,}5 \cdot T - 5 = 0,$$

откуда $T = 0{,}67c$.

Подставляя T в (76), получим:

$$V_{Cx} = V_B \cos\alpha = 7 \cdot 0{,}867 = 6{,}07 \, м/с$$

$$V_{Cy} = V_B \sin\alpha \cdot T = 7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}67 = 2{,}35 \, м/с$$

Находим V_C:

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} = \sqrt{6{,}07^2 + 2{,}35^2} = 6{,}51 \, м/с.$$

Для нахождения уравнения траектории из первого уравнения системы (77) выразим t через x и подставим во второе:

$$t = \frac{x}{V_B \cos\alpha}$$

$$y = \frac{g}{2V_B^2 \cos^2\alpha} x^2 + \frac{V_B \sin\alpha \cdot x}{V_B \cos\alpha},$$

или после преобразований

$$y = \frac{g}{2V_B^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \cdot tg\alpha .$$

5 КУРСОВАЯ РАБОТА

5.1 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае переносного вращательного движения

По заданным уравнениям относительного движения точки *M* и переносного движения тела *D* определить для момента времени $t=t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*.

Схемы механизмов показаны на рисунках 39-42, а необходимые для расчета данные приведены в таблице 3.

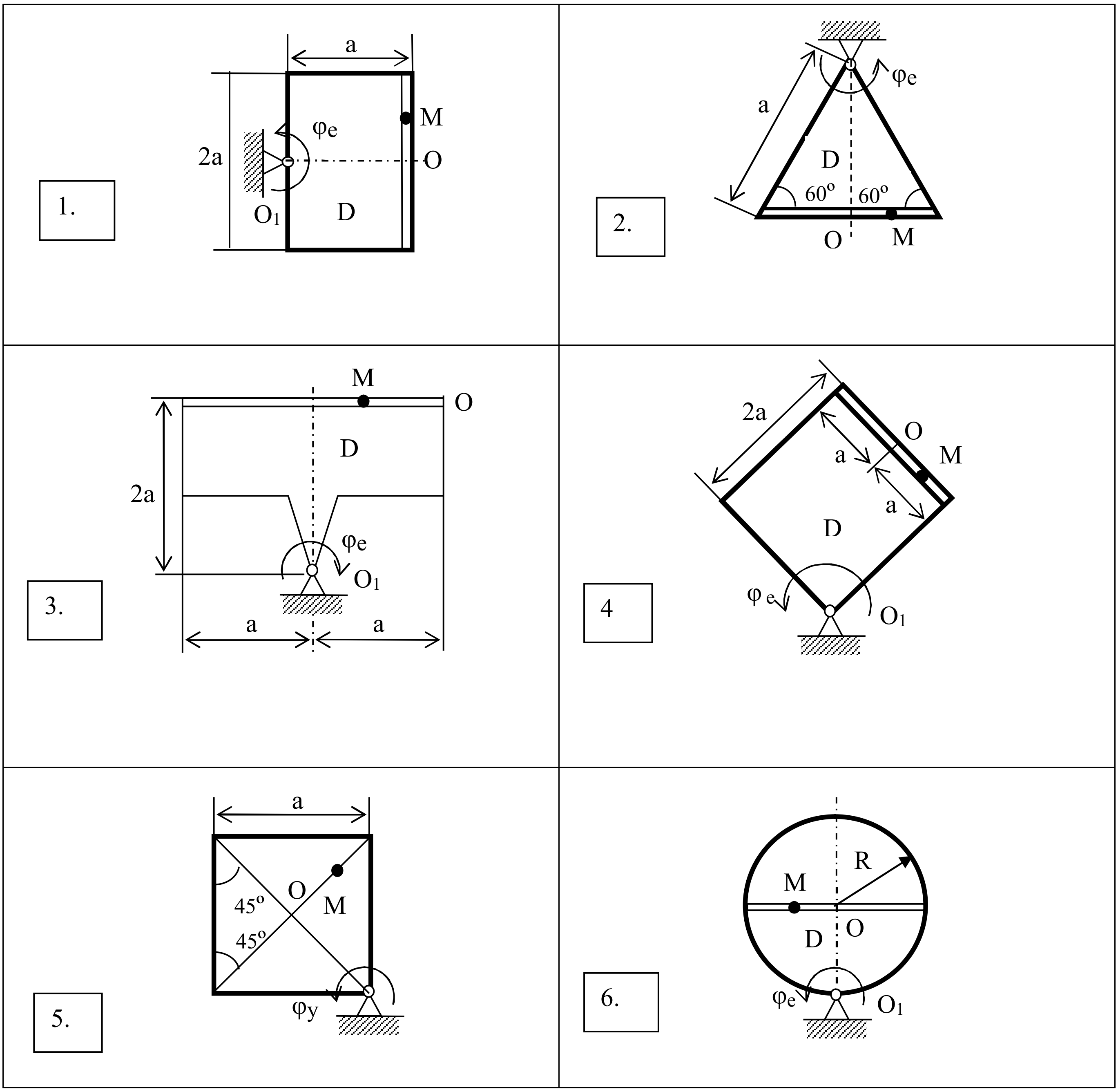
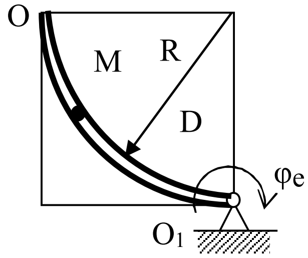
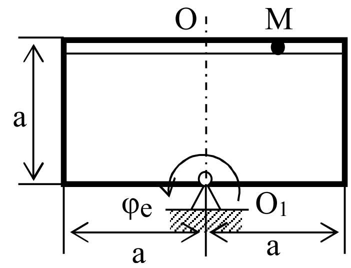


Рисунок 39

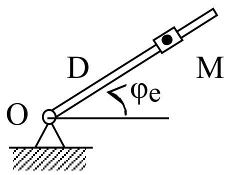
7.



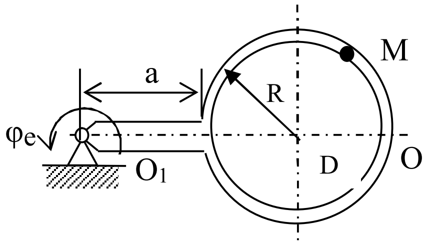
8.



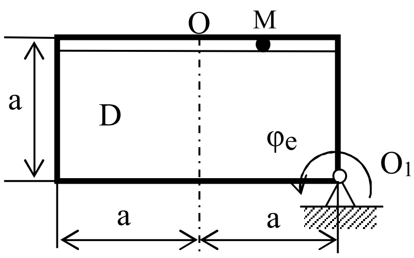
9.



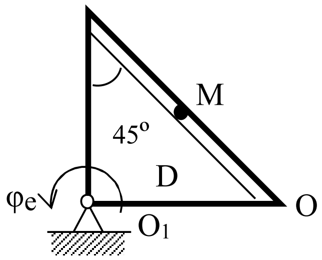
10.



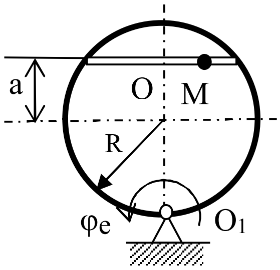
11.



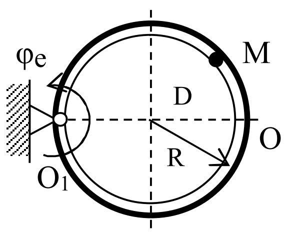
12.



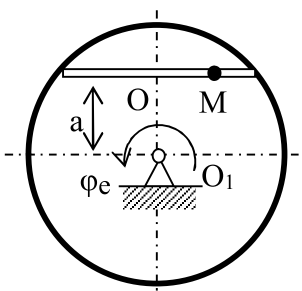
13.



14.



15.



16.

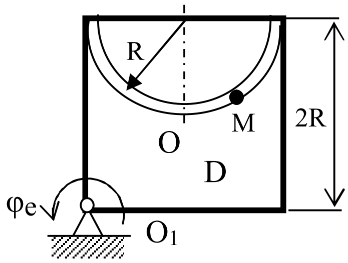


Рисунок 40

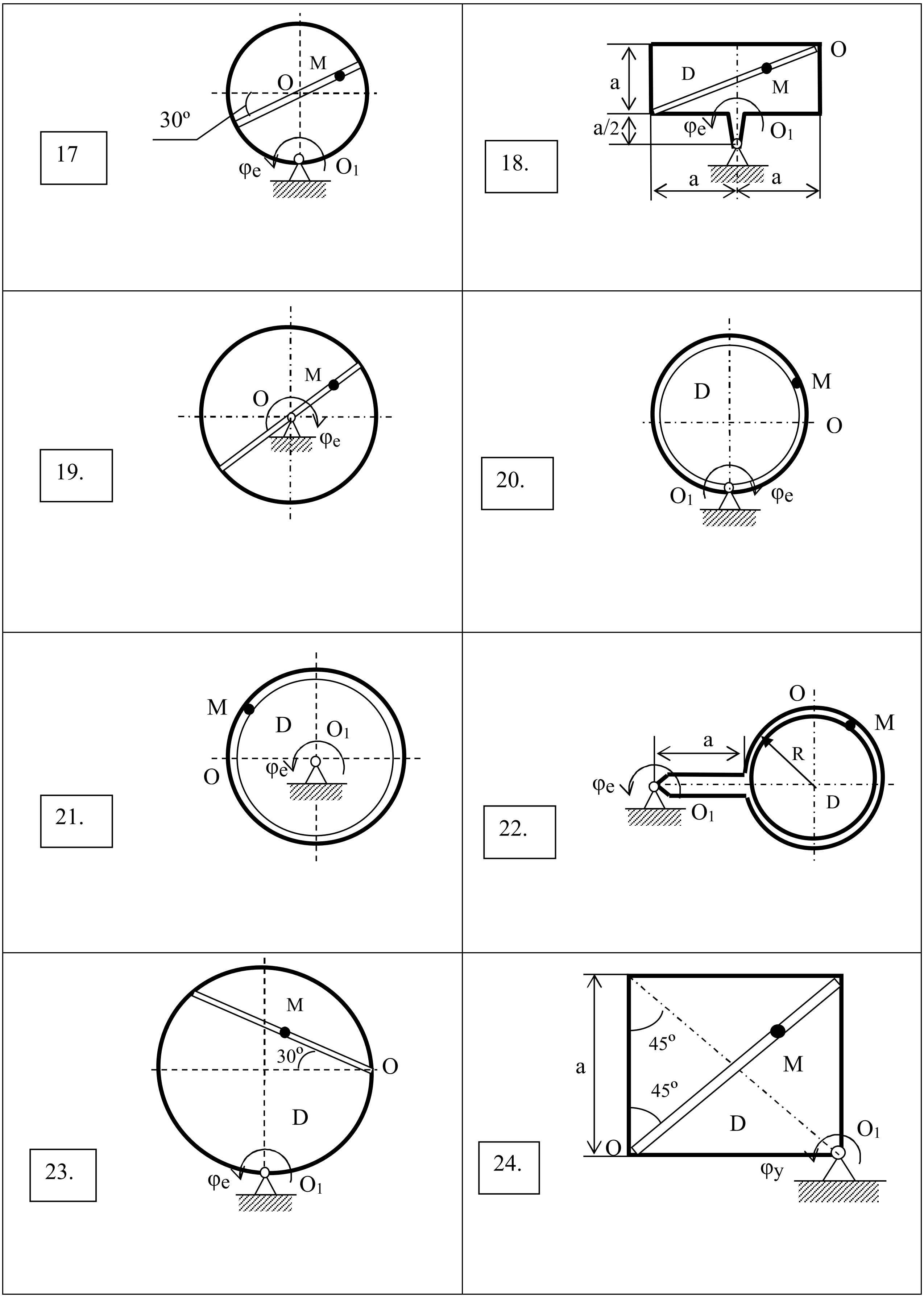

17
30°
M
O
φe
O1
18.
O
D
M
a
a/2
φe
O1
a
a
19.
M
O
φe
20.
D
M
O
O1
φe
21.
M
D
O1
O
φe
22.
O
M
a
R
φe
O1
D
23.
M
30°
O
D
φe
O1
24.
45°
45°
a
M
D
O
O1
φy

Рисунок 41

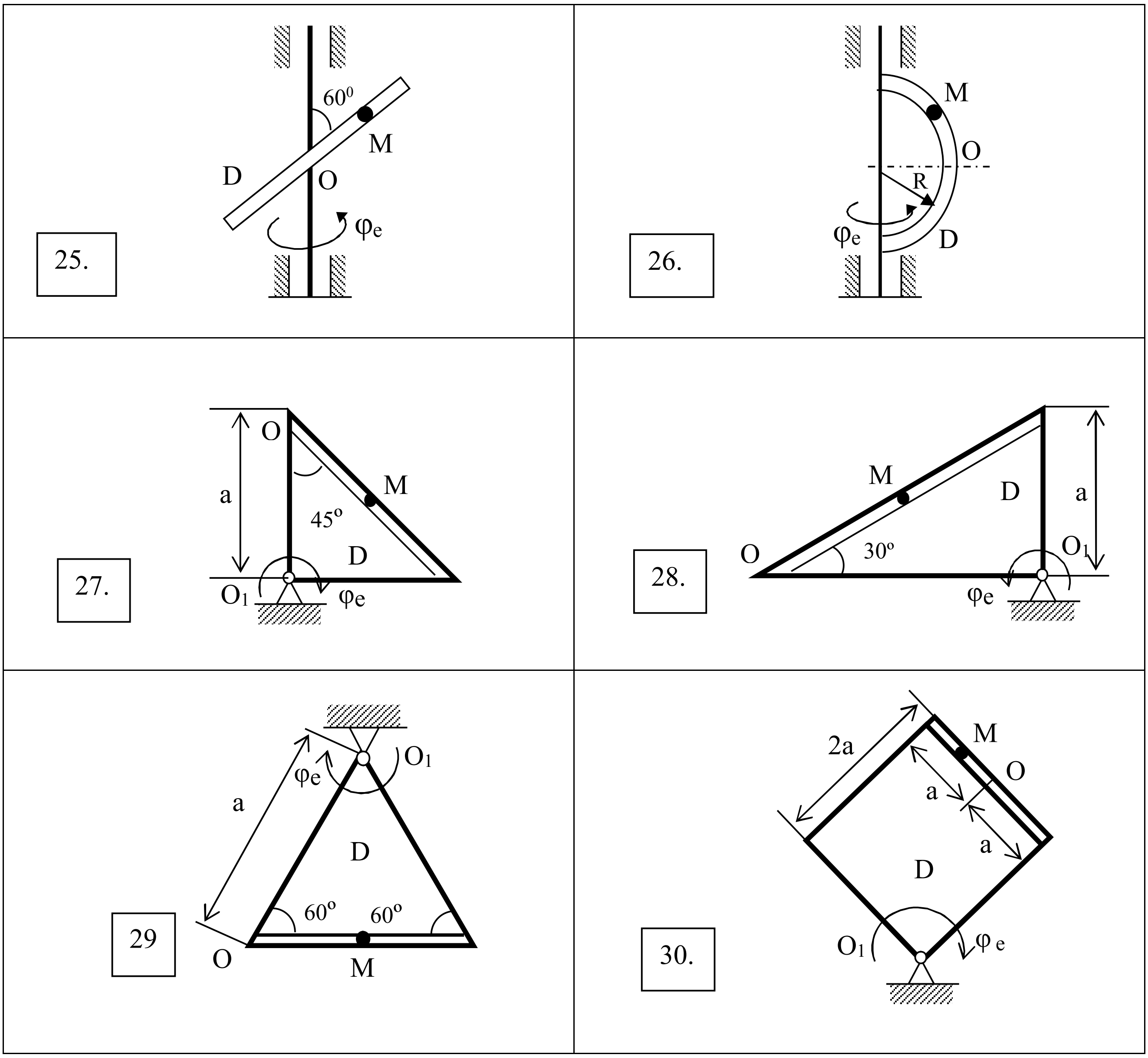


Рисунок 42

Таблица 3

Номер варианта	Уравнение вращения тела $\varphi_{\mathring{a}} = f_1(t)$ рад.	Уравнение относительного движения точки OM $=S_r = f_2$ (t), см	t_1 сек	R см	a см
1	2	3	4	5	6
1	$2t^2 - t^2$	18sin(πt/4)	2/3	-	25
2	$0{,}5t^2$	20cos(2πt)	3/8	-	40
3	$2t + 0{,}5t^2$	$6t^3$	2	-	30

1	2	3	4	5	6
4	$0,6t^2$	$10\sin(\pi t/6)$	1	-	20
5	$3t – 0,5t^3$	$40\cos(\pi t/6)$	2	-	60
6	$0,4t^2 + t)$	$20\sin(\pi t)$	5/3	20	-
7	$0,75t + 1,5t^2$	$150\pi t^2$	1/6	25	-
8	$3t^2 + t$	$20 \sin (\pi t/6)$	2	-	30
9	$4t + 1,6t^2$	$10 + 10 \sin (2\pi t)$	1/8	-	-
10	$5t -4t^2$	$(15/8)\pi t^3$	2	30	30
11	$2t^2 – 0,5t$	$25 \sin (\pi t/3)$	4	-	25
12	$0,2t^3 + t$	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	2	-	60
13	$t - 0,5t^2$	$20 \sin (\pi t)$	1/3	-	20
14	$2t – 0,3t^2$	$75\pi(0,1t + 0,3t^3)$	1	30	-
15	$t – 0,5t^2$	$20 \sin (\pi t)$	1/3	-	20
16	$6t + t^2$	$20 \cos (\pi t/6)$	3	60	-
17	$8t –t^2$	$10t + t^3$	2	30	-
18	$0,5t^2$	$8t^3 + 2t$	1	-	$4\sqrt{5}$
19	$t + 3t^2$	$6t + 4t^3$	2	40	-
20	$2t^3 – 3t$	$30\pi \cos (\pi t/6)$	2	30	-
21	$2t – 4t^2$	$25\pi(t + t^2)$	1/2	25	-
22	$5t^2 – 4t$	$(5/2)\pi t^3$	40	40	-
23	$2t^2 – 3t$	$(5\sqrt{3}/3)t^3$	2	20	-
24	$0,6t^2$	$(5\sqrt{2}/2)t^3$	2	-	40
25	$0,6t^2$	$10 \sin (\pi t/6)$	1	-	-

1	2	3	4	5	6
26	$4t - 0{,}2t^2$	$10\sin(\pi t/4)$	2/3	30	-
27	$t^2 + 2t$	$3\sqrt{2}\,(t^2 + t)$	2	-	48
28	$2t^3 - 5t^2$	$6(t + 0{,}5t^2)$	2	-	48
29	$2t - 0{,}25t^2$	$2{,}5t^3$	2	-	40
30	$8t^2 - 3t$	$10\sin(\pi t/6)$	1	-	20

5.2 Пример выполнения курсовой работы

Треугольник *OAB* вращается вокруг неподвижной оси *oz* по закону: $\varphi_e = 3t - t^2$ *(рад)*. По гипотенузе треугольника от О до А движется точка М по закону: $S_r = 10t^2 + 2t$ *(м)* (рис.42). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени $t_1 = 1c$, $\alpha = 30^0$.

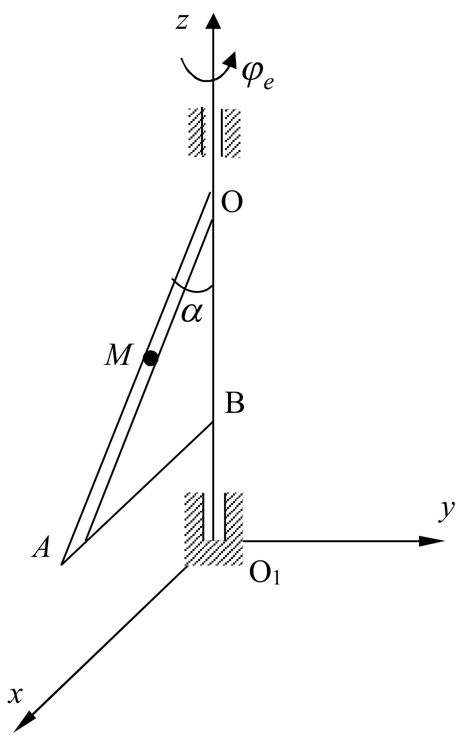


Рисунок 42

Точка М совершает сложное движение, состоящее из переносного и относительного движений. Относительное движение точки М – движение точки относительно треугольника OAB по гипотенузе OA.

Для получения скорости и ускорения точки в относительном движении мысленно остановим вращение треугольника вокруг оси Oz.

Нахождение относительной скорости и относительного ускорения точки будем проводить в следующем порядке:

1. Определяем положение точки на относительной траектории в данный момент времени

$$\text{ÎÌ} = S_{r_1} = 10 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 12\text{ñì}$$

2. Находим относительную скорость точки

$$V_r = S_r' = 20t + 2$$

для $t_1 = 1c$: $$V_{r_1} = 20 \cdot 1 + 2 = 22\text{cì}\ /\text{ñ}$$

3. Находим относительное ускорение точки, которое состоит из двух составляющих

$$\overline{a}_r = a_r^\tau + a_r^n$$

$$a_r^\tau = V_r' = (20t + 2)' = 20\text{ñì}\ /\text{ñ}^2 > 0$$

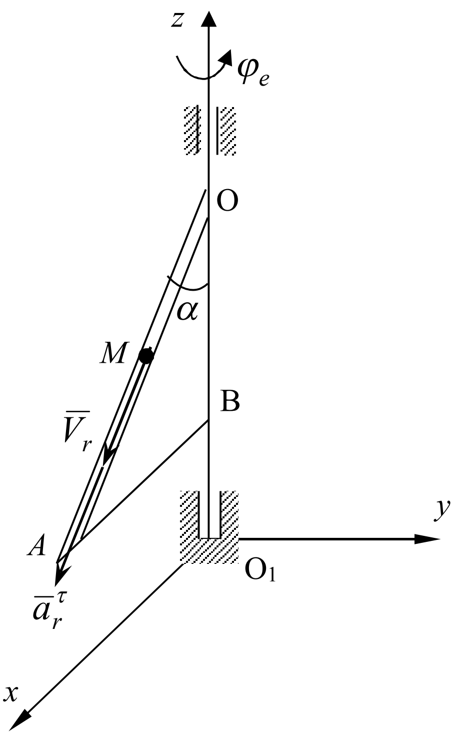


Рисунок 43

Так как $a_r^\tau = const$ и по знаку совпадает с относительной скоростью, то относительное движение равноускоренное.

Так как траектория относительного движения прямая линия, то радиус кривизны $\rho = \infty$, поэтому

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{V_r^2}{\infty} = 0\,.$$

Таким образом, относительное ускорение совпадает с касательным ускорением и направлено из точки М по гипотенузе треугольника ОАВ к точке А.

Для исследования переносного движения мысленно остановим движение точки М по гипотенузе ОА. Переносное движение точки М вызвано вращением треугольника ОАВ вдоль оси O_1z. Определим угловую скорость, угловое ускорение треугольника и переносную скорость, переносное ускорение точки М.

Находим угловую скорость переносного вращения:

$$\omega_{\text{å}} = \varphi_{\text{å}}' = \left(3t - t^2\right)' = 3 - 2t$$

Для $t_1 = 1c$

$$\omega_{e_1} = 3 - 2 \cdot 1 = 1\,\text{ðàä}/\text{ñ}.$$

Так как $\omega_{\text{å}_1} > 0$, то треугольник ОАВ вращается в сторону положительного отсчета угла $\varphi_{\text{å}}$ и вектор $\overline{\omega}_{\text{å}}$ направлен вдоль оси вращения вверх (вектор $\overline{\omega}_{\text{å}}$ направляем вдоль оси вращения так, что бы глядя ему навстречу, видеть вращение тела происходящим против хода часовой стрелки).

Находим угловое ускорение треугольника

$$\varepsilon_{\text{å}} = \omega_{\text{å}}' = (3 - 2t)' = -2\,\text{ðàä}/\text{ñ}^2 < 0$$

$$\varepsilon_e = const\,,$$

следовательно переносное вращение равнозамедленное.

Определяем модуль переносной скорости точки М:

$$\left|V_e\right| = \left|\omega_{e_1}\right| \cdot h\,,$$

где h – кратчайшее расстояние от точки М до оси вращения, определяемое длиной перпендикуляра, опущенного из точки М на ось вращения:

$$h = MK = OMSin\alpha = 12 \cdot Sin30^0 = 6\text{ñì}\,,$$

$$\left|V_e\right| = 1 \cdot 6 = 6\text{ñì}/\text{ñ}$$

Вектор $\overline{V_e}$ направлен из точки М перпендикулярно радиусу МК в сторону вращения тела.

Находим переносное ускорение точки, которое состоит из двух слагаемых:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^{\,n} + \overline{a}_e^{\,\tau}.$$

Вектор нормального переносного ускорения точки М направлен по МК к оси вращения. Модуль этого ускорения определяем по формуле:

$$\left|a_e^n\right| = \omega_{e_1}^2 \cdot h = 1^2 \cdot 6 = 6\tilde{n}\grave{i}\ /\tilde{n}^2.$$

Вектор касательного переносного ускорения направлен перпендикулярно МК в сторону, противоположную вращению треугольника, т.к. переносное вращение замедленное. Модуль этого ускорения определяем по формуле:

$$\left|a_e^\tau\right| = \left|\varepsilon_{\mathring{a}_1}\right| \cdot h = 2 \cdot 6 = 12\tilde{n}\grave{i}\ /\tilde{n}^2.$$

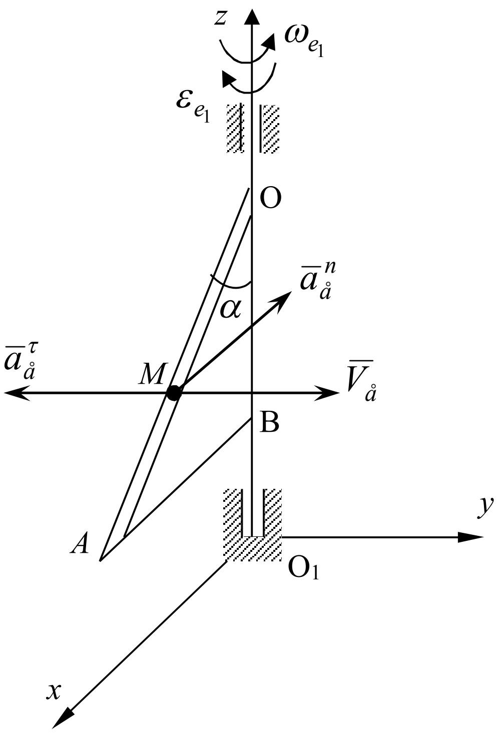


Рисунок 44

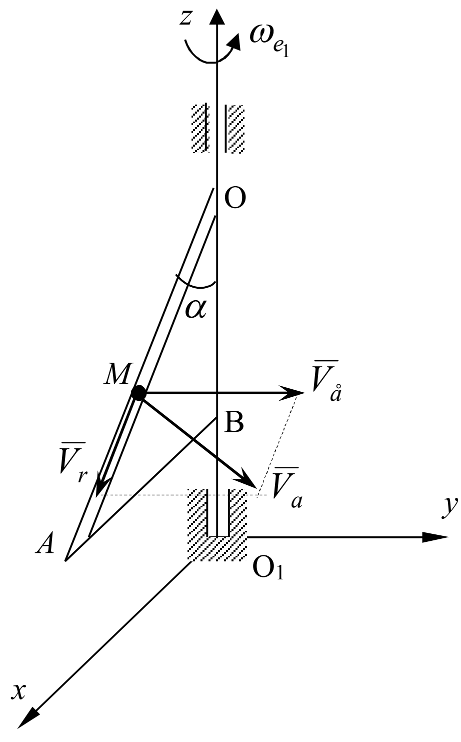


Рисунок 45

Определи абсолютную скорость точки по теореме сложения скоростей:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r$$

Так как вектор $\overline{V}_e$ перпендикулярен вектору $\overline{V}_r$, то модуль абсолютной скорости точки находим по теореме Пифагора:

$$\left|V_a\right| = \sqrt{V_{e_1}^2 + V_{r_1}^2} = \sqrt{6^2 + 22^2} = 22{,}8\tilde{n}\grave{i}\ /\tilde{n}.$$

Вектор абсолютного ускорения точки определяем по теореме сложения ускорений:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_r + \overline{a}_c \qquad (*)$$

Переносное и относительное ускорения уже найдены. Неизвестным является вектор $\overline{a}_c$, который определяем по формуле:

$$\overline{a}_c = 2\left[\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\right]$$

Направление векторов $\overline{\omega}_e$, $\overline{V}_r$ указаны на чертеже. Угол между ними равен:

$$180^0 - 30^0 = 150^0$$

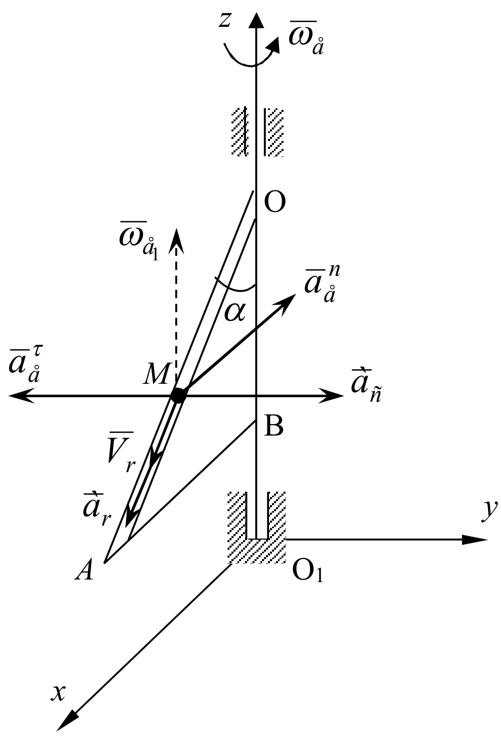


Рисунок 46

Модуль ускорения Кориолиса равен:

$$\left|a_c\right| = 2\left|\omega_{e_1}\right| \cdot \left|V_{r_1}\right| Sin\left(\overline{\omega}_{e_1}, \hat{}\ \overline{V}_{r_1}\right).$$

Подставляя значения $\omega_{\mathring{a}_1}$, V_{r_1}, найденные ранее, имеем:

$$\left|a_c\right| = 2 \cdot 1 \cdot 22 \sin 150^0 = 2 \cdot 22 \cdot 0{,}5 = 22\, ðàä / ñ^2 .$$

Направление вектора $\overline{a}_c$ определяем по правилу векторного произведения. Вектор $\overline{a}_c$ направлен перпендикулярно плоскости треугольника OAB таким образом, что бы глядя ему навстречу, видеть кратчайший поворот от вектора $\overline{\omega}_{å}$ к вектору $\overline{V_r}$ против хода часовой стрелки. Направление вектора $\overline{a}_c$ показано на рисунке 46.

Абсолютное ускорение точки М определяем по формуле (*), используя аналитический метод. Для этого абсолютное ускорение спроектируем на оси x, y, z:

$$a_{ax} = -\left|a_e^n\right| + \left|\overline{a}_r\right| \sin 30^0 = -6 + 20 \cdot 0{,}5 = 4 ñì\ / ñ^2$$

$$a_{aó} = \left|a_{ñ}\right| - \left|a_{å}^{\tau}\right| = 22 - 12 = 10 ñì\ / ñ^2$$

$$a_{az} = -\left|a_r\right| \cos 30^0 = -20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -10\sqrt{3} ñì\ / ñ^2 .$$

Модуль абсолютного ускорения точки определяем по формуле:

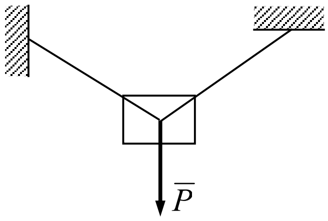
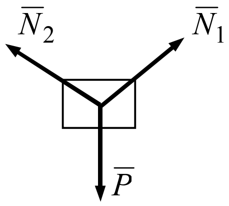
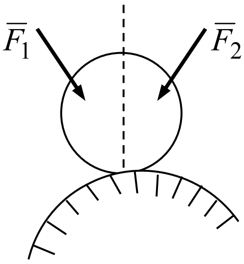
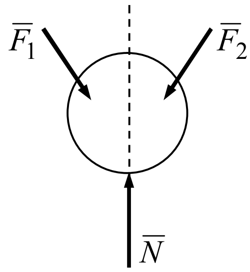
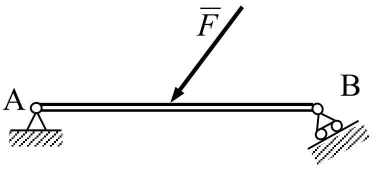
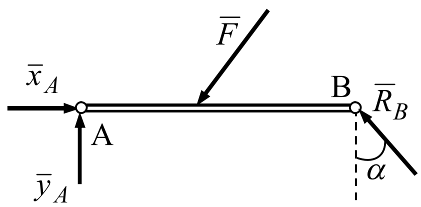
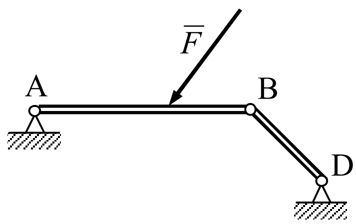
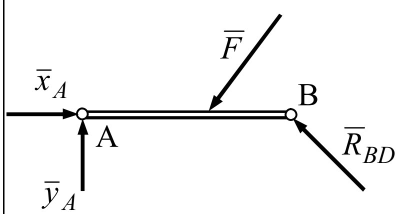
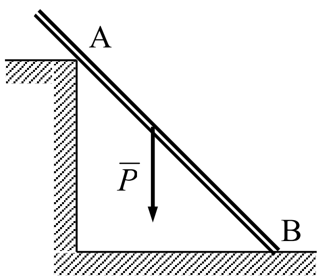
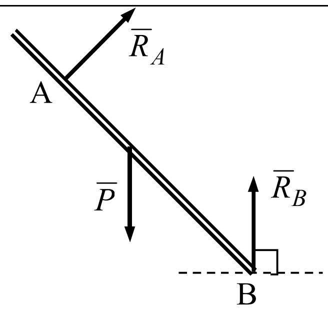
$$\left|a_a\right| = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{4^2 + 10^2 + \left(-10\sqrt{3}\right)^2} = 20{,}4 ñì\ / ñ^2 .$$

Ответ: $\left|V_a\right| = 22{,}8 ñì\ / ñ,\quad \left|a_a\right| = 20{,}4 ñì\ / ñ^2$.

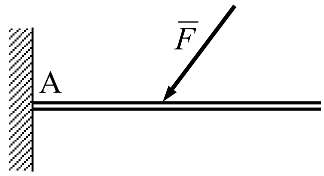
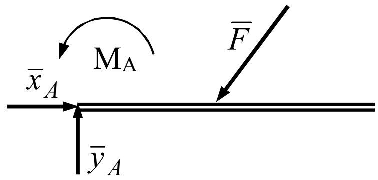
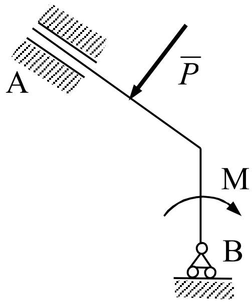
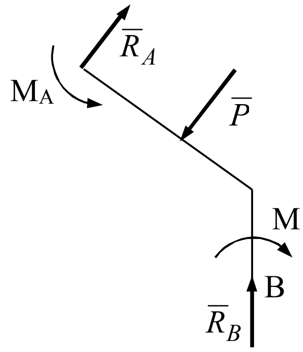
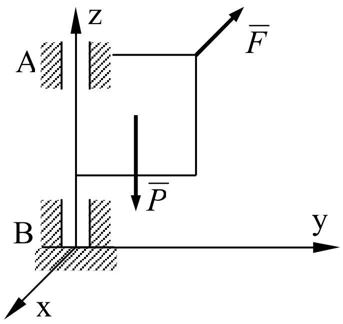
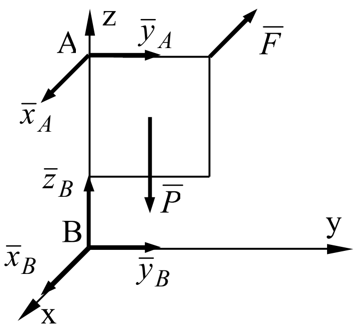
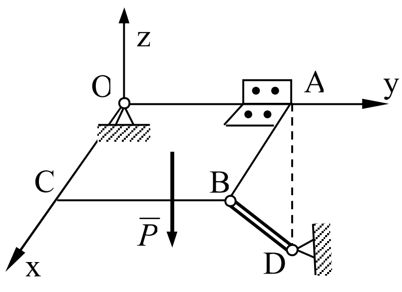
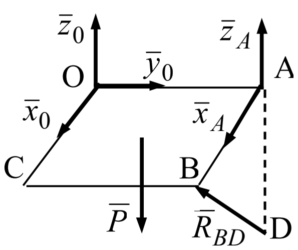
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1990г. и другие издания.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1998г. и другие издания.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, часть 1,2. – Санкт-Петербург, 1998г. и другие издания
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике, 1985г. и другие издания
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А.А.Яблонского, - М.: Высшая школа, 1985г.
6. Сборник коротких задач по теоретической механике. Под ред. О.Э.Кепе, - М. Высшая школа, 1989г.

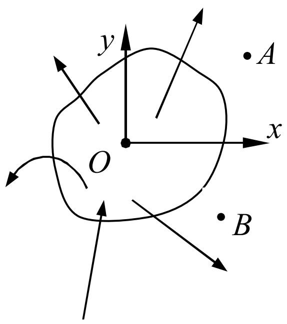
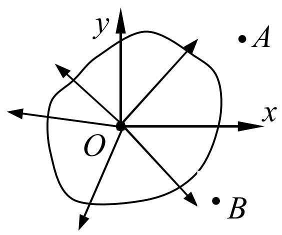
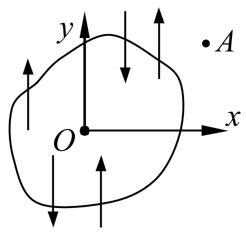
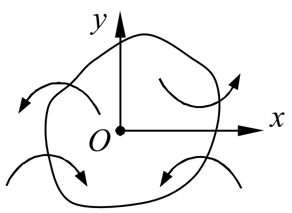
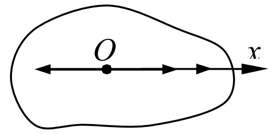
ПРИЛОЖЕНИЕ А
ОСНОВНЫЕ ТИПЫ СВЯЗЕЙ И ИХ РЕАКЦИИ

№	Название связи	Схематический чертеж	Направление реакций
1	Гибкая нерастяжимая нить		
2	Гладкая поверхность		
3	Шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опоры		 $\overline{R}_B \perp$ *опорной поверхности*
4	Невесомый шарнирный стержень		
5	Опора на острие		

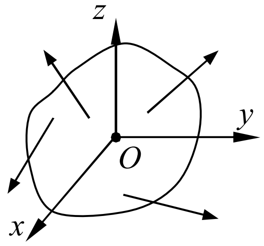
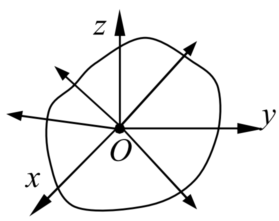
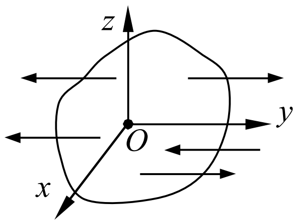
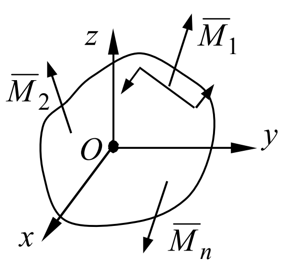
ОСНОВНЫЕ ТИПЫ СВЯЗЕЙ И ИХ РЕАКЦИИ

№	Название связи	Схематический чертеж	Направление реакций
6	Жесткая заделка		
7	Скользящая заделка		
8	Цилиндрический шарнир и подпятник		
9	Сферический шарнир, петля		

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ
Плоские системы сил.

№	Название системы сил	Схема чертежа	Условия равновесия
1	Произвольная система сил		I. $\sum_k F_{kx}=0$, $\sum_k F_{ky}=0$, $\sum_k M_0(\overline{F}_k)=0$ II. $\sum_k F_{kx}=0$, $\sum_k M_0(\overline{F}_k)=0$, $\sum_k M_A(\overline{F}_k)=0$ (OA $\not\perp$ Ox) III. $\sum_k M_0(\overline{F}_k)=0$, $\sum_k M_A(\overline{F}_k)=0$, $\sum_k M_B(\overline{F}_k)=0$ (O, A, B не лежат на одной прямой)
2	Система сходящихся сил		I. $\sum_k F_{kx}=0$, $\sum_k F_{ky}=0$ II. $\sum_k F_{kx}=0$, $\sum_k M_A(\overline{F}_k)=0$ III. $\sum_k M_A(\overline{F}_k)=0$, $\sum_k M_B(\overline{F}_k)=0$
3	Система параллельных сил		I. $\sum_k F_{ky}=0$, $\sum_k M_0(\overline{F}_k)=0$ II. $\sum_k M_0(\overline{F}_k)=0$, $\sum_k M_A(\overline{F}_k)=0$
4	Система пар сил		$\sum_k M_k=0$
5	Силы, действующие вдоль одной прямой		$\sum_k F_{kx}=0$

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ
Пространственные системы сил.

<table>
<tr><th>№</th><th>Название системы сил</th><th>Схема чертежа</th><th>Условия равновесия</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Произвольная система сил</td><td>
</td><td>$\sum_k F_{kx} = 0$
$\sum_k F_{ky} = 0$
$\sum_k F_{kz} = 0$
$\sum_k M_x(\overline{F}_k) = 0$
$\sum_k M_y(\overline{F}_k) = 0$
$\sum_k M_z(\overline{F}_k) = 0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Система сходящихся сил</td><td>
</td><td>$\sum_k F_{kx} = 0$
$\sum_k F_{ky} = 0$
$\sum_k F_{kz} = 0$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Система параллельных сил</td><td>
</td><td>$\sum_k F_{ky} = 0$
$\sum_k M_x(\overline{F}_k) = 0$
$\sum_k M_z(\overline{F}_k) = 0$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Система пар сил</td><td>
</td><td>$\sum_k M_{kx} = 0$
$\sum_k M_{ky} = 0$
$\sum_k M_{kz} = 0$</td></tr>
</table>