8.4 Эллипстикалық теңдеу

8.4.1 Орнатуға арналған есеп.

Эволюциялық есептердің стационарлы шешімдері. Пуассон теңдеуіне арналған есепті қарастырайық

$$\begin{aligned} &\Delta u(x) = -f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G \\ &u(x)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad \Gamma = \partial G \end{aligned} \qquad (24\text{-}25)$$

мұндағы G – көпөлшемді тұйық аймақ Γ шекарасы бойынша. (24-25) қойылымдары эволюциялық есептен қарағанда бастапқы шарт қабылдамайды.

(24-25) есептерін стационарлы деп атайтын боламыз. Осыған орай эволюциялық есептерді параболалық теңдеулерге сол шекаралық шарттармен және бастапқы алынған мәндермен қарастырамыз:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{v}(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x) + f(x), \quad x \in G, \quad 0 \le t < +\infty, \\ &\mathrm{v}(x,t)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad \Gamma = \partial G, \\ &\mathrm{v}(x,0) = \mathrm{v}_0(x) \end{aligned} \qquad (26)$$

Математикалық курстарында былай көрсетілген: $t \to \infty$ эволюциялық есептердің шешімі (26) ортаквадраттық шешімге байланысты стационарлы есептермен қарастырылады (24-25).

Сонымен қатар,(24-25) есептердің орнына элиптикалық теңдеу үшін эволюциялық есептерді алуға болады (26), параболалық теңдеулер үшін сол кеңістік операторларымен алуға болады, бастапқы мәндерді еркін таңдап және v(x,t) мәндерін t бойынша есептеу керек. Стационарлы шектеу u(x), v(x,t) $t \to \infty$ бойынша ұмтылады және олар стационарлы есептің шешімі болады (24-25).

Бұл әдіс орнатуға арналған есеп деп аталады. Ол элиптикалық есептердегі сандық шешімді жақсы құрастырылған әдіс параболалық есеппен жүзеге асырылады, мысалы, екіөлшемді есептер үшін көлденең бойлау схемасы және үлкен санды өлшеу жағдайында локалды бірөлшемді схема қолданылады.

8.4.2 Дирихле айырым аппроксимациясының есептерін Пуассон теңдеуі үшін қарастыру.

Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін қарастырайық: келесі теңдеуді қанағаттандыратын $\overline{G} = G \cup \Gamma$ үзіліссіздік теңдеуін $u(x_1, x_2)$ функциясында табу керек

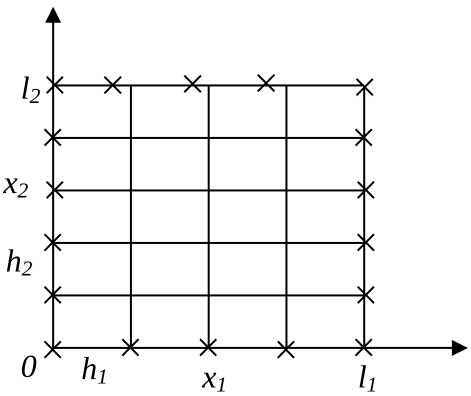
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \qquad (27)$$

және шекаралық шарттары $u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma$ болатын, мұнда G – үшбұрыш, $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$, Γ – оның шекарасы, $f(x), \mu(x)$ - берілген функция, (27) есебінің шешімі жалғыз және тегіс функция болып келеді.

$\overline{G}$ үшбұрышты торына енгіземіз:

$$\Omega_h = \left\{ \begin{array}{l} x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}),\ x_1^{(i)} = ih_1,\ i = 0,1,\dots,N_1,\ h_1 N_1 = l_1; \\ x_2^{(j)} = jh_2,\ j = 0,1,\dots,N_2,\ h_2 N_2 = l_2 \end{array} \right\}$$

x_1 айнымалысы бойынша h_1 қадамын және x_2 айнымалысы бойынша h_2 қадамы алынады, сурет 2.



Сурет 2. Үшбұрышты тор.

$y_{ij} = y(x_{ij}),\ f_{ij} = f(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h$ белгілеп, Дирихле (27) есебін келесі айырымдық схема бойыншы орнықтырамыз:

$$\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_1^2} + \dfrac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} = -f_{ij}, \\ i = 1,2,\dots,N_1 - 1, \quad j = 1,2,\dots,N_2 - 1, \\ y_{i,0} = \mu(x_1^i, 0), \quad y_{i,N_2} = \mu(x_1^i, l_2), \quad i = 1,2,\dots,N_1 - 1, \\ y_{0,j} = \mu(0, x_2^j), \quad y_{N_1,j} = \mu(l_1, x_2^j), \quad j = 1,2,\dots,N_2 - 1, \end{array} \qquad (28)$$

Құрылған айырым схемасы екінші ретті h_1 және h_2 бойынша қателік аппроксимациясына тең және өзімен бірге сызықты алгебралық теңдеудің y_{ij} қатысты жүйесін шешу, мұнда ол $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ теңдеуінен және сонша белгісізінен тұрады. Ол оң бөлік бойынша тұрақты және шекаралық шарттарға ие болып келеді.

(28) матрица жүйесі жоғары ретпен сипатталады.

8.4.3 Якоби және Зейдель әдістері.

(28) жүйесі үшін Якоби әдісі келесі түрде жазылады

$$\begin{gathered}2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y_{i,j}^{n+1}=\frac{y_{i+1,j}^n+y_{i-1,j}^n}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^n+y_{i,j-1}^n}{h_2^2}+f_{ij},\\ i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\quad n=0,1,\ldots\\ y_{i,0}^{n+1}=\mu(x_1^i,0),\quad y_{i,N_2}^{n+1}=\mu(x_1^i,l_2),\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\\ y_{0,j}^{n+1}=\mu(0,x_2^j),\quad y_{N_1,j}^{n+1}=\mu(l_1,x_2^j),\quad j=1,2,\ldots,N_2-1.\end{gathered}\tag{29}$$

мұнда y_{ij}^n - n-інші итерация бойынша x_{ij} нүктесіндегі мәні, ал y_{ij}^{n+1} - n+1-інші.

Якоби әдісі нақты берілгенге жету $O(h^{-2})$ итерациясын талап етеді. Бұл өте ақырын жүретін жинақтылық.

(29) жүйеге қатысты Зейдель әдісін қарастырамыз. Жалпы жағдайда Зейдель әдісі і номерлі белгісізі теңдеуде индекстен тұратын, і-ден үлкен, n-інші итерация мәнінің есептеуімен құрылады.

$$\begin{gathered}\frac{y_{i+1,j}^n-2y_{i,j}^{n+1}+y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^n-2y_{i,j}^{n+1}+y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}=-f_{ij},\\ i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\quad n=0,1,\ldots\\ y_{i,0}^{n+1}=\mu(x_1^i,0),\quad y_{i,N_2}^{n+1}=\mu(x_1^i,l_2),\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\\ y_{0,j}^{n+1}=\mu(0,x_2^j),\quad y_{N_1,j}^{n+1}=\mu(l_1,x_2^j),\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\end{gathered}\tag{30}$$

Зейдель әдісі негізінде айқын емес болып табылады, жаңа итерацияда y_{ij}^{n+1} мәнін табу қиындық тудырмайды, себебі ол үшбұрышты матрицаға қарайды. Мұнда тек берілген есептерді дұрыс орналастыру қажет.

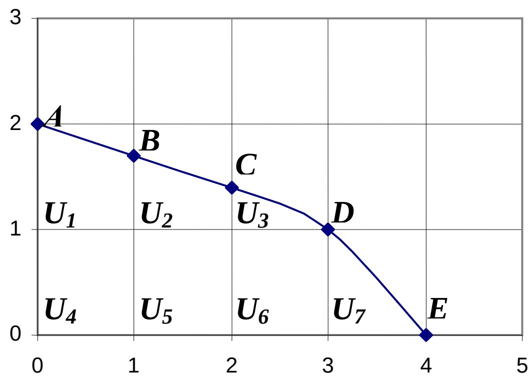
Зейдель әдісі Якоби әдісінен қарағанда әлдеқайда жылдам байланысады, бірақ берілген нақтылыққа жету үшін итерация саны мұнда h^{-2} ретті өлшемімен сәйкес келеді.

2 мысал

Тор әдісін пайдаланып, дифференциалды Лаплас теңдеуін $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ берілген шекаралық шарттарды шешуді құрастырамыз, қадамдары h=1, $\left.\begin{matrix} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4,4] \end{matrix}\right\}(\Gamma)$, $u(x,y)\big|_\Gamma = |x| + \frac{y^2}{2}$

Шешуі:

Г аймағы OY осіне қатысты симметриялы, сондықтан тек бірінші ширек қаралады. Г шекарасын құрамыз. Сурет 3 қараймыз.



Сурет 3. Г аймағы.

h=1 қадамды тор құрамыз.

Шекарада u(x,y) функциясының мәнін есептейміз, 3 кесте:

3 кесте. Шекарадағы функцияның мәні

Нүкте	A	B	C	D	E
x	0	1	2	3	4
y	2	1,7	1,4	1	0
u(x,y)	2	2,45	2,98	3,5	4

Функцияның u(x,y) мәнін анықтау үшін ішкі нүктеде осы мәндерден тұратын теңдеу жүйесін құрамыз. Әрбір теңдеу келесі айырым схемасынан пайда болады:

$$\frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} = 0,$$

$$y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j} + y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1} = 0,$$

$$y_{i,j} = \frac{1}{4}(y_{i+1,j} + y_{i-1,j} + y_{i,j-1} + y_{i,j+1}).$$

Сызықты теңдеудің жүйесі кеесі түрде болады:

$$
\begin{cases}
u_1 = \frac{1}{4}(2 + 2\cdot u_2 + u_4) \\
u_2 = \frac{1}{4}(2{,}45 + u_1 + u_3 + u_5) \\
u_3 = \frac{1}{4}(2{,}98 + 3{,}5 + u_2 + u_6) \\
u_4 = \frac{1}{4}(4\cdot u_2) \\
u_5 = \frac{1}{4}(u_4 + u_6 + 2\cdot u_2) \\
u_6 = \frac{1}{4}(2\cdot u_3 + u_5 + u_7) \\
u_7 = \frac{1}{4}(u_6 + 2\cdot 3{,}5 + 4)
\end{cases}
$$

Жүйе итерация әдісімен шешілген. Жүйенің шешілуі:

u_1=2,55, u_2=2,73, u_3=3,09, u_4=2,73, u_5=2,83, u_6=3,13, u_7=3,53.

Осылайша, әрбір тор түйіні үшін функция мәні табылады.