8.3 Жылуөткізгіштік теңдеуді шешу үшін айырымдық схемалар

Жылуөткізгіштік теңдеуін қарастырайық

Еспеп қойылымы

$\{0 < x < 1,\ 0 < t \le T\}$ облысындакелесі теңдеудің шешімін табу керек

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (7)$$

Шешім бастапқы шартқа

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (8)$$

Және шеттік шартқа сәйкес болуы қажет

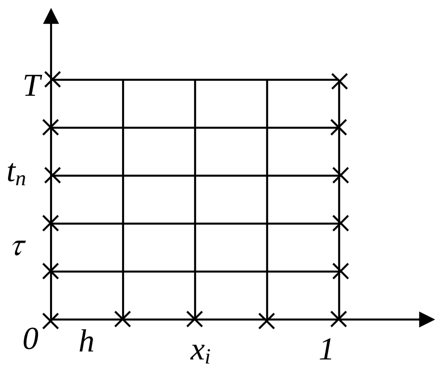
$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t) \qquad (9)$$

Мында $f(x,t),\ u_0(x),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)$ - берілген функциялар.

8.3.1 Айқын схема.

x айнымалмен тор құрылсын: $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,N,\ hN = 1\}$, және t айнымалымен, τ қадамды тор: $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,\dots,K,\ \tau K = T\}$.

$(x_i, t_n),\ i = 0,1,\dots,N,\ n = 0,1,\dots,K$ нүктелер тордың түйіндерын құрады $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, сурет 1.



1 – сурет. Кенестік-уақыттық тор.

$\omega_{h,\tau}$ торда анықталған $y(x,t)$ - функция $y_i^n = y(x_i, t_n)$ белгіленеді. Дифференциальное теңдеу (7) аппроксимациаланады:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n, \qquad (10)$$

аппроксимация реті $O(\tau + h^2)$.

Есептің айырымдық схемасы:

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}+f_i^n\\
&i=1,2,\dots,N-1,\ n=0,1,\dots,K-1,\ hN=1,\ \tau K=T\ . \qquad (11)\\
&y_0^n=\mu_1(t_n),\quad y_N^n=\mu_2(t_n),\quad n=0,1,\dots,K\\
&y_i^0=u_0(x_i),\quad i=0,1,\dots,N
\end{aligned}
$$

Нөлінші қабаттағы шешім бастапқы шартымен анықталады $y_i^0=u_0(x_i),\quad i=0,1,\dots,N$. Егер шешім $y_i^{n+1},\quad i=0,1,\dots,N$ n қабатта табылса, онда шешім $y_i^{n+1},\quad i=0,1,\dots,N$ n+1 қабатта айқын формуламен табылады:

$$y_i^{n+1}=y_i^n+\tau\left(\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}+f_i^n\right),\ i=1,2,\dots,N-1\ , \qquad (12)$$

ал $y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\quad y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$ шеткі шарттан анықталады.

(11) схеманың аппроксимация қателігі тең$O(\tau+h^2)$. Айқын схеманы (11) тек қана $\tau\le 0{,}5h^2$ шарт орындался қолдануға болады.

8.3.2 Айқын емес схема.

Жылуөткізгіштік теңдеуінің айқын емес схемасы

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2}+f_i^n\\
&i=1,2,\dots,N-1,\ n=0,1,\dots,K-1,\ hN=1,\ \tau K=T \qquad (13)\\
&y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\quad y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\quad n=0,1,\dots,K-1\\
&y_i^0=u_0(x_i),\quad i=0,1,\dots,N
\end{aligned}
$$

Аппроксимация схемсының реті τ бойынша 1, h бойынша 2. (13) жүйнең шешімі $n=1$ басталады. y_i^n - арқылы y_i^{n+1} табу үшін келесі жүйне шешу керек

$$
\begin{aligned}
&\gamma y_{i+1}^{n+1}-(1+2\gamma)y_i^{n+1}+\gamma y_{i-1}^{n+1}=-F_i^n,\quad i=1,2,\dots,N-1,\\
&y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\quad y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),
\end{aligned} \qquad (14)
$$

мында $\gamma=\dfrac{\tau}{h^2},\quad F_i^n=y_i^n+\tau f_i^n$.

Бул жүйені қуалау әдісімен шешуге болады.

Бірпараметрлік схема. σ параметрін алсақ келесі айырымдық схема арқылы табылады

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1}+(1-\sigma)y_{\bar{x}x,i}^n+f_i^n$$
$$i=1,2,\dots,N-1,\ n=0,1,\dots,K-1,\ hN=1,\ \tau K=T \qquad (15)$$
$$y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}),\quad y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\quad n=0,1,\dots,K-1$$
$$y_i^0=u_0(x_i),\quad i=0,1,\dots,N$$

мұнда $y_{\bar{x}x,i}^{n+1}=\dfrac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2},\quad y_{\bar{x}x,i}^n=\dfrac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}$.

$\sigma=0$ болған жағдайда (15) айқын схема, $\sigma=1$ - айқын емес. Егер $\sigma=0{,}5$ болса схеманың аппроксимация реті $O(\tau^2+h^2)$.

8.3.3 Айнымалыларды бағыттау әдісі.

Көпөлшемді есептерді шешуге арналған әдістердің бірі, көпөлшемді әдістер бірөлшемдіге қатысты сипатқа негізделген, сонымен қатар ол өзіне оң мәнді айқын және айқын емес схемаларды сипаттайды: абсолютті тұрақтылық және қарапайым шешім. Бұл әдістің ішінде айырымдылық схемасына бір мысал келітсек, ол көбіне көлденең бойлай айырымдылық схемасы немесе Писмен-Рэчфорд схемасы деп аталады. Бұл схемада n қабатынан n+1 қабатына дейін екі кезеңде орындалады. Бірінші кезеңде жүйе теңдеуінен $y_{ij}^{n+1/2}$ аралық мәндері алынған.

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2}-y_{ij}^n}{0{,}5\tau}=\frac{y_{i+1,j}^{n+1/2}-2y_{i,j}^{n+1/2}+y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^n-2y_{i,j}^n+y_{i,j-1}^n}{h_2^2},\ x_{ij}\in\omega_h, \qquad (22)$$

Ал екінші кезеңде $y_{ij}^{n+1/2}$ табылған мәнін жүйе теңдеуінен y_{ij}^{n+1} табамыз

$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n+1/2}}{0{,}5\tau}=\frac{y_{i+1,j}^{n+1/2}-2y_{i,j}^{n+1/2}+y_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^{n+1}-2y_{i,j}^{n+1}+y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2},\ x_{ij}\in\omega_h, \qquad (23)$$

(22) теңдеуі x_1 айнымалысына қатысты айқын емес, ал (23) теңдеуі x_2 айнымалысы бойынша болып келеді. Сондықтан (22), (23) теңдеулерін бірөлшемді қуалау әдісінің жүйелі қолданысымен шешуге болады, алдымен x_1 бағыты бойынша, ал сосын x_2 бағыты бойынша.

(22)-(23) схемалары абсолютті тұрақты және τ және h бойынша екінші ретті суммарлы аппроксимацияға ие. Яғни, толық қабаттан жартылай қабатқа өту кезінде әрбір кеңістіктегі айырым уақытқа байланысты симметриялы болмайды және $O(\tau+h^2)$ қателігіне тең. Бірақ қабаттың екінші бөлігіндегі қателік біріншіні компенсирлейді, нәтижесінде толық қабаттан толық қателігі локалды аппроксимацияда бірқалыпты торларда болады $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$.

1 мысал. Бірінші есеп **ж**ылуөткізгіштік теңдеуін шешу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u(x,0) = u_0(x) = x + 0{,}125;$$

$$u(0,t) = u_1(t) = t + 0{,}125;$$

$$u(1,t) = u_2(t) = 1{,}125 + t;$$

$$0 \le x \le 1; \ 0 \le t \le 1;$$

Шешуі:

Уақытқа байланысты τ=0,1 қадамына тең торын қарастырайық және h=0,1 қадамы x кеңістік қадамы бойынша алынады.

Аппроксимациялық теңдеуге қатысты айқын емес схеманы қолданамыз.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2};$$

$$h^2(u_i^{j+1} - u_i^j) = \tau(u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1});$$

$$\tau u_{i-1}^{j+1} - u_i^{j+1}(2\tau + h^2) + \tau u_{i+1}^{j+1} = -h^2 u_i^j;$$

Бастапқы шартты аппроксимациялаймыз.

$$u(x,0) = u_0(x) = x + 0{,}125;$$

$$u_i^0 = x_i + 0{,}125;$$

Келесі шарттын аппроксимациялаймыз.

$$u(0,t) = u_1(t) = t + 0{,}125;$$

$$u_0^j = t^j + 0{,}125;$$

$$u(1,t) = u_2(t) = 1{,}125 + t;$$

$$u_{10}^j = 1{,}125 + t^j;$$

Осының нәтижесінде айырым есебі қойылды:

$$\tau u_{i-1}^{j+1} - u_i^{j+1}(2\tau + h^2) + \tau u_{i+1}^{j+1} = -h^2 u_i^j;$$

$$u_i^0 = x_i + 0{,}125;$$

$$u_0^j = t^j + 0{,}125;$$

$$u_{10}^j = 1{,}125 + t^j;$$

Бұл есеп қуалау әдісімен есептеледі. Қулаудың сәйкестілік шарты орындалды: $(2\tau + h^2) > 2\tau$;

j=0 үшін функцияның мәні бастапқы шарттан табылады, j=1, …, 10 үшін функция мәні қуалау әдісінің көмегімен табылады. Қуалаудың нәтижесі j=1, $t = 0{,}1$ үшін 1 кестеде көрсетілген.

1 кесте. Қуалау әдісінің жүзеге асуы.

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{a_i}$	$\mathbf{b_i}$	$\mathbf{c_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{\beta_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\mathbf{f_i}$
0	0,00	0,10	0,10	0,21			0,225	0,001
1	0,10	0,10	0,10	0,21	0,00	0,23	0,301	0,002
2	0,20	0,10	0,10	0,21	0,48	0,12	0,384	0,003
3	0,30	0,10	0,10	0,21	0,62	0,09	0,473	0,004
4	0,40	0,10	0,10	0,21	0,67	0,09	0,567	0,005
5	0,50	0,10	0,10	0,21	0,70	0,10	0,665	0,006
6	0,60	0,10	0,10	0,21	0,71	0,12	0,767	0,007
7	0,70	0,10	0,10	0,21	0,72	0,14	0,873	0,008
8	0,80	0,10	0,10	0,21	0,73	0,16	0,984	0,009
9	0,90	0,10	0,10	0,21	0,73	0,18	1,101	0,01
10	1,00	0,10	0,10	0,21	0,73	0,21	1,225	0,011

j=1, …, 10 үшін функция мәні қуалаудың көмегімен табылады, олар келесі 2 кестеде көрсетілген.

2 кесте. Есептеудің нәтижесі.

10	1	1,13	1,18	1,25	1,32	1,41	1,50	1,61	1,72	1,85	1,98	2,13
9	0,9	1,03	1,08	1,15	1,22	1,31	1,40	1,51	1,62	1,75	1,88	2,03
8	0,8	0,93	0,98	1,05	1,12	1,21	1,30	1,41	1,52	1,65	1,78	1,93
7	0,7	0,83	0,88	0,95	1,02	1,11	1,20	1,31	1,42	1,55	1,68	1,83
6	0,6	0,73	0,78	0,85	0,92	1,01	1,10	1,21	1,32	1,45	1,58	1,73
5	0,5	0,63	0,68	0,75	0,82	0,91	1,00	1,11	1,22	1,35	1,48	1,63
4	0,4	0,53	0,58	0,65	0,73	0,81	0,91	1,01	1,13	1,25	1,38	1,53
3	0,3	0,43	0,49	0,55	0,63	0,72	0,82	0,92	1,03	1,15	1,29	1,43
2	0,2	0,33	0,39	0,46	0,55	0,64	0,73	0,84	0,95	1,06	1,19	1,33
1	0,1	0,23	0,30	0,38	0,47	0,57	0,66	0,77	0,87	0,98	1,10	1,23
0	0	0,13	0,23	0,33	0,43	0,53	0,63	0,73	0,83	0,93	1,03	1,13
	t/x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
j/i		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10