8.2 Негізгі типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің мысалдары

8.2.1. Толқынды теңдеу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (3)$$

c - толқынның ортада таралу жылдамдығы. Осы теңдеу әр түрлі толқындардың: серпімді, дыбыс, электромагнитті ж.б. таралуын математикалық түрде сипаттайды. (3) теңдеу гиперболалық теңдеулердің классикалық мысалы.

Бірретті (3) ішек тербелісінің теңдеуі деп атайды:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Екіретті (3) теңдеуді мембрана тербелісінің теңдеуі деп атайды:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

8.2.2. Жылуөткізгіштік теңдеу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (4)$$

a -жылуөткізгіштік коэффициенті, $u(x,t)$ - температура.

(4) теңдеу жылудың біртекті изотропті ортада таралуын және диффузия құбылысын сипатайды.

Бірретті (4) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

және жіңішке біртекті стержінде жылудың жайылуын сипатайды

Екіретті (4) теңдеу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Біртекті жұқа пластинада жылудың жайылуын сипатайды . (4) теңдеу параболалық типіне жатады.

8.2.3. Пуассон теңдеуі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \qquad (5)$$

Біртекті изотоптық денеде жылудың жайылу стационардық процесін сипаттайды.

Жылу көзінің болмаған жағдайында (5) теңдеу - Лаплас теңдеуі болады:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (6)$$

(5) және (6) – эллиптикалық типті теңдеулер.

Жалпы жағдайда (3)-(6) - теңдеулердің шешімі шексіз көп болады. Сондықтан мұндай теңдеулерді шешу үшін оларға қосымша бастапқы және шекаралық шарттар беріледі.

Егер бір айнымалы уақыттан тәуелді болса, оған қатысты шарт бастапқы шарт деп аталады. Келесі айнымалы кеңістіктегі кординаттар болып, тұрақтандырылған белгілі бір нүктелердегі мәндерді көрсетсе, оған қатысты шарт шекаралық шарт деп аталады.

Егер теңдеу тек қана кеңістіктік координаттардан тәуелді болса, яғни уақытқа байланыссыз өзгеретін процесстерді сипаттаса, онда стационар дифференциалдық теңдеу деп аталады. Оған Гельмгольц теңдеуі, Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебі жатады. Ал теңдеу уақыт айнымалысынан тәуелді болып, қандай да бір процестің уақыт өзгеруіне байланысты мәндерін анықтауға қатысты болса, онда стационар емес теңдеу деп аталады. Оған Толқын теңдеуі, жылуөткізгіштік теңдеуі жатады.

Математикалық есепкелесі үш шартты камтамасыз ету керек:

есеп шешімі болуы;

есеп шешімінің жалғыздығы;

есеп шешімінің орнықтылығы, яғни есеп деректерінің аз қүбылыстары шішімнің аз күбылыстарына әкелу тиіс.

Ос шартар орындалса, онда қойылған есеп кисынды.