# 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРДІҢ САНДЫҚ ӘДІСТЕРІ

## 5.1 Интегралдарды жуықтап есептеу

[a,b] аралығында анықталған интегралды қарастырайық:

$$J = \int_a^b f(x)dx \,. \tag{1}$$

Егер $f(x)$ $[a,b]$ аралығында үзіліссіз функция болса онда интеграл (1) бар болады және Ньютон-Лейбниц формуласымен табылады:

$$J = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \tag{2}$$

$F(x)$ - $f(x)$ -тің алғашқы функциясы.

Кейде интеграл астындағы функция өте күрделі, немесе функцияның кестелік мәндері ғана берілуі мүмкін, сондықтан алғашқы функцияны алу мүмкін болмаған жағдайларда сандық интегралдау есебі қойылады.

Сандық интегралдауды сандық квадратура деп те атайды. Ал қолданылатын формулалар квадратуралық формулалар деп аталады.

Жұықталған теңдікті қарастырайық:

$$J = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) = J_N\,, \tag{3}$$

Осы теңдік $x_i \in [a,b]$ түйіндермен және $A_i$ коэффициенттермен анықталған квадратуралық формулала.

$$R_N(f) = J - J_N \tag{4}$$

(4) формуламен анықталған $R_N(f)$ квадратуралық формуланың қалдық мүшесі деп аталады.

Интеграл астындағы функцияның берілген түріне байланысты интегралдарды жуықтап есептеуі екіге жағдайға бөлінеді.

1 Есеп. $[a,b]$ аралығында $x_i$ түйіндерде $f$ функцияның мәндері $f_i$ анықталған, $f$ функция $F$ класына жатады. (1) интегралды жұықтап табу және қателікті бағалау қажет.

Егер интеграл астындағы функцияның кестелік мәндері берілу жағдайда есеп жоғарыдағыдай койылады.

2 Есеп. $[a,b]$ аралығында $f(x)$ функция аналитикалық өрнек түрінде анықталған. (1) интегралды белгілі бір $\varepsilon$ қателікпен жұықтап табу қажет.

Сандық интегралдаудың негізгі идеясы - интеграл астындағы функцияны [a,b] аралығында интерполяциялық полиномға жіктеу және полиномның әр мүшесін интегралдау арқылы есептеу процесін жеңілдету.

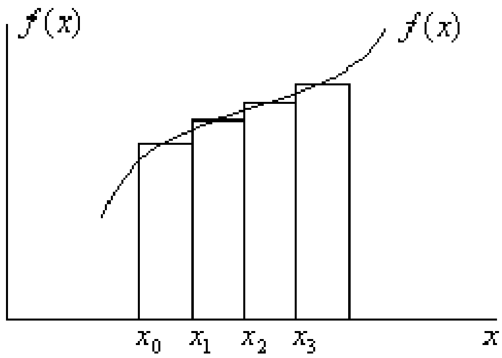
Интегралдың қателігін төмендету үшін интеграл астындағы функция анықталған [a,b] аралығы h қадаммен бірнеше аралыққа бөлу керек: xi+1-xi=h, i=1,2,…,n-1.

**Тіктөртбұрыштар формуласы** интегралды жұықтап табу квадратуралық формулаларының бірі, ең қарапайым формула болып саналады:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}})h, \quad R_n = \frac{b-a}{24}h^2 f''(\xi), \ \xi \in [a,b], \quad (5)$$

$x_i$ - $[a,b]$ интервалды бөлгендегі түйіндер, $h = x_{i-1} - x_i$ – қадам; $f(x_{i-1})$ – $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндінің орта нүктесінде функцияның мәні.

Тіктөртбұрыштар формуласының геометриялық мағынасы 1.- сүретте көрсетілген.



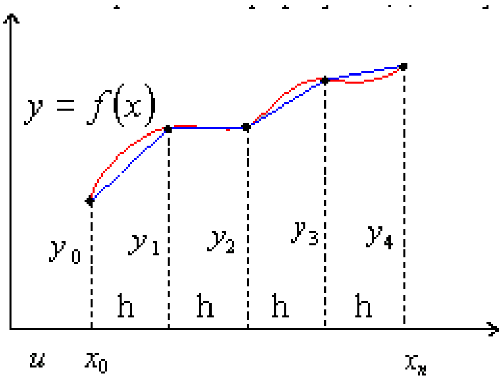

1.- сүрет. Қисықсызықты трапецияны жұықтайтын тік төртбұрыштар

**Трапециялар формуласы:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(0.5f_0 + f_1 + ... + f_{N-1} + 0.5f_N), \quad (6)$$

$R_n = -\frac{b-a}{12}h^2 y''(\xi), \ \xi \in (a,b)$.

Трапециялар формуласының геометриялық мағынасы 2.- сүретте көрсетілген. $y = f(x)$ функцияның графигі сызық сынықка жуықталады, яғни интегралдық қисық пен ох өсі аралығындағы фигура ауданын табу үшін сол фигураны трапециямен толықтырып, ауданын табуға болады. Егер $y'' > 0$, онда трапециялар формуласы интегралды артығымен жуықтайды, егер $y'' < 0$, онда – кемшілікпен.



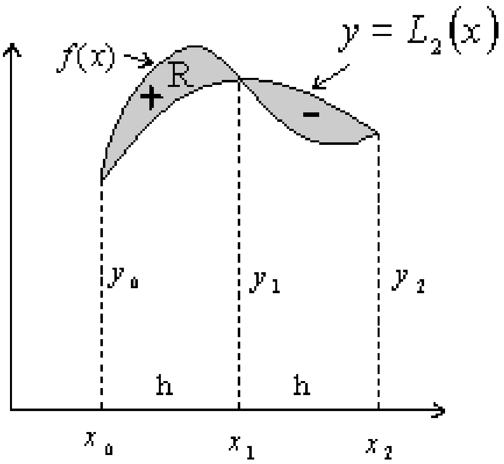

2-Сүрет. Қисық сызықты трапецияны трапециялармен алмастыру.

**Симпсон формуласы** келесі түрде жазылады:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_0 + f_N + 2(f_1 + f_2 + \dots f_{N-1}) + 4(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \dots + f_{N-\frac{1}{2}}), \quad (7)$$

$$R_n = -\frac{b-a}{180}h^4 y^{(4)}(\xi), \ \xi \in (a,b).$$

Симпсон формуласының геометрикалық мағынасы $y = f(x)$ функцияның графигін үш нүкте арқылы өтетін $y = L_2(x)$ параболамен алмастыруда, 3 сурет.




3-Сүрет. Қисық сызықты трапецияны параболамен алмастыру.

**Мысал 1**

Тіктөртбұрыштар, трапеция, Симпсон формулалармен анықталған интегралды есепте $S = \int_0^1 (2 + 3e^{x^2})dx$ .

Шешім: Тіктөртбұрыштар әдіспен $S = \int_0^1 (2 + 3e^{x^2})dx$ интегралді есептейміз. Интеграл анықталған аралықты қадамы 0,1 тең бірнеше аралыққа бөлеміз. Аралықтар $x_{i-\frac{1}{2}}$ ортанүктелерінде функцияның мәндерін табамыз.

1 - кесте. Функция мәндерін табу

| i | $x_i$ | $x_{i-\frac{1}{2}}$ | $f(x_{i-\frac{1}{2}})$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | - |
| 1 | 0,1 | 0,05 | 5,0075 |
| 2 | 0,2 | 0,15 | 5,0683 |
| 3 | 0,3 | 0,25 | 5,1935 |
| 4 | 0,4 | 0,35 | 5,3910 |
| 5 | 0,5 | 0,45 | 5,6734 |
| 6 | 0,6 | 0,55 | 6,0597 |
| 7 | 0,7 | 0,65 | 6,5773 |
| 8 | 0,8 | 0,75 | 7,2652 |
| 9 | 0,9 | 0,85 | 8,1787 |
| 10 | 1 | 0,95 | 9,3973 |

$$\int_0^1 (2 + 3e^{x^2})dx \approx 0{,}1 \cdot ((2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}05^2}) + (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}15^2}) + (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}25^2}) + (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}35^2}) +$$
$$+ (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}45^2}) + (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}55^2}) + (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}65^2}) + (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}75^2}) + (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}85^2})) + \cdot$$
$$+ (2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{0{,}95^2})) = 6{,}3812;$$

Әдіс қателігін есептейміз:

$$R_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a,b],$$
$$R_n = \frac{1-0}{24} 0{,}1^2 \left(6e^{\xi^2}(1 + 2\xi^2)\right) \le \frac{0{,}01}{24} * 18e = 0{,}0204, \quad \xi \in [0{,}1],$$

Әдіс қателігін есепке алғандағы нәтижеміз:

$$\int_0^1 (2 + 3e^{x^2})dx = 6{,}3812 \pm 0{,}02045;$$

Трапеция формуласымен интегралды табамыз. $x_i \quad i = 0, \ldots, 10$ түйіндерде функцияның мәндерін анықтаймыз, есептеу нәтижесі 2-кестеде көрсетілген.

2 - кесте. Функцияның мәндерін анықтау

| i | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 |
| 1 | 0,1 | 5,03 |
| 2 | 0,2 | 5,122 |
| 3 | 0,3 | 5,283 |
| 4 | 0,4 | 5,521 |
| 5 | 0,5 | 5,852 |
| 6 | 0,6 | 6,3 |
| 7 | 0,7 | 6,897 |
| 8 | 0,8 | 7,689 |
| 9 | 0,9 | 8,744 |
| 10 | 1 | 10,15 |

Трапециялар формуласы: $\int_a^b f(x)dx \approx h(0{,}5 f_0 + f_1 + ... + f_{N-1} + 0{,}5 f_N)$.

$$\int_0^1 (2+3e^{x^2})dx \approx 0{,}1((0{,}5(2+3e^0)) + (2+3e^{0{,}1^2}) + (2+3e^{0{,}2^2}) +$$

$$+(2+3e^{0{,}3^2}) + (2+3e^{0{,}4^2}) + (2+3e^{0{,}5^2}) + (2+3e^{0{,}6^2}) + (2+3e^{0{,}7^2}) +$$

$$+(2+3e^{0{,}8^2}) + (2+3e^{0{,}9^2}) + (0{,}5(2+3e^{1^2}))) = 6{,}4015 .$$

Әдістің қателігін табамыз: $R = -\frac{b-a}{12}h^2 y''(\xi),\ \xi \in (a,b)$

$$R_n = -\frac{1-0}{12}0{,}1^2\left(6e^{\xi^2}(1+2\xi^2)\right) \le -\frac{0{,}01}{12} * 18e = -0{,}0408 \ ,\ \xi \in [0{,}1]$$

Әдіс қателігін есепке алғандағы нәтижеміз:

$$\int_0^1 (2+3e^{x^2})dx = 6{,}4015 \pm 0{,}04085;$$

Интегралды Симпсон формуласымен есептейміз, 3-кесте.

3-кесте. Функция мәндері.

| i | $x_i$ | $x_{i-1/2}$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i-1/2})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | 5 | - |
| 1 | 0,1 | 0,05 | 5,03 | 5,0075 |
| 2 | 0,2 | 0,15 | 5,122 | 5,0683 |
| 3 | 0,3 | 0,25 | 5,283 | 5,1935 |
| 4 | 0,4 | 0,35 | 5,521 | 5,3910 |
| 5 | 0,5 | 0,45 | 5,852 | 5,6734 |
| 6 | 0,6 | 0,55 | 6,3 | 6,0597 |
| 7 | 0,7 | 0,65 | 6,897 | 6,5773 |
| 8 | 0,8 | 0,75 | 7,689 | 7,2652 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 0,9 | 0,85 | 8,744 | 8,1787 |
| 10 | 1 | 0,95 | 10,15 | 9,3973 |

Симпсон формуласымен есептейміз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\cdot(f_0 + f_N + 2\cdot(f_1 + f_2 + ... f_{N-1}) + 4\cdot(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + ... + f_{N-\frac{1}{2}})\cdot$$

$$\int_0^1 (2 + 3\cdot e^{x^2}) = \frac{0,1}{6}((2 + 3e^0) + (2 + 3e^{1^2}) + 2((2 + 3e^{0,1^2}) + (2 + 3e^{0,2^2}) +$$

$$+ (2 + 3e^{0,3^2}) + (2 + 3e^{0,4^2}) + (2 + 3e^{0,5^2}) + (2 + 3e^{0,6^2}) + (2 + 3e^{0,7^2}) + (2 + 3e^{0,8^2}) +$$

$$+ (2 + 3e^{0,9^2})) + 4\cdot((2 + 3e^{0,05^2}) + (2 + 3e^{0,15^2}) + (2 + 3e^{0,25^2}) + (2 + 3e^{0,35^2}) +$$

$$+ (2 + 3e^{0,45^2}) + (2 + 3e^{0,55^2}) + (2 + 3e^{0,65^2}) + (2 + 3e^{0,75^2}) + (2 + 3e^{0,85^2}) +$$

$$+ (2 + 3e^{0,95^2}))) = 6,3880.$$

Әдістің қателігін табамыз:

$$R = -\frac{b-a}{180}h^4 y^{(4)}(\xi),\ \xi \in (a,b),$$

$$R = -\frac{1-0}{180}0{,}1^4(e^{\xi^2}(36 + 14\xi^2 + 48\xi^4)) \le -0{,}00002\ ,\ \xi \in (0,1),$$

Әдіс қателігін есепке алғандағы нәтижеміз:

$$\int_0^1 (2 + 3\cdot e^{x^2}) = 6,3880 \pm 0,00007.$$

## 5.2 Сандық дифференциалдау

Көптеген практикалық есептерде күрделі аналитикалық түрде немесе кестелік мәндермен анықталған $y = f(x)$ функцияның бірінші немесе одан жоғарғы ретті туындыларды табу кажеттілігі пайда болады. Осындай жағдайдарда сандық дифференциалдау әдістері қолданылады.

Жуықтап дифференциалдау әдістерінің бірі - ол интерполяция формулаларын қолдана отырып туындыны табу. $x_i$, $i = 0,..,n$ түйіндермен анықталған $f(x)$ функцияның $R_n(x)$ қалдық мүшесі бар $P_n(x)$ интерполяциялық полиномын құрайық:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (8)$$

Теңдіктің оң және сол жағын $x$ айнымалы бойынша $m$ рет дифференциалдайық және $x = x^*$ деп санайық

$$f^m(x^*) = P_n^m(x^*) + R_n^m(x^*)\ . \qquad (9)$$

Көпмүшеліктің туындысы арқылы $f(x)$ функция туындысының жуық мәні табылады $f^{m}(x) \cong P_{n}^{m}(x)$.

Жоғарғы ретті туындылрдың мәндері кіші ретті туындылардің мәндері арқылы табылуы мүмкін.

Туындылар мәндерін жұықтап табу формулалары Ньютон, Стирлинг және Бессель интерполяциялық көпмүшеліктерді дифференциалдаумен табылады

Ньютон алдыға қарай интерполяциялау формуласы (3-ретті) келесі түрде жазылады:

$$y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \qquad (10)$$
$$q = (x - x_0)/h,$$

$h = x_{i+1} - x_i$, , $x_0$ - $x$ -ке сол жағынан ең жақын түйін, $\Delta y = hf(x_n, x_{n-1})$ - бірінші ретті шектік айырым, $\Delta^2 y = hf(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ - екінші ретті шектік айырым, $\Delta^3 y = hf(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ - үшінші ретті шектік айырым.

$x_{0,}\ x_1, x_3, \ldots$ түйінділерді анықтап Ньютона көпмүшелігін қолдансақ чандық дифференциалдаудың формуласын табамыз:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots), \qquad (10)$$
$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \ldots).$$

Бессель интерполяциялық полиномы:

$$y(x) \approx (\frac{y_0 + y_1}{2} + (t - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \ldots), \qquad (11)$$
$$где \quad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Бессель интерполяциялық полиномынан табылған сандық дифференциалдау формуласы:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3t^2 - 3t + \frac{1}{2}}{6}\Delta^3 y_{-1} + \ldots), \qquad (12)$$
$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_{01}}{2} + \frac{2t-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + \ldots).$$

Стирлинг интерполяциялық полиномы:

$$y(x) \approx y_0 + t\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{t^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \ldots), \quad (13)$$
$$где \quad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Стирлинг интерполяциялық полиномынан табылған сандық дифференциалдау формуласы:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + t\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2-1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \ldots), \quad (14)$$
$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \ldots).$$

Гаусс интерполяциялық полиномы:

$$y(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \ldots), \quad (15)$$
$$где \quad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Гаусс интерполяциялық полиномынан табылған сандық дифференциалдау формуласы:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2-1}{6}\Delta^3 y_{-1} + \ldots), \quad (16)$$
$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\Delta^3 y_{-1} + \ldots).$$

**Мысал 2**

Ньютон, Гаусс, Стирлинг, Бессель формулаларын қолданып 4 – кестемен анықталған функцияның келесі аргументтерге сәйкес функцияның бірінші және екінші туындыларын табу керек:

4 - кесте. Берілген функция.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
| y(x) | 2,86 | 3,95 | 4,94 | 5,8 | 6,5 | 7 | 7,29 | 7,3 |

Шешім:

Берілген аргументтер $x_1$=1,2, $x_2$=2,23, $x_3$=2,76, $x_4$=3,1. Шектік айырымдар кестесін құрайық, 5-кесте:

5 - кесте. Айырымдар кестесі.

| x | Y(x) | $\Delta$Y(x) | $\Delta^2$Y(x) | $\Delta^3$Y(x) |
|---|---|---|---|---|
| 0,8 | 2,857 | 1,089 | -0,097 | -0,032 |
| 1,2 | 3,946 | 0,992 | -0,129 | -0,032 |
| 1,6 | 4,938 | 0,863 | -0,161 | -0,034 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5,801 | 0,702 | -0,195 | -0,034 |
| 2,4 | 6,503 | 0,507 | -0,229 | -0,036 |
| 2,8 | 7,01 | 0,278 | -0,265 | |
| 3,2 | 7,288 | 0,013 | | |
| 3,6 | 7,301 | | | |

$x_0$=1,2 деп алайық; онда t=(x-$x_0$)/h=(1,2-1,2)/0,4=0. Ньютон формуласынан табылған келесі формулаларді қолданайық:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + ...),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + ...),$$

Есептеудің нәтижесі: Y'=2,614;  Y''=0,606.

$x_0$=2 болсын; Онда t=(x-$x_0$)/h=(2,23-2)/0,4=0,575.

Төмендегі,  Бесселя  формуласынан шыққан, формуланы қолданамыз:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3t^2 - 3t + \frac{1}{2}}{6}\Delta^3 y_{-1} + ...),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_{01}}{2} + \frac{2t-1}{2}\Delta^3 y_{-1} + ...),$$

Есептеудің нәтижесі: Y'=1,725; Y''=-1,129.

$x_0$=2,8 болсын; Онда t= (2,76-2,8)/0,4=-0,1.

Стирлинг формуласы бойынша:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + t\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2 - 1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + ...),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + ...),$$

Y'=1,053;  Y''=-1,409.

$x_0$=2,8 болсын; Онда t= (3,1-2,8)/0,4=0.75.

Гаусс формуласы бойынша:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2-1}{6}\Delta^3 y_{-1} + \ldots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + t\Delta^3 y_{-1} + \ldots),$$

Есептеудің нәтижесі: Y’=0,542;  Y’’=-1,6.