2 СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйенің шешімін сандық әдісте тура (дәл) және итерациялық әдістер деп бөледі.

ТУРА әдісте жүйенің шешімі арифметикалық амалдардың ақырлы санымен шектелетіндігімен сипатталады. Тіке әдіске жататындар: Крамер әдісі, белгісіздерді біртіндеп жою әдісі (Гаусс әдісі). Практикада сандарының реті 10^3 -нан аспайтын жүйелерді шешуде тура әдісті қолданады.

ИТЕРАЦИЯЛЫҚ әдістер жуықтауға жатады. Бұл әдістер жүйенің шешімін бірдей схемамен есептелген, тізбектелген жуықтаулардың шегі ретінде анықтайды. Итерациялық әдістерге мыналар жатады: жәй итерация әдісі, Зейдель әдісі, градиенттік әдістер.

Тура шешу тәсілдері

Гаусс әдісі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.3)$$

(3.3) - квадрат матрицалы жүйе берілсін. Жүйенің матрицасы ерекше емес немесе айқындалмаған болсын. Гаусс әдісін практикада белгісіздерді біртіндеп жою әдісі деп те атайды.

Әдістің негізгі идеясы немесе мағынасы: берілген жүйенің матрицасын үшбұрышты түрге келтіру, бұл – тура жол деп аталады, сосын үшбұрышты матрицаны қолданып құрған жаңа жүйеден белгісіздерді біртіндеп табу, бұл – кері жол деп аталады. Сонда Гаусс әдісі 2 этаптан тұрады:

1 тура жол – матрицаны үшбұрышты түрге келтіру.

2 кері жол – белгісіздерді ең соңғысынан бастап кері қарай табу.

Бұл әдіс тура тәсілге жатады. Яғни белгісіздердің мәнін бастапқы жүйеге қойғанда теңдіктің оң жағындағы мәндер мен сол жағындағы мәндер бір біріне тең болады.

Матрицаны үшбұрышты түрге келтіру әр түрлі әдіспен орындалады, қолданылатын әдіс теңдеулердің коэффициенттеріне байланысты.

2.1 Тура жол

$a_{11} \neq 0$ басшы элементі нөлден өзгеше деп есептеп (3.3)- жүйенің бірінші теңдеуінің коэффициенттерін басшы элементке бөлу арқылы келесі теңдеуді аламыз:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \qquad (3.4.)$$

Мұндағы

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2,3,..., n+1 \tag{3.5}$$

(3.4) - теңдеуді қолданып (3.3) - жүйенің 2-ші теңдеуінен, 3-ші теңдеуінен және n-ші теңдеуінен x_1 белгісізін жоюға болады. Ол үшін (3.4)-ші теңдеуді a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1} коэффициенттеріне көбейтіп шыққан нәтижелерді сәйкесінше 2-ші теңдеуден, 3-ші теңдеуден, т.с.с. n-ші теңдеуден азайтып a_{ij}^1 деп белгілейміз:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - a_{i1} \cdot b_{1j}, \quad i = 2,3,.., n; \quad j = 2,3,..., n+1 \tag{3.6}$$

Сонда келесідей жүйе аламыз:

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + a_{24}^1 x_4 + ... + a_{2n}^1 x_n = a_{2n+1}^1 \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + a_{34}^1 x_4 + ... + a_{3n}^1 x_n = a_{3n+1}^1 \\ a_{42}^1 x_2 + a_{43}^1 x_3 + a_{44}^1 x_4 + ... + a_{4n}^1 x_n = a_{4n+1}^1 \\ ... \\ a_{n2}^1 x_2 + a_{n3}^1 x_3 + a_{n4}^1 x_4 + ... + a_{nn}^1 x_n = a_{nn+1}^1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Алынған (3.7) - жүйенің 1-ші теңдеуін a_{22}^1 элементіне бөліп, теңдеу аламыз:

$$x_2 + b_{23} x_3 + b_{24} x_4 + ... + b_{2n} x_n = b_{2n+1} \tag{3.8}$$

мұндағы

$$b_{2j} = \frac{a_{2j}^1}{a_{22}^1}, \quad j = 3,4,..., n+1 \tag{3.9}$$

x_1 белгісізін қалай жойсақ, тура сол сияқты x_2 белгісізін (3.7) - жүйеден жоямыз, сонда мынадай жүйе алынады:

$$\begin{cases} a_{33}^2 x_3 + a_{34}^2 x_4 + ... + a_{3n}^2 x_n = a_{3n+1}^2 \\ a_{43}^2 x_3 + a_{44}^2 x_4 + ... + a_{4n}^2 x_n = a_{4n+1}^2 \\ ... \\ a_{n3}^2 x_3 + a_{n4}^2 x_4 + ... + a_{nn}^2 x_n = a_{nn+1}^2 \end{cases} \tag{3.10}$$

мұндағы

$$a_{ij}^2 = a^1{}_{ij} - a^1{}_{i2} \cdot b_{2j}, \quad i = 3,4, ..., n; \quad j = 3,4, ..., n+1 \tag{3.11}$$

(3.10) - жүйенің 1-ші теңдеуін a_{33}^2 элементіне бөліп

$$x_3 + b_{34} x_4 + b_{35} x_5 + ... + b_{3n} x_n = b_{3n+1}$$

(3.11)

теңдеу аламыз. Мұндағы

$$b_{3j} = \frac{a_{3j}^2}{a_{33}^2}, \quad j = 4,5,..., n+1 \tag{3.12}$$

(3.11) - теңдеу көмегімен (3.10) - жүйеден x_3 белгісізін жоямыз.

Осы әрекеттер тізімін матрица толық үшбұрышты түрге келгенше жалғастырамыз да (3.4)-ші, (3.8)-ші, (3.11)-ші, т.с.с. алуға болатын теңдеулерді жинақтап келесідей жүйе аламыз:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{1n+1} \\ \qquad x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{2n+1} \\ \qquad\qquad x_3 + \ldots + b_{3n}x_n = b_{3n+1} \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = b_{nn+1} \end{cases} \tag{3.13}$$

2.2 Кері жол

(3.13) - жүйенің ең соңғы n-ші теңдеуінен $x_n = \frac{b_{nn+1}}{b_{nn}}$ белгісізін тауып алып n-1 –ші теңдеуге қою арқылы x_{n-1} белгісізін табуға, сол сияқты кері қарай барлық белгісіздерді табуға болады.

Ескерту: Бұл әдіс матрицаның басшы элементі нөлден өзгеше болған жағдайда қолданылады. Егер берілген жүйе матрицасының басшы элементі нөлге тең болса, жүйенің теңдеулерінің орындарын ауыстыру арқылы, арифметикалық операциялар қолдану арқылы басшы элементтің нөлдігінен құтылуға болады.

Практикада есептеу жеңіл болуы үшін Гаусс компактілі схемасын толтырады (1-кесте), мысал үшін 4 белгісізді жүйе қарастырылды.

1-мысал:

$$\begin{cases} 0{,}14\,x_1 + 0{,}24\,x_2 - 0{,}84\,x_3 = 1{,}11 \\ 1{,}07\,x_1 - 0{,}83\,x_2 + 0{,}56\,x_3 = 0{,}48 \\ 0{,}64\,x_1 + 0{,}43\,x_2 - 0{,}38\,x_3 = -0{,}83 \end{cases} \tag{3.14}$$

Тура жол

Есептеу процесінің қалай өрбитінін бақылау үшін кесте толтырған дұрыс (3-кестені қараңыз). Кестенің I - бөлігіне жүйенің кеңейтілген матрицасын толтырамыз.

Кестенің соңғы екі бағаны $\sum$, S – есептеу қателігін бақылауды ұйымдастырады. I – бөліктің ең соңғы бақылаушы бағанындағы мәндер матрицаның әр жолындағы элементтердің қосындысы ретінде табылады $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = a_{i5},\ j = \overline{1,4}$. b_{1j} жолының бақылаушы бағанындағы элементтер I – бөліктің ең соңғы бақылаушы бағанындағы мәндерді басшы элементке бөлу арқылы табылады $b_{15} = \frac{a_{15}}{a_{11}}$. II – бөліктің бақылаушы бағанындағы мәндер I – бөліктің ең соңғы бақылаушы бағанындағы мәндерге (3.6) - формуланы қолдану арқылы анықталады $a_{i5}^1,\ i = 2{,}3$. Дәл осылай бақылаушы бағанның қалған екі жолын да толтыруға болады:

$b_{25} = \frac{a_{25}^1}{a_{22}^1}$, төменде көрсетілген a_{35}^1, a_{35}^2 формулалары арқылы. $\sum$, S – бағандарындағы мәндер бір - бірінен өте аз ауытқуы немесе тұтас беттесуі керек. Сонда есеп дұрыс жүргізілген болады. (3.5) - формуланы қолданамыз:

$b_{11} = \dfrac{a_{11}}{a_{11}} = 1$; $b_{12} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}} = \dfrac{0.24}{0.14} = 1.7143$; $b_{13} = \dfrac{a_{13}}{a_{11}} = \dfrac{-0.84}{0.14} = -6.0000$;

$b_{14} = \dfrac{b_1}{a_{11}} = \dfrac{1.11}{0.14} = 7.9286$;

Бұл мәндерді кестенің b_{1j} жолына жазамыз. (3.6) - формуланы қолданамыз:

$a_{22}^1 = a_{22} - a_{21} \cdot b_{12} = -0.83 - 1.07 \cdot 1.7143 = -2.6643$;

$a_{23}^1 = a_{23} - a_{21} \cdot b_{13} = 0.56 - 1.07 \cdot (-6) = 6.9800$;

$a_{24}^1 = b_2 - a_{21} \cdot b_{14} = 0.48 - 1.07 \cdot 7.9286 = -8.0036$; Бұл сандарды кестенің II – бөлігіндегі сәйкес орындарына жазамыз.

$a_{25}^1 = a_{25} - a_{21} \cdot b_{15} = 1,28 - 1.07 \cdot 4,6428 = -3,6878$ (Бұл мән кестенің $\sum$ бағанында орналасады.)

$a_{32}^1 = a_{32} - a_{31} \cdot b_{12} = 0.43 - 0.64 \cdot 1.7143 = -0.6672$;

$a_{33}^1 = a_{33} - a_{31} \cdot b_{13} = -0.38 - 0.64 \cdot (-6) = 3.4600$;

$a_{34}^1 = b_3 - a_{31} \cdot b_{14} = -0.83 - 0.64 \cdot 7.9286 = -5.9043$; Бұл сандарды кестенің II – бөлігіндегі сәйкес орындарына жазамыз.

$a_{35}^1 = a_{35} - a_{31} \cdot b_{15} = -0,14 - 0.64 \cdot 4,6428 = -3,1114$; (Бұл мән кестенің $\sum$ бағанында орналасады.) (3.7) - формуланы қолданамыз:

$b_{22} = \dfrac{a_{22}^1}{a_{22}^1} = 1$; $b_{23} = \dfrac{a_{23}^1}{a_{22}^1} = \dfrac{6,98}{-2,6643} = -2,6198$; $b_{24} = \dfrac{a_{24}^1}{a_{22}^1} = \dfrac{-8,0036}{-2,6643} = 3,0040$;

Бұл сандарды кестенің b_{2j} жолына жазамыз. (3.11) - формуланы қолданамыз:

$a_{33}^2 = a_{33}^1 - a_{32}^1 \cdot b_{23} = 3,4600 + 0,6672 \cdot (-2,6198) = 1,7121$;

2-кесте – Гаусстың компактілі схемасы

Бөліктер	i	X_1	X_2	X_3	X_4	b_i	$\sum = a_{i6}$
I	1 2 3 4	a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	b_1 b_2 b_3 b_4	$\sum_{j=1}^4 a_{1j} = a_{16}$ $\sum_{j=1}^4 a_{2j} = a_{26}$ $\sum_{j=1}^4 a_{3j} = a_{36}$ $\sum_{j=1}^4 a_{4j} = a_{46}$
B_{1j}	**1**	**1**	**b_{12}**	**b_{13}**	**b_{14}**	**b_{15}**	$\dfrac{a_{16}}{a_{11}} = b_{16}$
II	2 3 4		a_{22}^1 a_{32}^1 a_{42}^1	a_{23}^1 a_{33}^1 a_{43}^1	a_{24}^1 a_{34}^1 a_{44}^1	a_{25}^1 a_{35}^1 a_{45}^1	a_{26}^1 a_{36}^1 a_{46}^1

B_{2j}	**2**		**1**	**b_{23}**	**b_{24}**	**b_{25}**	$\frac{a^1_{26}}{a^1_{22}} = b_{26}$
III	3 4			a^2_{33} a^2_{43}	a^2_{34} a^2_{44}	a^2_{35} a^2_{45}	a^2_{36} a^2_{46}
B_{3j}	**3**			**1**	**b_{34}**	**b_{35}**	$\frac{a^2_{36}}{a^2_{33}} = b_{36}$
IV	4				a^3_{44}	a^3_{45}	a^3_{46}
V		1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	

$a^2_{34} = a^1_{34} - a^1_{32} \cdot b_{24} = -5,9043 + 0,6672 \cdot 3,0040 = -3,9000$; Бұл сандарды кестенің III – бөлігіне толтырамыз.

$a^2_{35} = a^1_{35} - a^1_{32} \cdot b_{25} = -3,1114 + 0,6672 \cdot 1,3842 = -2,1879$ (Бұл мән кестенің $\sum$ бағанында орналасады.)

Осы арада тура жол аяқталады, матрица үшбұрышты түрге келеді.

Кері жол

b_{1j}, b_{2j} және кестенің ең соңғы жолында орналасқан элементтерді қолданып жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} x_1 + 1.7143 x_2 - 6 x_3 = 7.9286 \\ \quad x_2 - 2.6198 x_3 = 3.0040 \\ \quad\quad 1.7121 x_3 = -3.9000 \end{cases}$$

Бұл жүйеден x_3=-2,2779; x_2=-2,9636; x_1=-0,6583 екендігі шығады.

3- кесте – (3.14) - есептің кестелік алгоритмі

Бөліктер	i	X_1	X_2	X_3	b_i	$\sum$	S
I	1	**0.14**	0.24	-0.84	1.11	0,65	
	2	1.07	-0.83	0.56	0.48	1,28	
	3	0.64	0.43	-0.38	-0.83	-0,14	
B_{1j}	**1**	**1**	**1.7143**	**-6.0000**	**7.9286**	4,6428	4.6428
II	2		**-2.6643**	6.98	-8.0036	-3.6878	-3.6879
	3		-0.6672	3.4600	-5.9043	-3.1114	-3.1115
B_{2j}	**2**		**1**	**-2.6198**	**3.0040**	1.3842	1.3842
III	**3**			**1.7121**	**-3.9000**	-2.1879	-2.1879

Гаусстың басшы элементті таңдау әдісі

Бұл әдісті қолдану үшін жүйенің матрицасының басшы элементтері немесе диагональ элементтері нөлден өзгеше болуы керек ([11] қараңыз). Егер матрицаның басшы элементтері нөлге тең болса, қандай да бір алмастырулар, ауыстырулар қолдану арқылы нөлден құтылады. Жордан - Гаусс әдісін сондықтан басшы элементті таңдау әдісі деп те атайды. Әдістің негізгі идеясы модулі бойынша ең үлкен элементті басшы элемент деп алып, сол элемент орналасқан жолдағы сәйкес белгісізді жою. Бұл әдіс те тура және кері жолдан тұрады. Келесі жүйе берілсін.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = a_{3n+1} \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases} \quad (3.15)$$

Тура жол

1 (3.15) – жүйенің кеңейтілген матрицасын құрамыз.

a_{ij}, $j = 1,2,..., n$ элементтерінің арасынан модулі бойынша ең үлкен элементті басшы элемент деп тағайындаймыз. Оны a_{pq} деп белгілейік. Барлық $i \neq p$ мәндері үшін

$$m_i = \frac{a_{iq}}{a_{pq}} \quad (3.16)$$

көбейткішін есептейміз.

2 Әрбір басшы емес жолдан m_i көбейткішіне көбейтілген басшы жол элементтерін мүшелеп шегереміз:

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - m_i \cdot a_{pj}, \; i = 1,2,..., n, \; j = 1,2,..., n+1 \quad (3.17)$$

Сонда q-шы бағанның басшы элементтен басқа элементтері нөлге айналады.

3 q-шы баған және басшы жолды тастап кетіп жаңа M_1 матрица аласыз. Бастапқы матрицаның бағаны мен жол саны азаяды.

4 M_1 матрицасына бастапқы пункттерді қайталап қолдану арқылы M_2 матрицасын аламыз.

5 Осы процессті бір белгісізді бір жолдан тұратын теңдеу қалғанша жалғастырамыз.

6 Тастап кеткен басшы жолдардан жаңа жүйе құрастырамыз.

Кері жол

Басшы жолдардан құралған матрицаны әлдебір ауыстырулар арқылы үшбұрышты түрге келтіріп, ең соңғы теңдеуден ең соңғы белгісізді, оны қолданып оның алдындағы белгісізді, т.с.с. барлық белгісіздерді кері бағытта анықтаймыз.

m_i сандары қаншалықты азайған сайын есептеу қателігі де азаяды. Сондықтан ЭЕМ-ді қолданып есептеу уақытында осы әдіс тиімді деп есептеледі.

Ескерту. Егер жүйе өте көп белгісіздерден тұрып, оның барлық элементтерінің арасынан модулі бойынша үлкен элементті табу қиынға соқса басшы жол ретінде жүйенің бірінші жолын, ал басшы элемент ретінде осы жолдың модулі бойынша ең үлкен элементін алуға болады.

2-мысал:

$$\begin{cases} 1.1161x_1 + 0.1254x_2 + 0.1397x_3 + 0.1490x_4 = 1.5471 \\ 0.1582x_1 + 1.1675x_2 + 0.1768x_3 + 0.1871x_4 = 1.6471 \\ 0.1968x_1 + 0.2071x_2 + 1.2168x_3 + 0.2271x_4 = 1.7471 \\ 0.2368x_1 + 0.2471x_2 + 0.2568x_3 + 1.2671x_4 = 1.8471 \end{cases} \tag{3.18}$$

Есептеу қадамдарының нәтижелерін 4- кестеге толтыруға болады:

Тура жол

a_{44}=1,2671 басшы элемент болады. 4-жол басшы жол деп аталады.

1 (3.16) - формула көмегімен m_i, i=1,2,3 мәндерін анықтаймыз:

$$m_1 = \frac{a_{14}}{a_{44}} = 0.11759 \quad , m_2 = \frac{a_{24}}{a_{44}} = 0.14766 \quad , m_3 = \frac{a_{34}}{a_{44}} = 0.17923$$

4- кесте – (3.18) – есептің кестелік алгоритмі

Бөліктер	I	m_i	X_1	X_2	X_3	X_4	A_{i5}
I	1	0.11759	1.1161	0.1254	0.1397	0.1490	1.5471
	2	0.14766	0.1582	1.1675	0.1768	0.1871	1.6471
	3	0.17923	0.1968	0.2071	1.2168	0.2271	1.7471
	4		0.2368	0.2471	0.2568	$\boxed{1.2671}$	1.8471
II	1	0.09353	1.08825	0.09634	0.10950		1.32990
	2	0.11862	0.12323	1.13101	0.13888		1.37436
	3		0.15436	0.16281	$\boxed{1.177077}$		1.41604
III	1	0.07296	1.07381	0.08111			1.19746
	2		0.10492	$\boxed{1.11170}$			1.20639
IV	1		1.06616				1.10944

2 (3.17) – формула бойынша басшы бағанда орналасқан басшы элементтен өзге элементтерді нөлге айналдырамыз да қалған жаңа элементтерді табамыз:

i=1; j=1 болғанда

$$a_{11}^{1} = a_{11} - m_1 \cdot a_{41} = 1.11610 - 0.11759 \cdot 0.2368 = 1.08825$$

i=1; j=2 болғанда

$$a_{12}^{1} = a_{12} - m_1 \cdot a_{42} = 0.1254 - 0.11759 \cdot 0.24710 = 0.09634$$

i=1; j=3 болғанда

$$a_{13}^{1} = a_{13} - m_1 \cdot a_{43} = 0.1397 - 0.11759 \cdot 0.2568 = 0.10950$$

i=1; j=4 болғанда

$$a_{14}^{1} = a_{14} - m_1 \cdot a_{44} = 0$$

i=1; j=5 болғанда

$$a_{15}^{1} = a_{15} - m_1 \cdot a_{45} = 1.5471 - 0.11759 \cdot 1.8471 = 1.32990$$

i=2; j=1 болғанда

$$a_{21}^{1} = a_{21} - m_2 \cdot a_{41} = 0.1582 - 0.14766 \cdot 0.23680 = 0.12323$$

i=2; j=2 болғанда

$$a_{22}^{1} = a_{22} - m_2 \cdot a_{42} = 1.13101$$

i=2; j=3 болғанда

$$a_{23}^{1} = a_{23} - m_2 \cdot a_{43} = 0.13888$$

i=2; j=4 болғанда

$$a_{24}^{1} = a_{24} - m_2 \cdot a_{44} = 0$$

i=2; j=5 болғанда

$$a_{25}^{1} = a_{25} - m_2 \cdot a_{45} = 1.37436$$

i=3; j=1 болғанда

$$a_{31}^{1} = a_{31} - m_3 \cdot a_{41} = 0.15436$$

i=3; j=2 болғанда

$$a_{32}^{1} = a_{32} - m_3 \cdot a_{42} = 0.16281$$

i=3; j=3 болғанда

$$a_{33}^{1} = a_{33} - m_3 \cdot a_{43} = 1.17077$$

i=3; j=4 болғанда

$$a_{34}^{1} = a_{34} - m_3 \cdot a_{44} = 0$$

i=3; j=5 болғанда

$$a_{35}^{1} = a_{35} - m_3 \cdot a_{45} = 1.41604$$

Табылған элементтерден жаңа матрица құрып кестенің II-бөлігіне толтырамыз.

3 Жаңа матрицадан модулі бойынша үлкен элементті табамыз: ол - $a_{33}^{1} = 1.17077$. 3-жолды басшы жол деп аламыз да жаңа көбейткіштерді анықтаймыз:

$$m_1 = \frac{a_{13}^{1}}{a_{33}^{1}} = \frac{0,10950}{1,17077} = 0,09353$$

$$m_2 = \frac{a_{23}^{1}}{a_{33}^{1}} = \frac{0,13888}{1,17077} = 0,11862$$

4 2-пункттегі сияқты (3.17) – формула бойынша басшы бағанда орналасқан басшы элементтен өзге элементтерді нөлге айналдырамыз да қалған жаңа элементтерді тауып тағы жаңа матрица құраймыз:

$a_{11}^2 = 1.07381$ $a_{21}^2 = 0.10492$

5 $a_{12}^2 = 0.08111$ $a_{22}^2 = 1.11170$

$a_{15}^2 = 1.19746$ $a_{25}^2 = 1.20639$

6 Осы жаңа матрицадан модулі бойынша үлкені $a_{22}^2 = 1.11170$. Тағы көбейткішті есептейміз: $m_1 = \dfrac{a_{12}^2}{a_{22}^2} = 0{,}07296$.

7 2-пункттегі сияқты (3.17) – формула бойынша басшы бағанда орналасқан басшы элементтен өзге элементтерді нөлге айналдырамыз да қалған жаңа элементтерді тауып тағы жаңа матрица құраймыз:

$a_{12}^3 = 1{,}07381 - 0{,}07296 \cdot 0{,}10492 = 1{,}06616$; $a_{15}^3 = 1{,}10944$

Кері жол

Кестеде қоршалған басшы элементтер орналасқан жолдардан жүйе құрамыз:

$$\begin{cases} 1.06616x_1 = 1.10944 \\ 1{,}10492x_1 + 1.11170\,x_2 = 1.20639 \\ 0.15436\,x_1 + 0.16281\,x_2 + 1.17077\,x_3 = 1.41604 \\ 0.2368\,x_1 + 0.24710\,x_2 + 0.2568\,x_3 + 1.2671\,x_4 = 1.8471 \end{cases}$$

Белгісіздерді біртіндеп табамыз:

X_1=1.04059

X_2=0.98697

X_3=0.93505

X_4=0.88130.

2.3 Қарапайым итерация әдісі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.31)$$

(3.31)- жүйені қандай да бір амалдар қолданып келесі түрге келтірейік,

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + ... + \alpha_{3n}x_n + \beta_3 \\ ... \\ x_4 = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + ... + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases} \qquad (3.32)$$

немесе қысқаша жазсақ: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j + \beta_i, \quad i = 1,2,..., \quad n.$

(3.32) – жүйенің оң жағы n - өлшемді векторлық кеңістікте $x(x_1,x_2,\dots,x_n)$ нүктесін осы кеңістіктің $y(y_1,y_{2,\dots,}y_n)$ нүктесіне айналдыратын бейнелеу болып табылады:

$$F: \ y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = 1,2,\dots, \quad n. \qquad (3.33)$$

(3.32) – жүйені қолданып, бастапқы $x^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\dots, x_n^{(0)})$ нүктені таңдап алып n - өлшемді векторлық кеңістікте нүктелердің итерациялық тізбегін құруға болады:

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)},\dots, x^{(n)},\dots \qquad (3.34)$$

(3.34) – итерациялық тізбек жинақты болса, оның шегі (3.32) итерациялық жүйенің шешімі болады. Тізбектің жинақтылығын дәлелдеу үшін функционалдық анализдің кейбір ұғымдары керек:

1-анықтама:

X жиынының x және y нүктелерінің ара қашықтығын анықтайтын $\rho(x, y)$ функциясы метрика деп аталады, егер төмендегі шарттар орындалса:

1 $\rho(x, y) \ge 0$;

2 $\rho(x, y) = 0$, егер x=y болғанда ғана;

3 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

4 $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$;

2-анықтама:

ρ Метрикасы енгізілген жиын метрикалық кеңістік деп аталады.

3-анықтама:

Егер F толық метрикалық кеңістікте анықталған қысыңқы бейнелеу болса:

$$\rho(Fx; Fy) \le \alpha \cdot \rho(x, y) \qquad (3.35)$$

онда x=Fx болатын жалғыз қозғалмайтын нүкте табылады. Бұл жағдайда F бейнелеуіне құрылған итерациялық тізбек кез келген бастапқы жуықтауларда x нүктесіне жинақталады. Мұндағы: $0 < \alpha < 1$, $x, y \in E$, Fx, Fy- x,y нүктелерінің бейнелері.

4-анықтама: (қысыңқы бейнелеу принципі)

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін төмендегі үш метрикалық кеңістікте қарастыруға болады:

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i - y_i \right| \qquad (3.36)$$

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - y_i \right| \qquad (3.37)$$

$$\rho_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad (3.38)$$

(3.36) – метрикалық кеңістікте:

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1 \qquad (3.39.)$$

теңсіздігі немесе (3.37) – метрикалық кеңістікте:

$$\alpha = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1 \qquad (3.40)$$

теңсіздігі немесе (3.38) - метрикалық кеңістікте:

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{2}} < 1 \qquad (3.41)$$

теңсіздіктерінің ең болмағанда біреуі орындалса, онда (3.33) – теңдеумен берілген F бейнесі қысыңқы бейнелеу болады және итерациялық процесс кез келген бастапқы жуықтауларда өзінің жалғыз шешіміне жинақталады.

(3.32) – түріне келтірілген итерациялық жүйеге карапайым итерация әдісін қолданбас бұрын жүйенің матрицасының диагональды элементтерінің басым болғаны дұрыс. Яғни $\left|\alpha_{ii}\right| > \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right|, \ \mathrm{i} = 1,2,...$. Және коэффициенттер 1-ден кіші болуы керек: $\left|\alpha_{ij}\right| < 1$. Бұл шарттың орындалуы қысыңқылық шарттарды қанағаттандыратын қажетті шарт. Ал жеткіліктілік шарт (3.39) – (3.41.) шарттардың ең болмағанда біреуі орындалуы керек. Егер диагональдық басымдылық болмаса жүйеге қандай да бір ауыстырулар мен алмастырулар, арифметикалық амалдар қолдануға болады.

Әдісті қолдануға болады деген тұжырымға келгеннен кейін өзіміз бастапқы жуықтауларды таңдап алып итерациялық процесс құрамыз:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \alpha_{11} x_1^k + \alpha_{12} x_2^k + \alpha_{13} x_3^k + ... + \alpha_{1n} x^k{}_n + \beta_1 \\ x_2^{k+1} = \alpha_{21} x_1^k + \alpha_{22} x_2^k + \alpha_{23} x_3^k + ... + \alpha_{2n} x_n^k + \beta_2 \\ x_3^{k+1} = \alpha_{31} x_1^k + \alpha_{32} x_2^k + \alpha_{33} x_3^k + ... + \alpha_{3n} x_n^k + \beta_3 \\ ... \\ x_n^{k+1} = \alpha_{n1} x_1^k + \alpha_{n2} x_2^k + \alpha_{n3} x_3^k + ... + \alpha_{nn} x_n^k + \beta_n \ , \quad \mathrm{k} = 0,1,2,... \end{cases} \qquad (3.41)$$

Егер е- дәлдікке дейін шешім табу керек болса, онда есептеу процесін

$$\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \le \varepsilon \frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad (3.42)$$

немесе

$$\left|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon \qquad (3.43)$$

шарттары орандалғанша жалғастырады. Мұндағы $\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)})$ - евклид кеңістігіндегі соңғы, көрші жуықтаулардың ара қашықтығы. Бастапқы жуықтаулар ретінде практикада көбіне жүйенің бос мүшелері алынады.

1- мысал:

$-7x_1+4x_2 - 4x_3=-8$

$2x_1 - 6x_2 - x_3=-5$

$-2x_1 - x_2 +6x_3=3$

Бұл жүйе матрицасында диагональдық басымдылық бар. (3.39) – (3.41) – шарттардың орындалуын ұйымдастыру керек. Ол үшін жүйенің матрицасын және бос мүшелер векторын

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$ матрицасына көбейтейік:

$$H \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}. \qquad H \cdot b = (\frac{8}{7}; \frac{5}{6}; -\frac{1}{3}) \quad \begin{cases} x_1 - \frac{4}{7}x_2 - \frac{4}{7}x_3 = \frac{8}{7} \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{6}x_3 = \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Бұл жүйе үшін жинақтылық шарттар орындалады. Сондықтан жүйені итерациялық түрде жазамыз:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{7}x_2 + \frac{4}{7}x_3 + \frac{8}{7} \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{5}{6} \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Итерацияның бастапқы жуықтаулары ретінде бос мүшелерін алайық: $x_1^0 = \frac{8}{7}$; $x_2^0 = \frac{5}{6}$; $x_3^0 = -\frac{1}{3}$. Келесі жуықтаулар мына формуламен есептеледі:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{4}{7}x_2^k + \frac{4}{7}x_3^k + \frac{8}{7} \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{3}x_1^k - \frac{1}{6}x_3^k + \frac{5}{6} \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{3}x_1^k + \frac{1}{6}x_2^k - \frac{1}{3} \end{cases}, \; k=0,1,2,\ldots,n$$

2-мысал:

$$\begin{cases} 2.34x_1 - 4.21x_2 - 11.61x_3 = 14.41 & \text{(I)} \\ 8.04x_1 + 5.22x_2 + 0.27x_3 = -6.44 & \text{(II)} \\ 3.92x_1 - 7.99x_2 + 8.37x_3 = 55.56 & \text{(III)} \end{cases}$$

Мұндағы теңдеулерді қолдануға оңай болуы үшін рим цифрларымен белгіледік. Диагональдық басымдылықты алу үшін (I) – теңдеудің орнына (II) – теңдеуді, ал 2-ші теңдеу етіп (I+II) – теңдеуін жазамыз, (III) – теңдеудің орнына (I) теңдеуді жазамыз:

$$\begin{cases} 8.04x_1 + 5.22x_2 + 0.27x_3 = -6.44 & \text{(I)} \\ 6,26x_1 - 12,20x_2 - 3,24x_3 = 69,97 & \text{(II)} \\ 2.34x_1 - 4.21x_2 - 11.61x_3 = 14.41 & \text{(III)} \end{cases}$$

Бұл жүйеде диагональдық басымдылық бар. Сондықтан итерациялық түрге келтіру үшін жүйенің әр теңдеуін мүшелеп диагональдық элементіне бөлеміз де коэффициенті 1-ге тең белгісіздер арқылы өрнектейміз:

$$\begin{cases} x_1 = -0,6493x_2 - 0.0336x_3 - 0.8010 \\ x_2 = 0.5131x_1 - 0.2656x_2 - 5.7352 \\ x_3 = 0.2016x_1 - 0.3626x_2 - 1.2412 \end{cases}$$

Жинақтылығын зерттейміз:

1-ші метрикалық кеңістікте:

$$\alpha_{\rho_1} = 0.5131 + 0.2016 = 0.7147 < 1$$

$$\alpha_{\rho_1} = 0.6493 + 0.3626 = 1.0119 > 1$$

$$\alpha_{\rho_1} = 0.0336 + 0.2656 = 0.2992 < 1$$

$$\max(0.7147;\ 1.0119;\ 0.2992) = 1.0119 > 1$$

жинақтылық шарты бұл кеңістікте орындалмайды екен.

2-ші метрикалық кеңістікте:

$$\alpha_{\rho_2} = 0.6493 + 0.0336 = 0.6829 < 1$$

$$\alpha_{\rho_2} = 0.5131 + 0.2656 = 0.7787 < 1$$

$$\alpha_{\rho_2} = 0.2016 + 0.3626 = 0.5642 < 1$$

$$\max(0.6829;\ 0.7787;\ 0.5642) = 0.7787 < 1$$

жинақтылық шарты орындалды.

3-ші метрикалық кеңістікте:

$$\alpha_{\rho_3} = \sqrt{0.6493^2 + 0.0336^2 + 0.5131^2 + 0.2656^2 + 0.2016^2 + 0.3626^2} = 0.96 < 1$$

Жинақтылық шарты орындалатыны байқалды, яғни бастапқы жуықтаулар ретінде бос мүшелерді алып итерациялық процесс құрамыз:

$$x_1^{(0)} = -0.8010;\quad x_2^{(0)} = -5.7352;\quad x_3^{(0)} = -1.2412;$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -0,6493x_2^k - 0.0336x_3^k - 0.8010 \\ x_2^{k+1} = 0.5131x_1^k - 0.2656x_2^k - 5.7352 \\ x_3^{k+1} = 0.2016x_1^k - 0.3626x_2^k - 1.2412 \end{cases}$$

k=0,1,2,…

$\left|x_n^{k+1} - x_n^k\right| \le \varepsilon \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ шарты орындалғанша итерация жүреді.

2.4 Зейдель әдісі

(3.31)– жүйе (3.32) – итерациялық түрге келтірілсін. Бұл жүйені қарапайым итерация әдісімен шешкенде итерациялық процесстің әр қадамы белгілі бастапқы жуықтаудан белгісіздің жаңа жуықтауына көшуден тұратын еді. Белгілі бастапқы жуықтаудың элементтерін x_1, x_2, … , x_n деп, ал есептелетін келесі жуықтауларды $y_1, y_2, \dots, y_n$ деп белгілейік. Сонда есептеу формулалары келесі түрге көшеді:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = 1,2,\dots, \quad n. \qquad (3.46)$$

Зейдель әдісінің негізгі идеясы итерациялық процестің әр қадамында y_i-дің мәндерін есептеу барысында оның алдында есептелген $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$ мәндері қолданылады да (3.46)– ны ашып жазсақ, Зейдель формуласы келесідей болады:

$$\begin{cases} y_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j + \beta_1 \\ y_2 = \alpha_{21} y_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j + \beta_2 \\ \dots \\ y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{nj} y_j + \alpha_{nn} \cdot x_n + \beta_n \end{cases} \qquad (3,47\ )$$

(3,47)– итерациялық процесінің жинақтылығы үш метрикалық кеңістікте мына шарттардың бірі орындалуымен бекітіледі:

$\rho_1(x, y) = \max\limits_{1<i<n} |x_i - y_i|$ кеңістікте

$\alpha = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ шарты (3.48)

$\rho_2(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ кеңістікте

$\alpha = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ шарты (3.49)

$\rho_3(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ кеңістікте

$\alpha = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2} < 1$ шарты (3.50)

Егер бұл шарттардың біреуі орындалса, (3.47)– итерациялық процесс кез келген бастапқы жуықтауда өзінің жалғыз шешіміне жинақталады.

Зейдель әдісін жүйенің матрицасы симметриялы элементтерден тұрған жағдайда қолданады. Егер матрица симметриялы болмаса оны симметриялы түрге келтіру үшін жүйенің матрицасын және векторларын транспонирленген матрицаға көбейтеді:

$A^T * A * x = A^T * b$ (3.51)

Белгілеулер енгіземіз:

$A^T * A = C$

$A^T * b = D$

Сонда

$Cx = D$ (3.52)

(3.52) – жүйені қалыпты жүйе деп атайды. Қалыпты жүйенің элементтері симметриялы және диагональды элементтері нөлден өзгеше болады.

Қалыпты жүйені алдында қарастырған амалдарды қолданып (3.47)– итерациялық жүйеге келтіруге болады.

(3.52) – қалыпты жүйеге эквивалентті (3.47)– келтірілген итерациялық жүйе үшін Зейдельдің итерациялық процесі өзінің жалғыз шешіміне кез келген бастапқы жуықтауларда жинақталады.

Егер e дәлдік берілсе, итерациялық әдіс $|x_i - y_i| \le \varepsilon$, i=0,1,2,… шарты орындалғанға дейін жалғасады.

1-мысал:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Берілген жүйе үшін матрицасын, транспонирленген матрицасын құрып, жоғарыда айтылған әрекеттерді орындаймыз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 6 & 11 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad D = A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Сонымен анықталған матрица бойынша қалыпты жүйе құраймыз:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16 \\ 6x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 22 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

Итерациялық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 0.6667\ x_3 + 2.6667 \\ x_2 = -0.5455\ x_1 - 0.4545\ x_3 + 2 \\ x_3 = -1.3333\ x_1 - 1.6667\ x_2 + 4 \end{cases}$$

Бұл жүйе үшін (3.48)– (3.50)– жинақтылық шарттары орынды. Ендеше бастапқы жуықтау таңдаймыз: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Зейдель процесі келесідей жазылады:

$$\begin{cases} y_1 = -x_2 - 0.6667\ x_3 + 2.6667 \\ y_2 = -0.5455\ y_1 - 0.4545\ x_3 + 2 \\ y_3 = -1.3333\ y_1 - 1.6667\ y_2 + 4 \end{cases}$$

Есептеу $|x_i - y_i| \le \varepsilon$, i=0,1,2,… шарты орындалғанға дейін жалғасады.

2.5 Қуалау әдісі

Математикалық физиканың есептері көбінде үш диагональді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімін табуға шектеледі, үш диагоналді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің теңдеулерінде тек қана үш айнымалылардың коэффициенттері нөлге тең емес, қалған коэффициенттер нөлге тең.

$$
\begin{aligned}
& a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j \quad , \\
& j = 1,2,3,...., \; n-1 \qquad\qquad (18) \\
& y_0 = \nu_1 y_1 + \mu_1, \quad y_n = \nu_2 y_{n-1} + \mu_2 .
\end{aligned}
$$

Сондай жүйенің матрицасы үш диагоналді:

$$
\begin{pmatrix}
1 & -\nu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 & -c_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_i & -c_i & b_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -c_{n-1} & b_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu_2 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ y_i \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \mu_1 \\ -f_1 \\ . \\ -f_i \\ . \\ -f_{n-1} \\ \mu_2 \end{pmatrix}
$$

Үш диагоналді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу тиімді әдісі болып қуалау әдісі табылады.

Қуалау әдісінің бірінші кезеңі – тура қуалау. Қуалау коэффициенттері келесі формулалармен табылады:

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1 = \nu_1, \quad \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,...., \; n-1 . \qquad (19) \\
& \beta_1 = \mu_1, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,...., \; n-1
\end{aligned}
$$

Қуалау әдісінің екінші кезеңі – кері қуалау. Кері бағытта функцияның мәндері табылады:

$$
\begin{aligned}
& y_n = \frac{\nu_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \nu_2 \alpha_n}, \\
& y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad . \qquad (20) \\
& j = n-1, n-2,....., \; 1, 0
\end{aligned}
$$

Қуалау әдісін қолдану үшін әдістің жинақтылығы болуы керек. Жиынактылық шарты :

$$
\begin{aligned}
& a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, ..., \; n-1; \\
& |\nu_1| \leq 1, \quad |\nu_2| < 1
\end{aligned}
\; . \; (21)
$$

Мысал 4

Жүйені қуалау әдісімен шеш.

$$\begin{cases} 1,1y_0 + 0,2y_1 = 0,1; \\ y_0 + 2,3y_1 + 1,1y_2 = -2; \\ 1,1y_1 + 3,3y_2 + 1,5y_3 = 1; \\ 1,2y_2 + 2,8y_2 + 1,3y_4 = 2,3; \\ 1,2y_3 + 2,9y_4 + 1,5y_5 = -4,1; \\ 2,5y_4 + 3,8y_5 + 1,2y_6 = -0,2; \\ 1,3y_5 + 2,6y_6 + y_7 = 4,2; \\ 1,2y_6 + 2,4y_7 + y_8 = 3,2; \\ 0,2y_7 + y_8 = -3,1; \end{cases}$$

Шешім:

Қуалау әдісін қолдану үшін әдістің жинақтылығы болуы керек. Жиынактылық шарты орындалады:

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, \ldots.., n-1;$$
$$|\nu_1| \leq 1, \quad |\nu_2| < 1 .$$

Негізгі диагональ элементтері басқа элементтер қосындысынан кем емес, мысал 2,3>1+1,1.

Сонымен, қуалау әдісін қолдануға болады.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2,3 & 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1 & 3,3 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 & 2,8 & 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,2 & 2,9 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 & 3,8 & 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,3 & 2,6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 2,4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,09 \\ -2 \\ 1 \\ 2,3 \\ -4,1 \\ -0,2 \\ 4,2 \\ 3,2 \\ -3,1 \end{pmatrix}.$$

4 кестеде қуалау әдісін қолданудың натижесі көрсетілген.

4 - кесте. Қуалау әдісін қолдану.

i	a_i	c_i	b_i	f_i	α_i	β_i	y_i
0	1,00	-0,18	0,00	-0,09	-	-	0,16
1	1,00	-2,30	1,10	2,00	-0,18	0,09	-0,39

2	1,10	-3,30	1,50	-1,00	-0,52	-0,99	-1,15
3	1,20	-2,80	1,30	-2,30	-0,55	0,76	3,49
4	1,20	-2,90	1,50	4,10	-0,61	0,65	-4,68
5	2,50	-3,80	1,20	0,20	-0,69	-2,25	3,53
6	1,30	-2,60	1,00	-4,20	-0,58	2,61	-1,58
7	1,20	-2,40	1,00	-3,20	-0,54	0,44	3,73
8	0,00	-0,20	1,00	3,10	-0,57	1,53	-3,85