ЛЕКЦИЯ 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Понятие функции нескольких переменных

Определение. Если каждой паре чисел (x,y) множества E ставится в соответствие по некоторому закону некоторое число z, то говорят, что на множестве E задана функция $z = f(x,y)$.

При этом множество E называется областью задания функции. Число z, соответствующее данной паре (x,y) из множества E, называется частным значением функции. Совокупность всех частных значений функции называется множеством значений функции.

Выберем на плоскости декартову систему координат OXY и будем изображать пары чисел (x,y) точками плоскости с координатами x и y. Тогда область задания функции $z = f(x,y)$.

будет изображаться некоторым множеством точек M плоскости, в связи с чем функцию двух переменных часто называют функцией точки и обозначают $z = f(M)$, а ее область задания отождествляют с множеством изображающих ее точек. Аналогично вводятся понятия функции трех и более переменных.

§2. Геометрическое изображение функции двух переменных

Как известно, функция одной переменной геометрически изображается на плоскости в виде линии, определяемой уравнением $z = f(x,y)$.

Аналогично этому функция двух переменных геометрически изображается в виде поверхности, определяемой в декартовой системе координат $OXYZ$ уравнением $z = f(x,y)$.

Построение графиков функций двух переменных в большинстве случаев представляет значительные трудности. Поэтому часто функцию двух переменных изучают с помощью линии уровня.

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется множество точек (x,y) плоскости OXY, в которых функция принимает одно и то же значение.

В случае функции $u = f(x,y,z)$ трех переменных можно использовать так называемые поверхности уровня.

Поверхностью уровня функции $u = f(x,y,z)$ называется геометрическое место точек пространства $OXYZ$, в которых функция принимает одно и то же значение.

§3. Понятие предела функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x,y)$ задана в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, кроме, быть может, самой точки M_0.

Определение. Число A называется пределом функции $z = f(x,y)$ при $x \to x_0$,

$y \to y_0$ (или в точке M_0), если для любой последовательности точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ указанной окрестности, сходящейся к точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n, y_n)\}$ сходится к A. Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ или $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$.

Определение. Число A называется пределом функции $z = f(x,y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ (или в точке $M_0(x_0, y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек, удовлетворяющих условию $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Определение 1 и 2 предела функции эквивалентны.

Теорема 3.1. Если функции $z = f(x,y)$ и $g(x, y)$ имеют в точке (x_0, y_0) пределы, равные A и B, то функции $f(x,y) \pm g(x,y)$, $f(x, y) \cdot g(x, y)$ и $f(x, y)/g(x, y)$ $(B \neq 0)$ имеют в точке пределы, равные соответственно $A \pm B$, $A \cdot B$, A / B.

§4. Непрерывность функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно установить, что для функции двух переменных сумма, разность и произведение двух непрерывных функций есть непрерывная функция; частное двух непрерывных функций есть непрерывная функция в точках, в которых знаменатель отличен от нуля; сложная функция, составленная из непрерывных функций есть непрерывная функция и т.д.

Часто приходится пользоваться еще одним определением непрерывности функции, эквивалентным данному.

Выражение

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

называется полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующим приращением аргументов Δx и Δy.

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение в этой точке есть бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$,

$$\text{т.е. } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Геометрически это означает, что при $M \to M_0$ $f(M) \to f(M_0)$.

§5. Основные свойства непрерывных функций двух переменных

Пусть G - некоторое множество точек плоскости OXY.

1^0. Множество точек G называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек этого множества.

2^0. Точка M называется внутренней точкой множества G, если существует δ -окрестность этой точки, состоящей из точек этого множества.

3^0. Множество G, состоящее лишь из внутренних точек, называется открытым множеством.

4^0. Связное открытое множество точек G называется открытой областью или, короче, областью.

5^0.Точка M называется граничной точкой области G, если в любой ее δ -окрестности есть точки как принадлежащие, так и не принадлежащие этой области.

6^0. Множество точек G, образованное областью и ее границей, называется замкнутой областью и обозначается $\overline{G}$.

7^0. Множество G называется ограниченным, если существует круг, внутри которого оно содержится.

Теорема 5.1 (первая теорема Вейерштрасса). Функция $z = f(x,y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области, ограничена в этой области, т.е. существует число $M > 0$ такое, что для всех точек области выполняется неравенство $|f(x, y)| \le M$.

Теорема 5.2 (вторая теорема Вейерштрасса). Функция $z = f(x,y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в этой области своих точных верхней и нижней граней.

Теорема 5.3. Функция $z = f(x,y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области, принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями, т.е. если $A < C < B$, где A и B какие-то значения функции в данной области, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0) = C$.