10 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

10.1 Площадь плоской фигуры

1) Вычисление площади в декартовых координатах

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком оси OX между точками a и b (рис.37).

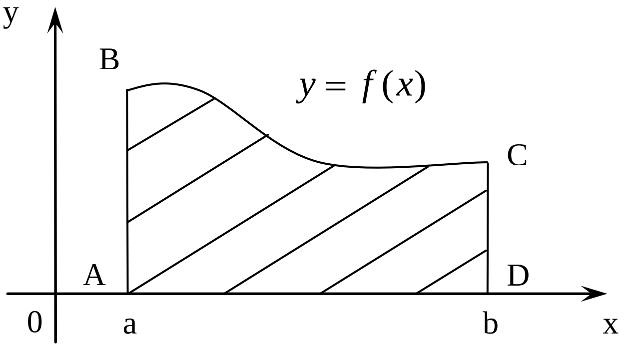

Рисунок 37

Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то площадь криволинейной трапеции ABCD в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{10.1}$$

Если $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то площадь криволинейной трапеции $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 38) вычисляется по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{10.2}$$

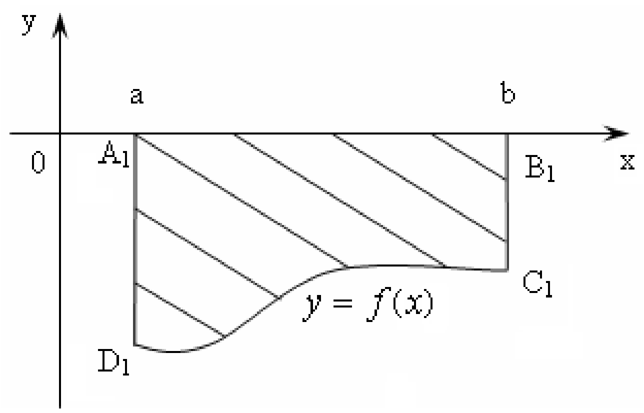

Рисунок 38

Если $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a,b]$, то площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.39), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \tag{10.3}$$

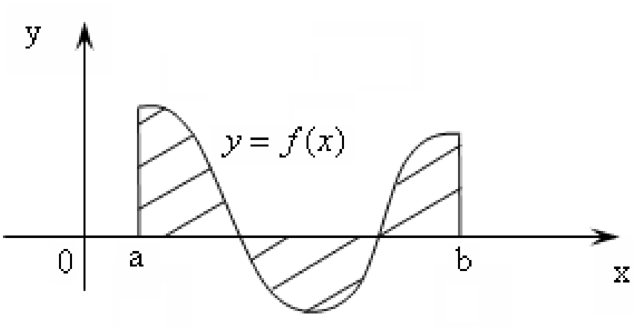

Рисунок 39

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.40), определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \tag{10.4}$$

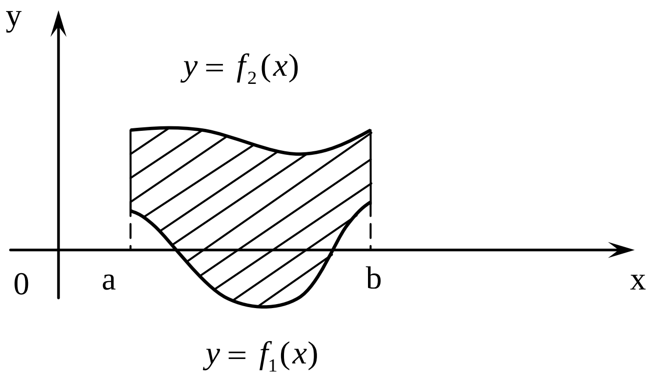

Рисунок 40

Замечание. Иногда удобно использовать приведенные формулы, но по переменной y (считая x функцией от y), например (рис.41)

$$S = \int_c^d f(y)dy\,. \tag{10.5}$$

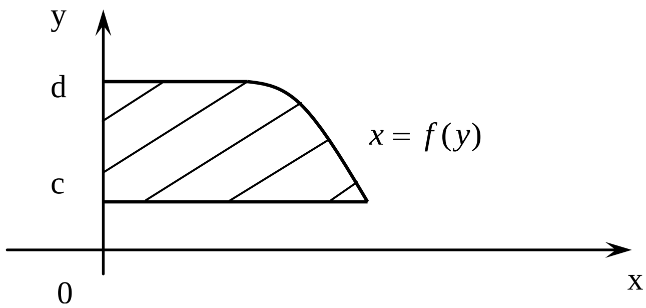

Рисунок 41

Пример 10.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2, \quad y = x.$$

Решение.

Найдем точки пересечения данных линий:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$A(-1,-1)$, $B(2,2)$ - точки пересечения данных линий (рис.42).

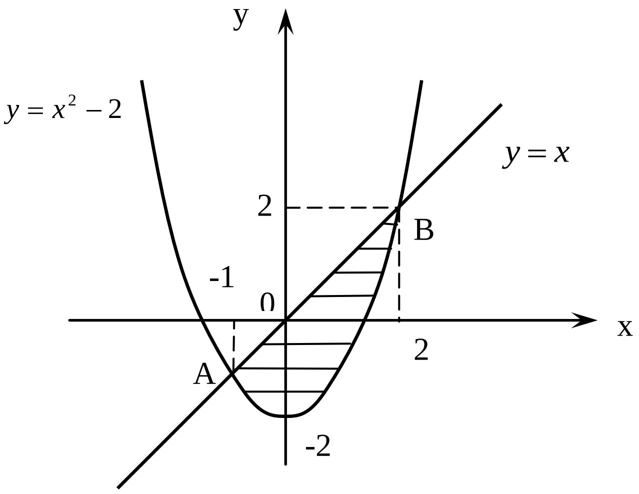

Рисунок 42

Теперь по формуле (10.4) вычисляем искомую площадь при

$$f_1(x) = x^2 - 2, \; f_2(x) = x, \; a = -1, \; b = 2.$$

Получим

$$S = \int_{-1}^{2} \left(x - (x^2 - 2)\right) dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} + 2x\bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - (\frac{8}{3} + \frac{1}{3}) + 4 + 2 = 4{,}5\,(кв.ед.).$$

<u>2) Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями</u>

Если фигура ограничена кривой, заданной уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью OX, то площадь ее вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt, \qquad (10.6)$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений

$$a = x(t_1),\ b = x(t_2),\ \ (y(t) \ge 0\ \forall t \in [t_1, t_2]).$$

Пример 10.2. Найти площадь фигуры, ограниченную первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$ и отрезком оси абсцисс (рис.43).

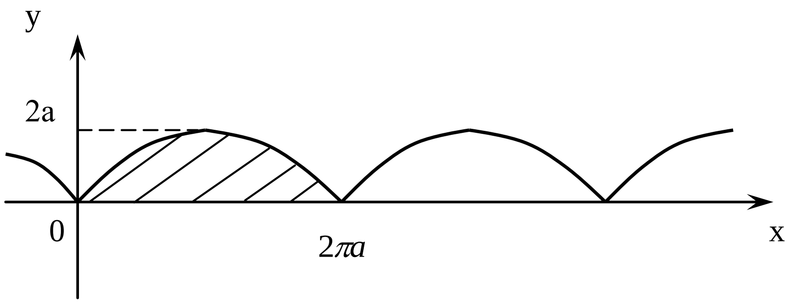

Рисунок 43

Решение.

Для определения искомой площади воспользуемся формулой (10.6). Найдем значения t_1 и t_2.

$0 = a(t - \sin t),\ \sin t = t \Rightarrow t_1 = 0$

$2\pi a = a(t - \sin t),\ t - \sin t = 2\pi \Rightarrow t_2 = a\pi,$

Тогда

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)(a(t-\sin t))' dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2\,(кв.ед.)$$

<u>3) Вычисление площади в полярных координатах</u>

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой заданной в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, двумя прямыми $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (рис.44) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi. \qquad (10.7)$$

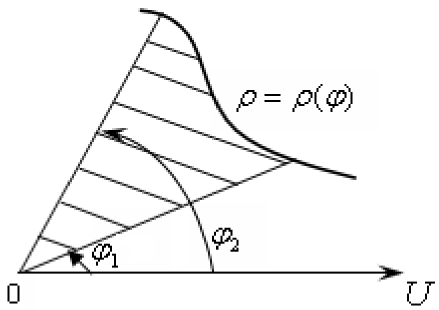

Рисунок 44

Пример 10.3. Найти площадь фигуры, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^{2\cdot} \cos 2\varphi$ (рис.45).

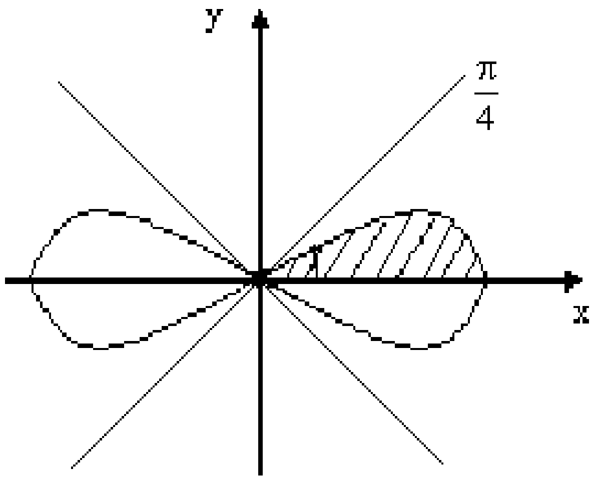

Рисунок 45

Решение.

В силу симметрии достаточно вычислить одну четверть искомой площади и умножить ее на 4.

По формуле (10.7) имеем

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \ (кв.ед.).$$

10.2 Длина дуги кривой

1) Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то длина l ее дуги равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \qquad (10.8)$$

где a и b – абсциссы концов дуги.

2) Если кривая заданна параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, где $x(t),\ y(t)$ - непрерывные функции с непрерывными производными, то длина l кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \qquad (10.9)$$

Аналогично выражается длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt. \qquad (10.10)$$

3) Если кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$,

$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, причем $\rho(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$ имеет непрерывную производную, то длина l кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \qquad (10.11)$$

Пример 10.4. Вычислить длину дуги астроиды

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (рис.46).

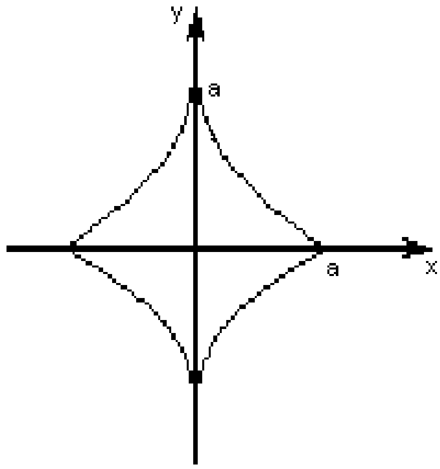

Рисунок 46

Решение.

Кривая симметрична относительно обеих координатных осей, поэтому по формуле (10.9) вычислим длину ее четвертой части и умножим результат на 4.

Имеем

$$l = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\, dt = 12a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

10.3 Объем тела

<u>1) Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений</u>

Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX (рис.47), является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, от объем тела между плоскостями $x = a$, $x = b$ находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (10.12)$$

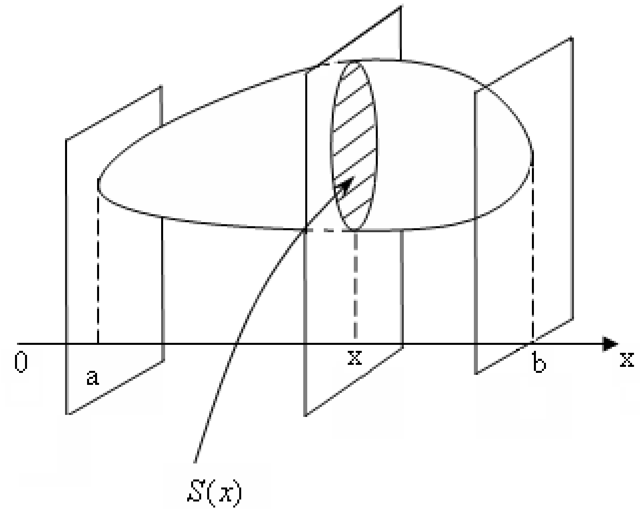

Рисунок 47

2) Вычисление объема тела вращения

а) Если криволинейная трапеция, ограниченна кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси OX, то объем тела вращения (рис.48) вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (10.13)$$

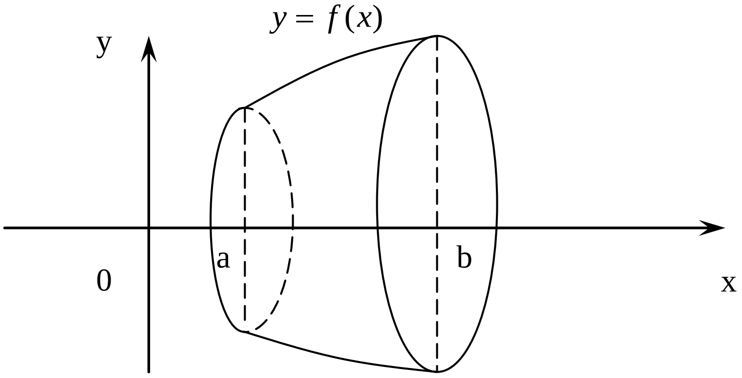

Рисунок 48

б) Объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис.49), вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dx = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \qquad (10.14)$$

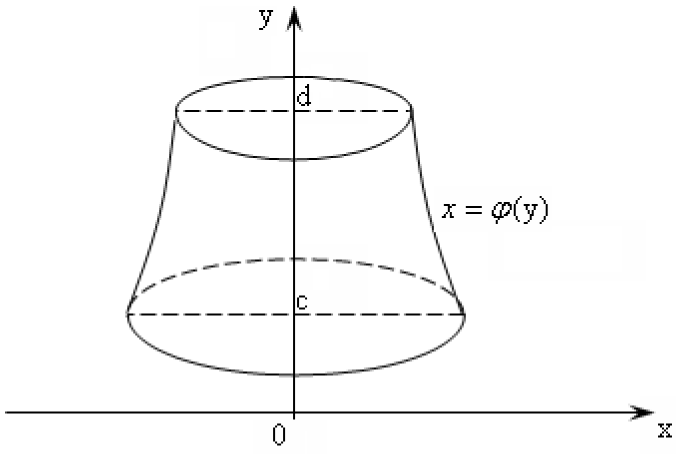

Рисунок 49

Пример 10.5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ (рис.50).

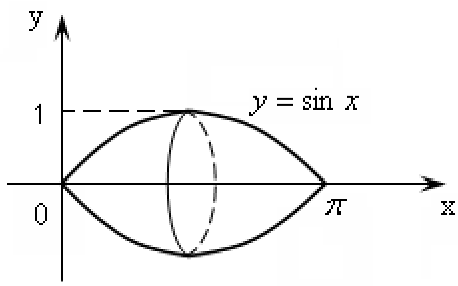

Рисунок 50

Решение.

По формуле (10.13) находим

$$V_{OX} = \pi\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \ (куб.ед.).$$

10.4 Площадь поверхности вращения

1) Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $y = f(x)$ между точками с абсциссами $x = a$, $x = b$, выражается формулой

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (10.15)$$

2) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt. \qquad (10.16)$$

3) Если кривая задана в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \qquad (10.17)$$

Пример 10.6. Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ вокруг оси OX.

Решение.

По формуле (10.16) имеем

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+(a(1-\cos t))^2}\,dt = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = -16\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$= -16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64\pi a^2}{3}(\text{кв.ед.}).$$

10.5 Моменты и центры масс плоских кривых

Если дуга материальной кривой задана уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$ и имеет плотность $\rho=\rho(x)$, то:

1) статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно осей OX и OY соответственно равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x)\cdot f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x)\cdot x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

2) моменты инерции I_x и I_y относительно осей OX и OY вычисляются по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x)\cdot f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x)\cdot x^2\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

3) координаты центра тяжести $\bar{x}$ и $\bar{y}$ этой кривой вычисляются по формулам

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{1}{m}\int_a^b \rho(x)\cdot x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{1}{m}\int_a^b \rho(x)\cdot f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

где $m=\int_a^b \rho(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$ - масса дуги.

Теорема Гульдена. Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой ее центром масс.

10.6 Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры

Если материальная плоская область ограничена кривой $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a,\ x=b,\ y=0$ и имеет постоянную плотность ρ, то:

1) Статические моменты относительно осей OX и OY соответственно равны

$$M_x=\frac{\rho}{2}\int_a^b y^2dx,\quad M_y=\rho\int_a^b xy\,dx.$$

2) Координаты центра тяжести $\bar{x}$ и $\bar{y}$ плоской области находятся по формулам

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx},\quad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

10.7 Работа переменной силы. Путь, пройденный телом

1) Работа переменной силы $F=F(x)$, действующей в направлении оси OX на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b F(x)dx.$$

2) Путь, пройденный материальной точкой по прямой с переменной скоростью $V=V(t)$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt.$$

10.8 Контрольные вопросы

1. Какие формулы используют для вычисления площади плоской фигуры?
2. Какие формулы используют для вычисления длины дуги?
3. Какие формулы используют для вычисления объема тела?
4. Какие формулы используют для вычисления площади поверхности вращения?
5. Как вычисляются статические моменты и моменты инерции дуги относительно осей координат?
6. Как вычисляются координаты центра тяжести кривой?
7. По каким формулам вычисляются статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры?
8. Как вычисляется работа переменной силы и путь, пройденный телом?