# 9 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 9.1 Определение определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $(a < b)$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на $n$ произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b \text{ (рис.36).}$$

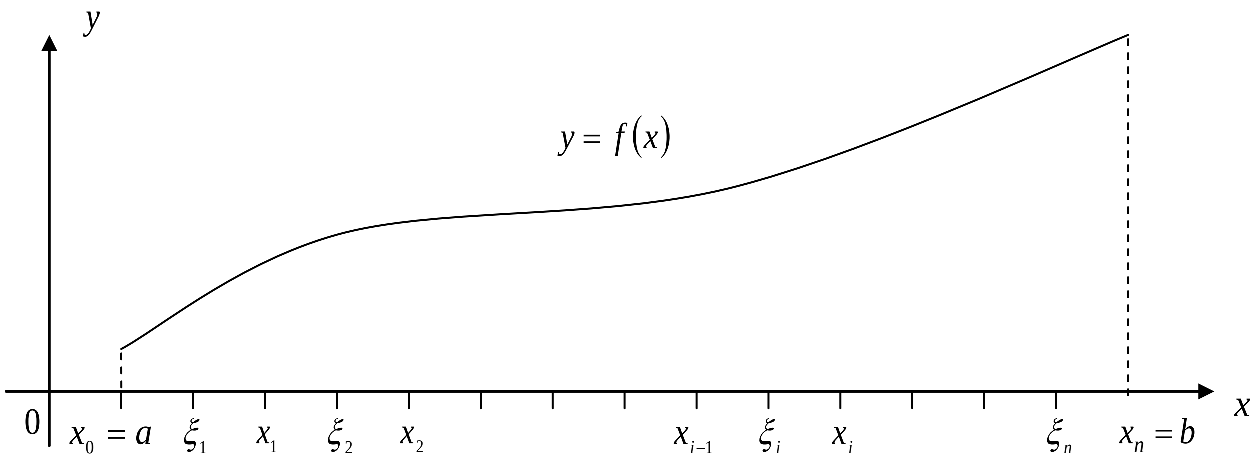


Рисунок 36

В каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $\xi_i$ и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(\xi_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Составим сумму произведений значений функции $f(\xi_i)$ на длину частичного отрезка

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

получим

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (9.1)$$

Сумма (9.1) называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Обозначим через $\lambda$ длину наибольшего частичного отрезка

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}.$$

Если существует конечный предел интегральных сумм $S_n$ при $\lambda \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек $\xi_i$ в них, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \qquad (9.2)$$

Числа $a$ и $b$ называют соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования.*

Теорема Коши. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

## 9.2 Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный, т.е.
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \,.$$
2. Определенный интеграл с равными нижним и верхним пределами равен нулю, т.е.
$$\int_a^a f(x)dx = 0 \,.$$
3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.
$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \,, \qquad k = const \,.$$
4. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых
$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx \,.$$
5. Для любых чисел $a$, $b$ и $c$ имеет место равенство
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \,.$$
6. Если $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a,b)$, то
$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 \,.$$
7. Если $f(x) \ge \varphi(x) \quad \forall x \in (a,b)$, то
$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx \,.$$
8. Если $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$, $a < b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

где $m, M$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

9. Теорема о среднем. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $(a < b)$, то найдется такое значение $c \in (a,b)$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

10. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \left[\begin{array}{l} 2 \cdot \int_0^a f(x)dx, \ \textit{если} \ \ f(x) - \textit{четная} \\ 0, \ \textit{если} \ \ f(x) - \textit{нечетная} \end{array}\right.$

11. $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$

12. Производная определенного интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т.е.

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

13. Связь между неопределенным и определенным интегралами

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + c.$$

14. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

## 9.3 Формула Ньютона – Лейбница

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая ее первообразная на отрезке $[a,b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется ф о р м у л о й  Н ь ю т о н а – Л е й б н и ц а и ее можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

*Примеры*.

1. $\int\limits_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}$.

2. $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$.

3. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

4. $\int\limits_0^3 e^x dx = e^x\Big|_0^3 = e^3 - 1$.

## 9.4 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a,b]$.

Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$;
2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a,b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Замечания.

1. Часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$.
2. При замене переменной нужно поменять пределы интегрирования.
3. При вычислении определенного интеграла методом замены переменной не надо возвращаться к старой переменной.

*Пример 9.1*. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ при\ \ x = 0,\ t = 0 \\ при\ \ x = 1,\ t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right] = \frac{\pi}{4}.$$

## 9.5 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

<u>Теорема</u>. Если функции $U=U(x)$ и $V=V(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int_a^b V\,dU .$$

Доказательство.

Т.к.

$$(UV)' = U'\cdot V + U\cdot V' \quad \forall x\in[a,b],$$

то $UV$ является первообразной для $U'\cdot V+U\cdot V'$, тогда

$$\int_a^b \left(U'\cdot V + U\cdot V'\right)dx = UV\Big|_a^b$$

или

$$\int_a^b \left(V\cdot U'\right)dx + \int_a^b \left(U\cdot V'\right)dx = UV\Big|_a^b ,$$

отсюда

$$\int_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int_a^b V\,dU .$$

*Пример 9.2*. Вычислить $\int_1^2 xe^x dx$.

Решение.

$$\int_1^2 xe^x dx = \left|\begin{array}{l} U=x \\ dU=dx \\ dV=e^x dx \\ V=\int e^x dx = e^x \end{array}\right| = x\cdot e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2 .$$

*Пример 9.3*. Вычислить $\int_1^e x\cdot \ln x dx$.

Решение.

$$\int_1^e x\cdot\ln x dx = \left|\begin{array}{l} U=\ln x \\ dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=xdx \\ V=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right| = \ln x\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

## 9.6 Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$?
2. Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$?
3. Когда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$?
4. Какие основные свойства определенного интеграла?
5. Какая формула называется формулой Ньютона-Лейбница?
6. Какая формула замены переменной в определенном интеграле?
7. Какая формула интегрирования по частям в определенном интеграле?