8 ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

8.1 Дробно-рациональные функции

Дробной рациональной функцией (рациональной дробью) называется функция вида

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n} \quad \text{или} \quad f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ - многочлены соответственно m-ой и n-ой степени относительно x.

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена знаменателя, т.е. $m<n$; в противном случае $(m\geq n)$ рациональная дробь называется неправильной.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m\geq n)$ можно представить в виде суммы многочлена $M_{m-n}(x)$ и правильной дроби $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ с помощью деления многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$, т.е.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{R(x)}{Q_n(x)}.$$

Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей.

Типы простейших дробей:

1) $\frac{A}{x-a}$,

2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ $\quad (n=1,2,3,\ldots)$,

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$.

Здесь A, a, p, q, M, N - действительные числа, причем $\frac{p^2}{4}-q<0$.

8.2 Интегрирование простейших рациональных дробей

1) $\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)}=A\ln|x-a|+c$

2) $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,d\,(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c$

3) $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q} = \left| x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \right| = \int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$

$$= \left| \begin{array}{ll} x+\frac{p}{2} = t & x = t-\frac{p}{2} \\ dx = dt & q-\frac{p^2}{4} = a^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt = M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{a}\cdot arctg\frac{t}{a} + c =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c\,.$$

4) $\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x+\frac{p}{2} = t & dx = dt \\ x = t-\frac{p}{2} & a^2 = q-\frac{p^2}{4} \end{array} \right| =$

$$= \frac{M}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\,.$$

Пусть

$$I_n = \int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n},$$

тогда имеет место рекуррентная формула

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right),\ \ n>1.$$

8.3 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Рассмотрим правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Пусть для определённости знаменатель $Q(x)$ разложен на множители в виде:

$$Q(x)=(x-a)^k\cdot(x-b)^l\cdot(x^2+px+q)^m,$$

причём $\frac{p^2}{4}-q<0$, тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Всякую правильную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно единственным образом разложить в сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_l}{(x-b)^l}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

где $A_1,A_2,...,A_k,B_1,B_2,...,B_l,M_1,\ N_1,\ M_2,N_2,...,M_m,N_m$ - некоторые действительные числа.

Примеры разложения некоторых правильных рациональных дробей на сумму простейших дробей:

1) $\frac{x^2+5}{(x-3)(x+2)(x-7)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-7}$,

2) $\frac{x-3}{x^2(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+5}$,

3) $\frac{x^3+1}{(x-1)^2(x^2+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+5}$,

4) $\frac{3x^2-2x+8}{(x+5)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+5}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$,

5) $\frac{x^3+5}{(x^2+1)(x^2+2x+2)^2}=\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$.

Чтобы найти коэффициенты A,B,C,D,M,N в приведенных примерах, можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

8.4 Интегрирование рациональных дробей

При нахождении интегралов от рациональных дробей необходимо придерживаться следующего правила, используя материал в пунктах 8.1 - 8.3.

1. Если рациональная дробь неправильная, то необходимо представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Разложить знаменатель правильной дроби на множители.
3. Представить правильную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей.
4. Проинтегрировать многочлен и сумму простейших дробей.

Пример 8.1. Найти интеграл $\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x}dx = \left| \begin{array}{l|l} \_\; x^5-x^4-6x^3+2 & \underline{x^3-4x^2+4x} \\ \underline{x^5-4x^4+4x^3} & x^2+3x+2 \\ \quad \_\; 3x^4-10x^3+2 & \\ \quad\quad \underline{3x^4-12x^3+12x^2} & \\ \quad\quad\quad \_\; 2x^3-12x^2+2 & \\ \quad\quad\quad\quad \underline{2x^3-8x^2+8x} & \\ \quad\quad\quad\quad\quad -4x^2-8x+2 & \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(x^2 + 3x + 2 + \frac{-4x^2 - 8x + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx \right) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2\int \frac{2x^2 + 4x - 1}{x(x-2)^2} dx.$$

Разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2x^2 + 4x - 1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Из равенства дробей следует равенство числителей

$$2x^2 + 4x - 1 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx.$$

При x = 0 имеем $-1 = 4A$, $A = -\frac{1}{4}$

x = 2 имеем $15 = 2C$, $C = \frac{15}{2}$

x = 1 имеем $5 = A - B + C$, $5 = -\frac{1}{4} - B + \frac{15}{2}$, $B = \frac{9}{4}$.

Тогда

$$\int \frac{2x^2 + 4x - 1}{x(x-2)^2} dx = \int \left(-\frac{1}{4x} + \frac{9}{4(x-2)} + \frac{15}{2(x-2)^2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{9}{4}\ln|x-2| - \frac{15}{2\,(x-2)} + c.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 2}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{15}{(x-2)} + c.$$

8.5 Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots \right) dx$,

где $R(x, y, z, \ldots)$ - рациональная функция своих аргументов,

$m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ - целые числа,

сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где s - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

2. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$,

где R - рациональная функция двух аргументов,

после выделения полного квадрата и замены переменной $x + \frac{b}{2a} = u$, приводятся к интегралам одного из следующих трёх типов:

1) $\int R\left(u, \sqrt{k^2 - u^2}\right)du$,

2) $\int R\left(u, \sqrt{k^2 + u^2}\right)du$,

3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2 - k^2}\right)du$.

Последние интегралы можно найти с помощью соответствующих подстановок:

1) $u = k\sin t$,

2) $u = k\,tgt$,

3) $u = \frac{k}{\cos t}$.

Пример 8.2. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}} \\ НОК(2,3) = 6 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} =$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = \left| \begin{array}{l|l} -\; t^3 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & t^2-t+1 \\ \quad -\,-t^2 & \\ \quad \underline{-t^2-t} & \\ \qquad -\; t & \\ \qquad \underline{t+1} & \\ \qquad\; -1 & \end{array} \right| = 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1})dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + c = \left| t = \sqrt[6]{x} \right| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + c.$$

Пример 8.3. Найти $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1-x)^2}$.

Решение.

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1-x)^2}=\left|\begin{array}{ll}\frac{1-x}{1+x}=t^2, & dx=-\frac{4t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}\\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, & 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=-\int\frac{\left(1+t^2\right)^2\cdot 4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+c=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c.$$

8.6 Интегрирование тригонометрических выражений

1) Интегралы вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$, где

а) m или n – нечётное положительное целое число.
Для интегралов такого вида используют подстановку:

$\sin x=t$, если n – нечётное,

$\cos x=t$, если m – нечётное.

б) m и n – чётные, неотрицательные числа.
Здесь надо преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

в) $m+n$ - чётное отрицательное целое число.
В этом случае подстановка $tgx=t$ сводит интеграл к табличному.

2) Интегралы вида

$$\int\sin ax\cos bx\,dx,\ \int\cos ax\cos bx\,dx,\ \int\sin ax\sin bx\,dx$$

находятся с помощью формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

3) Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$,

где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.
Интегралы этого вида сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$tg\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

4) Интегралы вида $\int tg^n x\,dx$, $\int ctg^n x\,dx$,

где n – целое положительное число.

При нахождении таких интегралов применяются соответственно формулы

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

с помощью которых последовательно понижается степень тангенса или котангенса.

8.7 Интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях

Известно, что всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, то, говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ «берется», т.е. интеграл выражается через элементарные функции. Если интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «не берется».

Примеры «неберущихся» интегралов:

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ (*интегральный синус*), $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (*интегральный косинус*),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ (*интегральный логарифм*), $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (*интегралы Френеля*),

$\int \frac{e^x}{x} dx$ (*интегральная показательная функция*), $\int e^{-x^2} dx$ (*интеграл Пуассона*),

$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x)}}$, $(k^2 < 1)$.

8.8 Контрольные вопросы

1. Что называется дробно-рациональной функцией?
2. Какая рациональная дробь называется правильной (неправильной)?
3. Как можно представить неправильную рациональную дробь?
4. Какие бывают типы простейших дробей?
5. Как интегрируются простейшие дроби?
6. Как раскладывается правильная рациональная дробь на простейшие дроби?
7. Какое правило интегрирования рациональных дробей?
8. Как находятся интегралы от иррациональных функций?
9. Как интегрируются тригонометрические выражения?