7 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

7.1 Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется п е р в о о б р а з н о й для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in X$.

Например, для функции $f(x)=x^2$ первообразной является функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$, т.к. $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$.

Теорема. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то любая другая первообразная для $f(x)$ на этом промежутке имеет вид $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ на промежутке X, где C – произвольная постоянная, называется н е о п р е д е л е н н ы м и н т е г р а л о м о т ф у н к ц и и $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Здесь $f(x)$ называется п о д ы н т е г р а л ь н о й ф у н к ц и е й,
$f(x)\,dx$ – п о д ы н т е г р а л ь н ы м в ы р а ж е н и е м,
x – п е р е м е н н о й и н т е г р и р о в а н и я,
$\int$ – з н а к о м н е о п р е д е л е н н о г о и н т е г р а л а

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется и н т е г р и р о в а н и е м этой функции.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.

7.2 Основные свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции
$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$
2) Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению
$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$$
3) Неопределенный интеграл от производной функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной
$$\int f'(x)dx=f(x)+c.$$
4) Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции

равен сумме этой функции и произвольной постоянной

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

5) Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \quad k \neq 0 \text{ - постоянная.}$$

6) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

7.3 Таблица основных неопределенных интегралов

Приведем таблицу основных интегралов.

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c, \quad x \neq 0$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,\ a \neq 1$

5) $\int e^x dx = e^x + c$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7) $\int \cos x dx = \sin x + c$

8) $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$

9) $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$

10) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c, \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$

11) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c, \quad (x \neq \pi n, n \in Z)$

12) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$

13) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$

14) $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + c$

15) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c, \quad (a \neq 0)$

16) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \quad (a \neq 0)$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c, \quad (|x| < 1)$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad (|x| < |a|)$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

20) $\int shx\, dx = chx + c$

21) $\int chx\, dx = shx + c$

22) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$

23) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$

Вычисление интегралов с помощью основных их свойств и таблицы основных интегралов называется непосредственным интегрированием.

Пример 7.1. Найти интеграл $\int (8x^3 + 5x^2 - 3x + 4)dx$.

Решение.

$$\int (8x^3 + 5x^2 - 3x + 4)dx = 8\int x^3 dx + 5\int x^2 dx - 3\int x dx + 4\int dx =$$

$$= 8 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + c = 2x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + c.$$

Пример 7.2. Найти интеграл $\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\, dx$.

Решение.

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\, dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}} dx + 3\int x^{-\frac{5}{6}} dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} + 5 \cdot \ln|x| + c = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + c.$$

7.4 Метод интегрирования заменой переменной (подстановкой)

Часто удается с помощью замены переменной интегрирования упростить данный интеграл.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$.

Выполним подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную.

Учитывая, что $dx=\varphi'(t)dt$, получим формулу и н т е г р и р о в а н и я з а м е н о й п е р е м е н н о й (п о д с т а н о в к о й)

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Иногда используют подстановку вида $t=\varphi(x)$, тогда

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

Замечание. После нахождения интеграла надо перейти от новой переменной t к переменной x.

Пример 7.3. Найти интеграл $\int\cos 5x\,dx$.

Решение.

$$\int\cos 5x\,dx=\left|\begin{array}{c}5x=t,\\ x=\dfrac{t}{5},\\ dx=\dfrac{1}{5}dt\end{array}\right|=\frac{1}{5}\int\cos t\,dt=\frac{1}{5}\sin t+c=\frac{1}{5}\sin 5x+c$$

Пример 7.4. Найти интеграл $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+5}}$.

Решение.

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+5}}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{x+5}=t,\\ x+5=t^2,\\ x=t^2-5\\ dx=\left(t^2-5\right)'dt=2t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^2-5\right)2t\,dt}{t}=2\int\left(t^2-5\right)dt=2\cdot\left(\frac{t^3}{3}-5t\right)+c=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3}-10\sqrt{x+5}+c.$$

7.5 Метод интегрирования по частям

Пусть $U=U(x)$ и $V=V(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные, тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям

$$\int U\,dV=UV-\int VdU.$$

Доказательство.

Интегрируя равенство

$$d(UV)=U\,dV+V\,dU,$$

получим

$$\int d(UV)=\int U\,dV+\int V\,dU$$

или
$$\int U\,dV=UV-\int V\,dU.$$

Рассмотрим некоторые типы интегралов, которые можно найти с помощью метода интегрирования по частям.

1) Интегралы вида

$$\int P_n(x)\sin kx\,dx, \int P_n(x)e^{kx}\,dx, \int P_n(x)\cos kx\,dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, k – число.

В интегралах этих типов полагают $U = P_n(x)$, а dV - все остальные сомножители.

2) Интегралы вида

$$\int P_n(x)\ln kx dx,\ \int P_n(x)\arcsin kx dx,\ \int P_n(x)\arccos kx dx,$$

$$\int P_n(x) arctgkxdx,\ \int P_n(x) arcctgkxdx,$$

где $P_n(x)$ - многочлен n-ой степени, k - число.

В этом случае за U принимают функцию, являющуюся множителем при многочлене $P_n(x)$.

3) Интегралы вида

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ \int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Эти интегралы находятся двукратным интегрированием по частям.

Пример 7.5. Найти $\int (3x+2)e^{5x}dx$.

Решение.

$$\int (3x+2)e^{5x}dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x+2 \\ dU = (3x+2)'dx = 3dx \\ dV = e^{5x}dx \\ V = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} \end{array} \right| = (3x+2)\cdot\frac{1}{5}e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x}\cdot 3dx =$$

$$= \frac{1}{5}(3x+2)e^{5x} - \frac{3}{25}e^{5x} + c = \frac{e^{5x}}{5}\left(3x - \frac{7}{5}\right) + c.$$

Пример 7.6. Найти $\int x^2\cos 3x\,dx$.

Решение.

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \left| \begin{array}{l} U = x^2 \\ dU = 2xdx \\ dV = \cos 3xdx \\ V = \int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = x^2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2x\,dx =$$

$$=\frac{1}{3}x^2\sin 3x-\frac{2}{3}\cdot\int x\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{l}U=x\\ dU=dx\\ dV=\sin 3x dx\\ V=\int\sin 3x dx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3x dx\right)=\frac{x^2}{3}\sin 3x+\frac{2}{9}\cdot\left(x\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)+c=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{2}{9}\right)\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x+c.$$

Пример 7.7. Найти $\int x^5\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int x^5\ln x dx=\left|\begin{array}{l}U=\ln x\\ dU=\frac{1}{x}dx\\ dV=x^5dx\\ V=\int x^5dx=\frac{x^6}{6}\end{array}\right|=\ln x\cdot\frac{x^6}{6}-\frac{1}{6}\int x^6\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^6}{6}\ln x-\frac{1}{6}\int x^5dx=$$

$$=\frac{x^6}{6}\ln x-\frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{6}+c=\frac{x^6}{6}\left(\ln x-\frac{1}{6}\right)+c.$$

Пример 7.8. Найти $\int arctgx dx$.

Решение.

$$\int arctgx dx=\left|\begin{array}{l}U=arctgx\\ dU=\frac{dx}{1+x^2}\\ dV=dx\\ V=x\end{array}\right|=arctgx\cdot x-\int\frac{xdx}{x^2+1}=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=$$

$$=x\,arctgx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$$

Пример 7.9. Найти $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$.

Решение.

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{l}U=e^{3x}\\ dU=3e^{3x}dx\\ dV=\cos 2x dx\\ V=\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|=\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}\int\sin 2x e^{3x}dx=$$

$$= \left| \begin{array}{l} U = e^{3x} \\ dU = 3e^{3x}dx \\ dV = \sin 2x dx \\ V = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\, dx \right) =$$

$$= \frac{e^{3x}}{2}\left(\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x \right) - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\, dx .$$

Перенося полученный интеграл в левую часть, получим:

$$\left(1 + \frac{9}{4} \right) \cdot \int e^{3x}\cos 2x\, dx = \frac{e^{3x}}{2}\left(\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x \right) + c,$$

отсюда

$$\int e^{3x}\cos 2x\, dx = \frac{e^{3x}}{13}(2\sin 2x + 3\cos 2x) + c .$$

7.6 Контрольные вопросы

1. Что называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X ?
2. Что называется неопределенным интегралом, и какие его основные свойства?
3. Каковы табличные интегралы?
4. Как находят интегралы методом замены переменной?
5. Какова формула интегрирования по частям?
6. Какие типы интегралов можно находить с помощью метода интегрирования по частям?