4 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

4.1 Понятие производной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b).

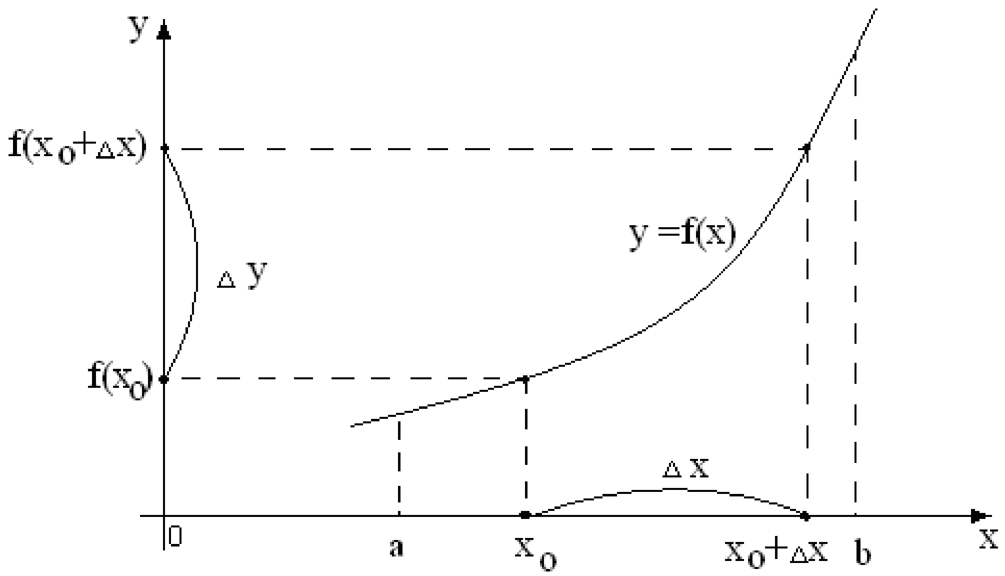


Рисунок 18

Возьмем любую точку $x_0 \in (a,b)$. Дадим аргументу x в точке x_0 приращение Δx (рис.18), тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует).

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается символом:

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Итак, по определению:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция называется дифференцируемой на интервале (a,b), если она имеет производную в каждой точке этого интервала.

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

4.2 Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис.19).

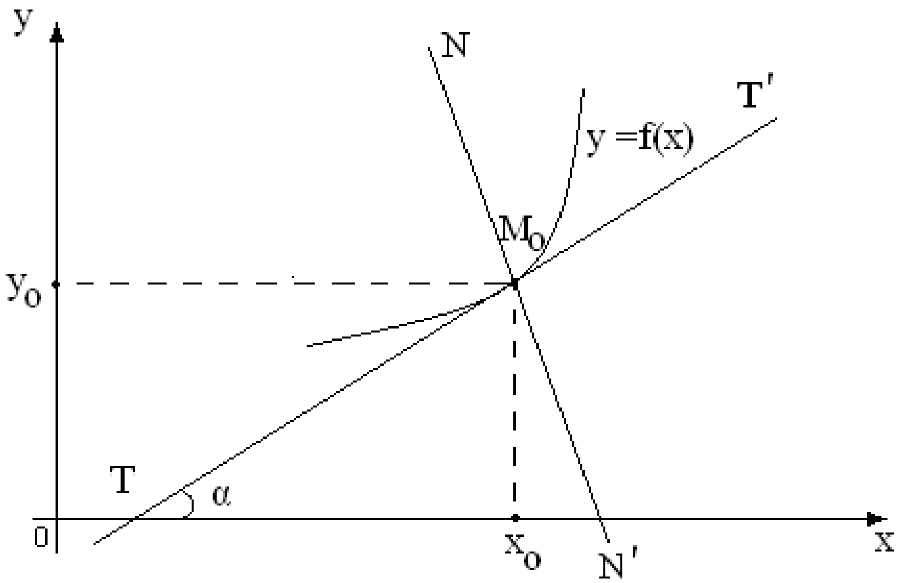


Рисунок 19

Значение производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной TT' к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = tg\,\alpha \quad \text{или} \quad f'(x_0) = k\,.$$

Уравнение касательной TT' к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Прямая NN', проходящая через точку касания $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно к касательной, называется нормалью к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Уравнение нормали NN' имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0).$$

4.3 Механический смысл производной

Пусть известен закон движения материальной точки по прямой линии в виде $S = S(t)$, где S - пройденный путь, t - время.

Тогда мгновенная скорость этой точки в момент времени t_0 есть производная от пути S по времени t при $t = t_0$, т.е.

$$V(t_0) = S'(t_0) \quad \text{или} \quad V(t_0) = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Действительно, за время t_0 точка пройдет путь, равный $S_0 = S(t_0)$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ путь, равный $S_0 + \Delta S = S(t_0 + \Delta t)$ (рис.20).

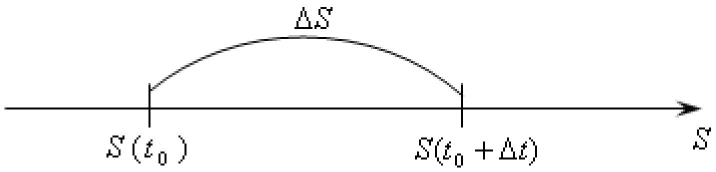


Рисунок 20

Тогда средняя скорость точки за промежуток Δt будет

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t},$$

а мгновенная скорость в момент t_0 имеет вид

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Замечание. Если функция $y = f(x)$ описывает некоторый физический процесс, то производная $y' = f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса (физический смысл производной).

4.4 Понятие дифференцируемости функции

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где A - некоторое число, не зависящее от Δx, а α - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Отметим, что $A = f'(x_0)$, тогда условие дифференцируемости функции можно записать в виде

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0, то она и непрерывна в этой точке (Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции).

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \text{ где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой.

Пример 4.1. Функция $y=|x|$ непрерывна при $x=0$, но не имеет производной в этой точке, т.к. в этой точке

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\left[\begin{array}{ll}1 & при\ \Delta x>0\\ -1 & при\ \Delta x<0\end{array}\right.,$$

следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, значит функция $y=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$.

Касательная к графику функции $y=|x|$ в точке $x=0$ не существует (рис.21).

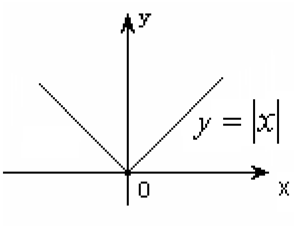


Рисунок 21

4.5 Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций

Теорема. Если функции $U=U(x)$ и $V=V(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то в этой точке дифференцируемы сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $V(x)\neq 0$), причем имеют место формулы:

1. $(U\pm V)'=U'\pm V'$,
2. $(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V'$,
3. $\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'\cdot V-U\cdot V'}{V^2}$, $V\neq 0$

Следствия:

1. $(C\cdot U)'=C\cdot U'$, $C=const$
2. $\left(\frac{U}{C}\right)'=\frac{1}{C}\cdot U'$, $C=const$
3. $\left(\frac{C}{V}\right)'=-\frac{CV'}{V^2}$, $C=const$
4. $(U\cdot V\cdot W)'=U'\cdot V\cdot W+U\cdot V'\cdot W+U\cdot V\cdot W'$, где функция $W=W(x)$ дифференцируема в точке x.

Докажем формулу $(U+V)'=U'+V'$.

Пусть $y=U+V$, тогда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\big(U(x+\Delta x)+V(x+\Delta x)\big)-\big(U(x)+V(x)\big)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{(U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x}+\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=U'+V'.$$

4.6 Производная сложной и обратной функций

Теорема 1. Если функция $U=\varphi(x)$ имеет производную $U'_x=\varphi'(x)$ в точке x, а функция $y=f(U)$ имеет производную y'_U в соответствующей точке $U=\varphi(x)$, то сложная функция $y=f\big(\varphi(x)\big)$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле

$$y'_x=y'_U\cdot U'_x.$$

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ строго монотонна на интервале (a,b) и $\mathrm{f}'(\mathrm{x})\neq 0\quad \forall x\in(a,b)$, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\quad \text{или}\quad x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

4.7 Таблица производных

В следующей таблице приводятся производные основных элементарных функций.

1) $(C)'=0,\quad (C=const)$	5) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
2) $(x)'=1$	6) $(e^x)'=e^x$
3) $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ (α - любое число)	7) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ ($a>0, a\neq 1$)
4) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	8) $(\ln x)'=\frac{1}{x}\quad (x>0)$

9) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$	16) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
10) $(\sin x)' = \cos x$	17) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
11) $(\cos x)' = -\sin x$	18) $(shx)' = chx$
12) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$	19) $(chx)' = shx$
13) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi, k \in Z)$	20) $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
14) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$	21) $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$	

Покажем вывод формулы производной функции $y = \sin x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$

т.е. $(\sin x)' = \cos x$.

4.8 Контрольные вопросы

1. Что называется производной функции в точке?
2. Какой геометрический смысл производной?
3. Какой механический смысл производной?
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
5. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции?
6. Каковы основные правила дифференцирования?
7. Какие формулы производных сложной и обратной функций?
8. Каковы табличные производные?

5 ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5.1 Понятие дифференциала функции и основные теоремы о дифференциалах

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. её приращение Δy в этой точке имеет вид

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x, \text{ где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции в этой точке и обозначается dy:

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x.$$

Учитывая, что дифференциал функции $y = x$ имеет вид

$$dy = dx = (x)'\cdot\Delta x = \Delta x, \text{ т.е. } dx = \Delta x,$$

тогда дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x можно записать в виде

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Геометрически дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, когда x получит приращение Δx (рис.22).

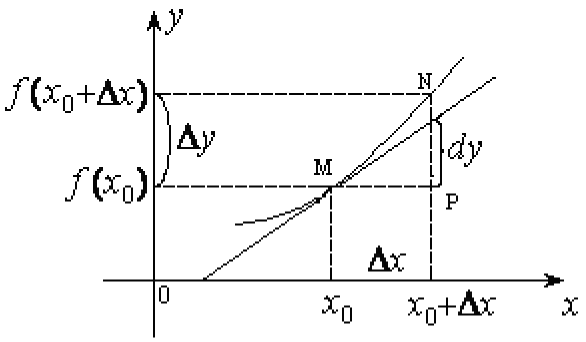


Рисунок 22

Теорема 1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются формулами:

1. $d(u+v) = du + dv$,
2. $d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv$,
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}, \ (v \neq 0)$.

Теорема 2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента, т.е. если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции, тогда дифференциал для сложной функции $y = f(\varphi(x))$ имеет вид:

$$dy = f'_u(u)\,du.$$

Заметим, что дифференциалы первого порядка функции $y = f(x)$ независимо от того, является ли аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента, определяются одной и той же формулой:

$$dy = f'(x)\,dx \quad \text{и} \quad dy = f'_u(u)\,du.$$

Это свойство дифференциала называют инвариантностью (независимостью) формы первого дифференциала.

Нетрудно преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов, например

$$d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x\,dx.$$

Аналогично получаем:

$$d(C) = 0, \quad (C = const)$$

$$d(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x\,dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x\,dx$$

$$d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d(a^x) = a^x \cdot \ln a\,dx$$

$$d(e^x) = e^x\,dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \cdot \ln a}$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(arcctgx) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

Замечание. Для приближенного вычисления дифференцируемой функции в близких к x_0 точках, когда $f(x_0)$ известно, можно использовать формулу:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x, \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Пример 5.1. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1{,}02}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$.

Так как $x_0 + \Delta x = 1{,}02$, то при $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}02$ получим

$f(1)=1$,

$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\qquad f'(1)=\frac{1}{3}$.

Тогда

$\sqrt[3]{1{,}02}\approx f(1)+f'(1)\cdot\Delta x=1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}02=1{,}0066...$

5.2 Дифференцирование неявной функции

Говорят, что функция $y=f(x)$, $x\in(a,b)$ неявно задана уравнением $F(x,y)=0$, если $F(x,f(x))=0$ для всех $x\in(a,b)$.

Если функция задана неявно уравнением $F(x,y)=0$, то для нахождения производной от y по x достаточно продифференцировать это уравнение по переменной x, рассматривая при этом y как функцию от x.

Пример 5.2. Найти производную функции y, заданной уравнением

$$x^5+y^5+xy=0.$$

Решение.

$(x^5+y^5+x\cdot y)'=(0)'$,

$5x^4+5y^4\cdot y'+y+xy'=0$.

Выразим y':

$5x^4+y+(5y^4+x)y'=0$,

$y'=-\frac{5x^4+y}{5y^4+x}$.

5.3 Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть функция y от x задана параметрически

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \qquad \text{где} \quad t - \text{параметр.}$$

Пусть $x=x(t)$ имеет обратную функцию, причем $x'(t)\neq 0$, тогда можно показать, что

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

5.4 Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$, определенной и дифференцируемой на интервале (a,b), есть снова функция от x. При этом $y' = f'(x)$ называется производной первого порядка.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то её производная называется производной второго порядка и обозначается:
y'' или $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, т.е.

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' \quad \text{или} \quad y'' = (y')'.$$

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка и обозначается:

$$y''' \quad \text{или} \quad f'''(x), \ \frac{d^3y}{dx^3}, \ \text{т.е.}$$

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' \quad \text{или} \quad y''' = (y'')'.$$

Начиная с производной четвертого порядка производные обозначают римскими цифрами y^{IV}, y^{V}, …

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad \text{или} \quad y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные, начиная с производной второго порядка, называются производными высших порядков.

Замечание. Если известен закон прямолинейного движения материальной точки в виде $S = S(t)$, тогда известно, что скорость

$$V(t) = S'(t),$$

а ускорение движения

$$a(t) = V'(t) = S''(t).$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad \text{где} \quad t - \text{параметр.}$$

Известно, что первая производная находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

тогда производная второго порядка имеет вид

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}$$

или

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Тогда её первый дифференциал имеет вид

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Дифференциал от первого дифференциала в точке x называется в т о р ы м д и ф ф е р е н ц и а л о м или д и ф ф е р е н ц и а л о м в т о р о г о п о р я д к а и обозначается d^2y или $d^2f(x)$, т.е.

$$d^2y=d(dy) \quad \text{или} \quad d^2y=f''(x)dx^2.$$

Аналогично,

$d^3y=f'''(x)dx^3$ - дифференциал третьего порядка.

Дифференциал n-го порядка функции $y=f(x)$ есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка

$$d^ny=d(d^{n-1}y)$$

или

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда следует

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

В частности,

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\qquad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

5.5 Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма**.** Если функция $y=f(x)$, дифференцируемая на интервале (a,b), и в некоторой точке x_0 этого интервала имеет наибольшее или наименьшее значение, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.

$$f'(x_0)=0.$$

Г е о м е т р и ч е с к и й   с м ы с л   т е о р е м ы   Ф е р м а . Если в точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет наибольшее или наименьшее значение, то в точке $A(x_0, f(x_0))$ к а с а т е л ь н а я к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ох (рис.23).

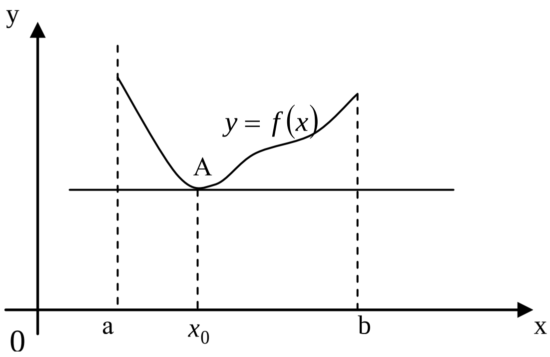


Рисунок 23

<u>Теорема Ролля</u>**.** Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема на интервале (a,b);
3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)= f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $c \in (a,b)$, в которой производная функции равна нулю, т.е.

$$f'(c)=0.$$

Г е о м е т р и ч е с к и й   с м ы с л   т е о р е м ы   Р о л л я . На графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная будет параллельна оси Ох (рис.24).

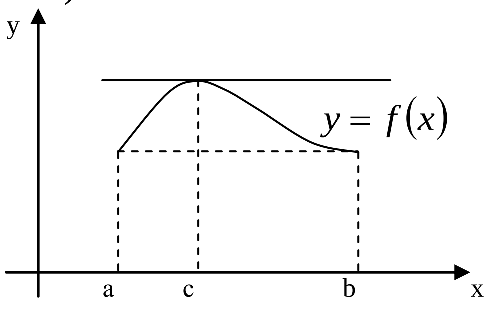


Рисунок 24

<u>Теорема Лагранжа</u>**.** Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема на интервале (a,b);

Тогда существует, по крайней мере одна такая точка $c \in (a,b)$, что справедлива формула

$$\frac{f(b)- f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. На графике функции найдется хотя бы одна точка $C(c, f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей АВ (рис.25).

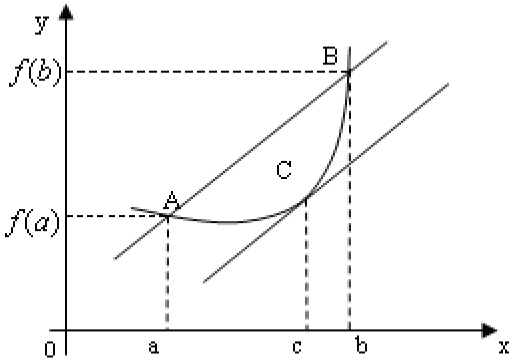


Рисунок 25

<u>Следствие 1</u>. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

<u>Следствие 2</u>. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

<u>Теорема Коши</u>**.** Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируемы на интервале (a,b);
3) $\varphi(x) \neq 0$ для $x \in (a,b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ такая, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

5.6 Правило Лопиталя

<u>Теорема 1</u> (Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'(x) \neq 0$$

в окрестности точки x_0, тогда, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

<u>Теорема 2</u> (Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ и $\varphi'(x)\neq 0$ в этой окрестности, тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ можно свести к неопределенностям вида $\left|\frac{0}{0}\right|$ или $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ путем тождественных преобразований:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left|\frac{0}{0}\right|;$$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=|\infty-\infty|=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\left[1-\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\right]$

или

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]=|\infty-\infty|=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$, имеющего неопределенность типа 1^{∞}, 0^0, ∞^0, надо сначала прологарифмировать выражение $A=\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$.

Рассмотрим несколько примеров:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8\sin 8x}{2x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{64\cos 8x}{2}=32.$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{e^x}=0.$

3) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln x = \left|0\cdot(-\infty)\right| = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\dfrac{-\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0+0} x = 0$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x} - tgx\right) = \left|\infty-\infty\right| = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right) = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$

5) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln x} = e^0 = 1.$

5.7 Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0, тогда многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора.

<u>Теорема</u>. Если функция $f(x)$ определена и $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, то для любого x из этой окрестности справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$\text{где } c = x_0 + \Theta(x-x_0), \quad 0<\Theta<1.$$

Эта формула называется формулой Тейлора для функции $f(x)$. Ее можно записать в виде

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора,

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ - остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

В частности, при $x_0 = 0$ из формулы Тейлора получается формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где

$$c = \Theta x,\ 0<\Theta<1.$$

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^c ,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \cos c ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos c ,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot(1+c)^{n+1}} ,$$

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m\cdot(m-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} \cdot x^n +$$

$$+ \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot(1+c)^{m-n-1}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

5.8 Контрольные вопросы

1. Что называется дифференциалом функции, и каков его геометрический смысл?
2. Как дифференцируют функции, заданные неявно или параметрически?
3. Как находятся производные и дифференциалы высших порядков?
4. Как формулируются теоремы Ферма и Роля, и каков их геометрический смысл?
5. Как формулируются теоремы Лагранжа и Коши?
6. Как формулируется правило Лопиталя?
7. Какие функции можно записать по формулам Тейлора и Маклорена?

6 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

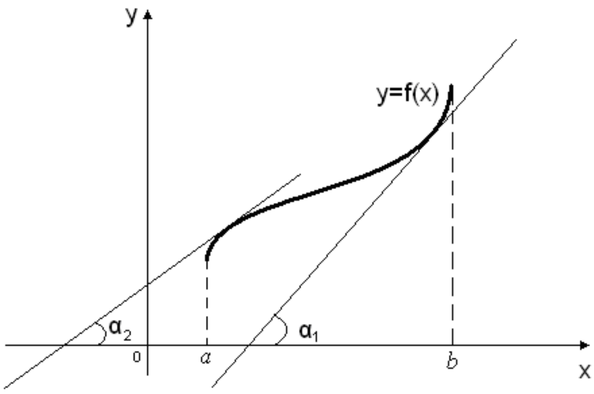
6.1 Возрастание и убывание функций

Теорема 1 (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a,b)$.

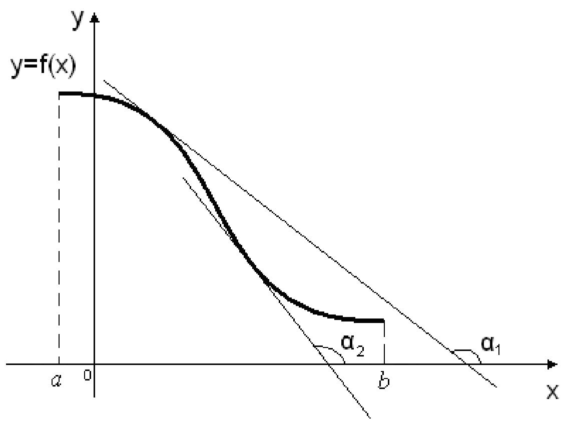
Теорема 2 (достаточное условие). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a,b).

Возрастающая или убывающая функция называется монотонной функцией.

Геометрический смысл монотонности функции. Если касательные в некотором промежутке к графику функции направлены под острыми углами к оси абсцисс, то функция возрастает; если под тупыми, то функция убывает (рис.26).



а) f(x) - возрастающая функция, $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$



б) f(x) - убывающая функция, $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$

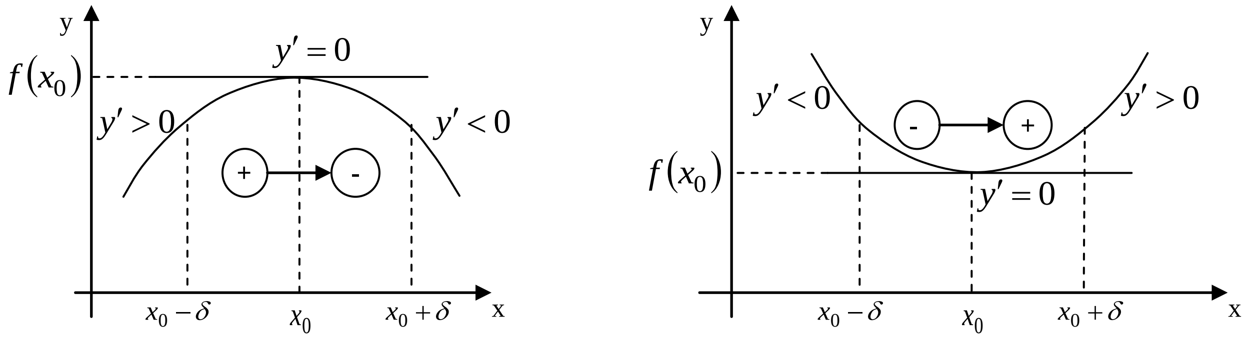
Рисунок 26

6.2 Экстремум функции

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая δ- окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум (минимум) функции называется экстремумом функции (рис. 27).



а) x_0 - точка максимума
$f(x_0)$ - максимум функции

б) x_0 - точка минимума
$f(x_0)$ - минимум функции

Рисунок 27

<u>Теорема 1</u> (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Геометрически это означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ох.

Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или не существует, называются к р и т и ч е с к и м и т о ч к а м и .

Заметим, что:

1) если в точке имеется экстремум, то эта точка критическая.
2) не всякая критическая точка является точкой экстремума.

<u>Теорема 2</u> (первое достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ–окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума (рис.27).

<u>Замечание</u>. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет. Например, рассмотрим график функции $y = x^3$ (рис. 28). Точка $x = 0$ является критической, но она не является точкой экстремума.

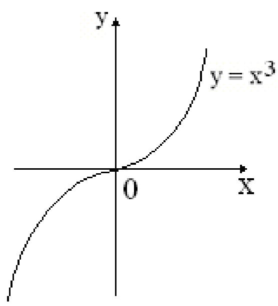


Рисунок 28

Теорема 3 (второе достаточное условие экстремума). Если в точке x_0 первая производная равна нулю $\left(f'(x_0)=0\right)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля $\left(f''(x_0)\neq 0\right)$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет м а к с и м у м, если $f''(x_0)<0$, и м и н и м у м, если $f''(x_0)>0$.

6.3 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, надо:

1) найти все критические точки функции на интервале (a,b);
2) вычислить значения функции в этих критических точках;
3) вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. найти $f(a)$ и $f(b)$;
4) сравнить все вычисленные значения функции и выбрать наибольшее и наименьшее.

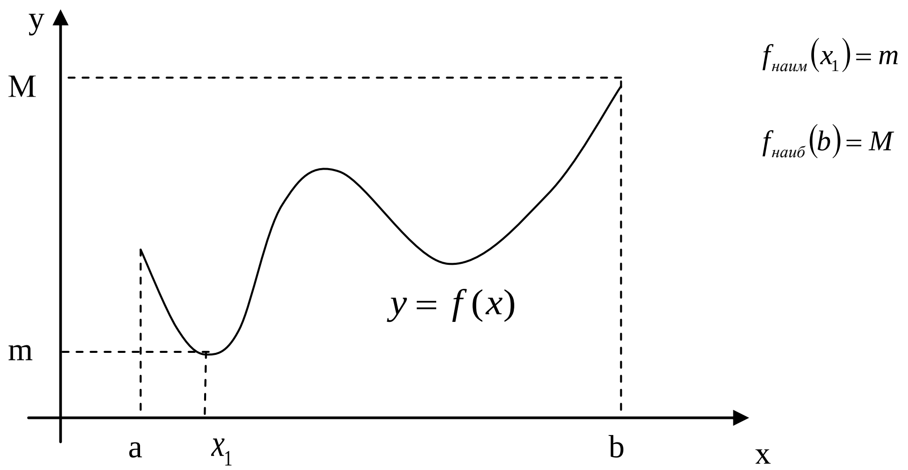


Рисунок 29

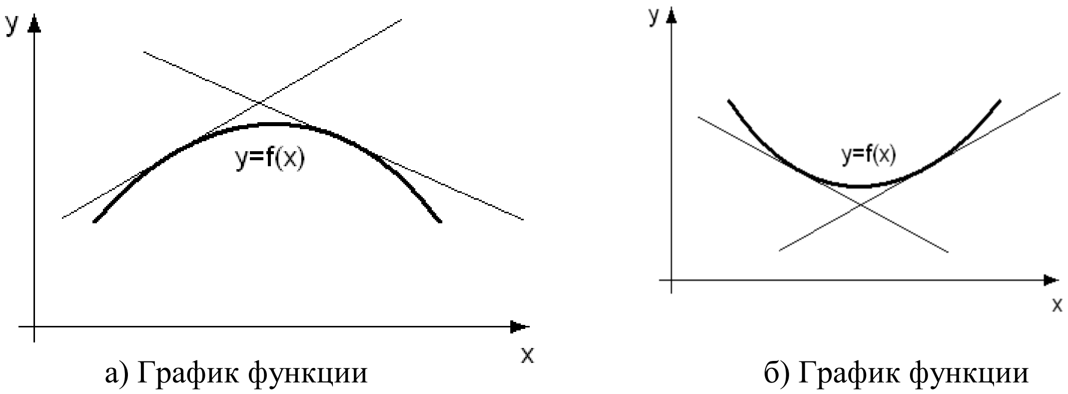
6.4 Выпуклость и вогнутость графика функции

График функции $y=f(x)$ называется в ы п у к л ы м (в о г н у т ы м) в интервале (a,b), если он расположен ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале (рис.30).

Теорема. Если $f''(x)<0$ в интервале (a,b), то график функции в ы п у к л ы й в этом интервале; если же $f''(x)>0$, то в интервале (a,b) график функции – в о г н у т ы й.

Точка графика непрерывной функции $y=f(x)$, отделяющая выпуклую его часть от вогнутой, называется т о ч к о й п е р е г и б а.

Например, на рисунке 31 точка $K\left(x_0, f(x_0)\right)$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.



а) График функции выпуклый

б) График функции вогнутый

Рисунок 30

Теорема (необходимое условие существования точек перегиба). Если x_0 - абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

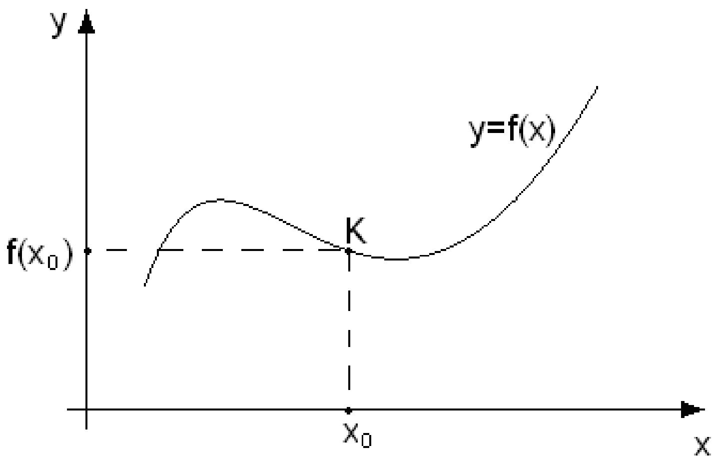


Рисунок 31

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ в точке x_0 равна нулю, т.е. $f''(x_0) = 0$ или не существует, и при переходе через точку x_0 меняет свой знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

6.5 Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на этом графике, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Различают три вида асимптот: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ (рис.32), если

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty .$$

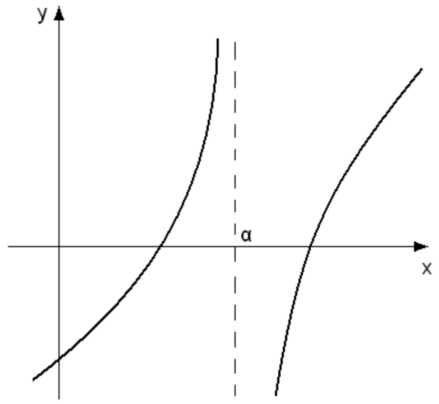


Рисунок 32

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ (рис. 33), если существуют пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

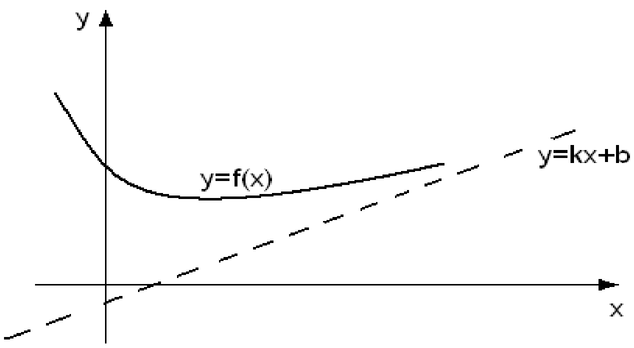


Рисунок 33

Прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ (рис. 34), если существует предел:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b .$$

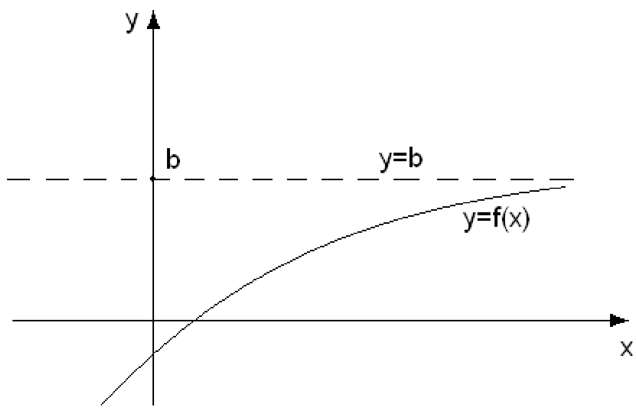


Рисунок 34

Замечание. Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными, поэтому предел при $x \to \infty$ следует рассматривать, как при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

6.6 Общая схема исследования функции и построение графика

При исследовании функций рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти асимптоты графика функции.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.

По результатам исследования функции строится её график.

*Пример 6.1***.** Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построить её график.

1) Область определения $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$, т.е. $x \neq 1$.

2) Функция не является четной или нечетной.

3) Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty .$$

Следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

Прямая $y = x + 1$ есть наклонная асимптота, так как

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1.$$

4) График функции не имеет точек пересечения с осью Ох, но пересекает ось Оу в точке (0;-1).

5) Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.
Для этого найдем критические точки функции:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2},$$

$x^2 - 2x - 1 = 0$, следовательно, $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.
Таким образом, x_1, x_2 - критические точки функции.

x	$(-\infty;1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2};1)$	1	$(1;1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2};+\infty)$
y'	+	0	−	не сущ-ет	−	0	+
y	$\nearrow$ возрастает	max $2-2\sqrt{2}$	$\searrow$ убывает	не сущ-ет	$\searrow$ убывает	min $2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$ возрастает

$$f_{\max}(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}, \qquad f_{\min}(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$$

$$A\left(1-\sqrt{2};\ 2-2\sqrt{2}\right), \qquad B\left(1+\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2}\right).$$

Функция возрастает на интервалах $\left(-\infty;\,1-\sqrt{2}\right)$ и $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$, убывает на интервалах $\left(1-\sqrt{2};1\right)$ и $\left(1;1+\sqrt{2}\right)$.

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
Для этого находим $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-2(x-1)\cdot(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Так как $f''(x)$ в нуль не обращается, то точек перегиба график не имеет.

x	$(-\infty;1)$	x=1	$(1;+\infty)$
y''	−	не существует	+
y	$\frown$ выпуклый	не существует	$\smile$ вогнутый

Используя полученные данные, построим график функции (рис.35).

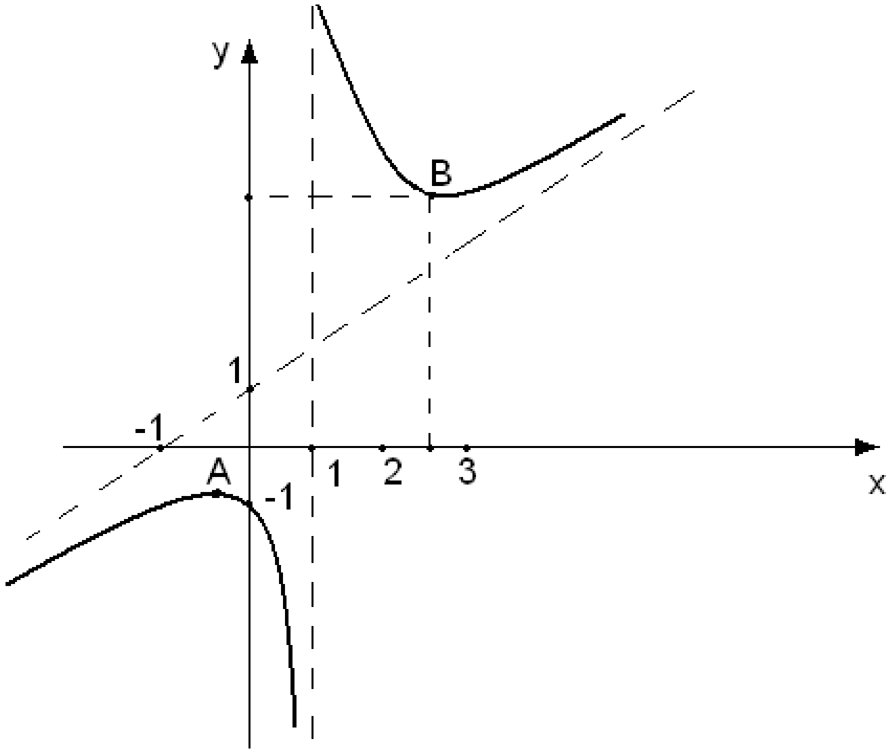


Рисунок 35

6.7 Контрольные вопросы

1. Какие необходимые и достаточные условия монотонности функции?
2. Что называется максимумом (минимумом) функции?
3. Какие необходимые и достаточные признаки существования экстремума?
4. Как находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
5. Какой график функции называется выпуклым (вогнутым) на интервале?
6. Какие достаточные условия для выпуклого (вогнутого) графика функции?
7. Что называется точкой перегиба графика функции и как ее найти?
8. Какие виды асимптот графика функции и как их найти?