Лекция 4: Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Вступительные замечания

Данная лекция — одна из ключевых во всем курсе. В ней излагается метод решения произвольной системы линейных уравнений, известный под названием *метода Гаусса* (его называют также *методом последовательного исключения неизвестных*). Метод Гаусса можно реализовывать двумя способами — на языке линейных уравнений и на языке матриц. Мы изложим второй из этих способов. Важность этого материала для дальнейшего объясняется тем, что подавляющее большинство из тех задач, которые будут возникать в дальнейшем, будут сводиться к решению некоторой системы линейных уравнений. Таким образом, без метода Гаусса невозможно решить почти ни одну из этих задач. Кроме того, умение приводить произвольную матрицу к ступенчатому виду, которое необходимо для решения системы методом Гаусса, пригодится нам и в некоторых задачах, не связанных с решением систем (например при нахождении ранга матрицы — см. лекцию 12).

- Хотя название «метод Гаусса» является общепринятым, Гаусс не является его автором: метод был известен задолго до него. Первое его описание имеется в китайском трактате «Математика в девяти книгах», который составлен между II в. до н. э. и I в. н. э. и представляет собой компиляцию более ранних трудов, написанных в X–II вв. до н. э.

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (1), а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

— *расширенной матрицей* этой системы.

Мы видим, что в расширенной матрице системы каждая строка соответствует какому-то уравнению, каждый столбец, кроме последнего, — это набор коэффициентов при некотором неизвестном в различных уравнениях системы, а последний столбец — этот совокупность свободных членов системы (мы так и будем называть его: *столбец свободных членов*). Таким образом,

- расширенная матрица системы содержит в себе полную информацию о системе.

Совокупность всех столбцов расширенной матрицы, кроме ее последнего столбца, нам будет удобно иногда называть *основной частью* расширенной матрицы. При записи расширенной матрицы системы ее основную часть часто отделяют от столбца свободных членов вертикальной чертой, т. е. записывают ее в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Это делается для того, чтобы подчеркнуть «особый характер» элементов последнего столбца — в нем, в отличие от всех остальных, стоят не коэффициенты при неизвестных, а свободные члены уравнений.

Итак, каждой системе линейных уравнений можно поставить в соответствие ее расширенную матрицу. Обратно, всякой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{m\,n+1} \end{pmatrix},$$

содержащей более одного столбца, можно поставить в соответствие систему линейных уравнений[1]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1\,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2\,n+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = a_{m\,n+1}. \end{cases}$$

Будем говорить, что эта система *соответствует* матрице A.

[1] Оговорка о том, что матрица должна содержать более одного столбца, вызвана тем, что при записи системы по матрице нужен столбец для свободных членов и по крайней мере один столбец для коэффициентов при неизвестных.

Приступим к изложению метода Гаусса. Прежде всего уточним, что

- *решить систему линейных уравнений — это значит найти ее общее решение.*

В самом общем виде метод Гаусса можно описать как последовательность из следующих трех шагов:

1. Записываем расширенную матрицу данной системы линейных уравнений.
2. С помощью некоторых преобразований (называемых *элементарными преобразованиями матрицы*) приводим эту матрицу к некоторому специальному виду (так называемой *ступенчатой* матрице).
3. Решаем систему, соответствующую полученной ступенчатой матрице.

При этом оказывается, что:

1) общее решение системы, соответствующей полученной ступенчатой матрице, совпадает с общим решением исходной системы;

2) система, соответствующая произвольной ступенчатой матрице, решается легко.

План дальнейших действий

Нам остается:

а) объяснить, что такое элементарные преобразования матрицы;
б) доказать, что элементарные преобразования матрицы не меняют общего решения соответствующей ей системы линейных уравнений;
в) дать определение ступенчатой матрицы;
г) указать, как произвольная матрица приводится к ступенчатому виду;
д) выяснить, как находить общее решение системы линейных уравнений, соответствующей ступенчатой матрице.

Определение

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

1) умножение строки на ненулевое число;
2) прибавление одной строки к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание или добавление нулевой строки.

Определение

Матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований. Тот факт, что матрицы A и B эквивалентны, обозначается так: $A \sim B$.

Обоснование корректности метода Гаусса (1)

Определение

Системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют одно и то же общее решение.

Следующее несложно проверяемое утверждение принципиально важно, так как оно обосновывает корректность метода Гаусса.

Предложение 1

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований типов 1)–3) и 5), то системы линейных уравнений, соответствующие матрицам A и B равносильны.

Доказательство предложения приведено на двух следующих слайдах. Запрет на использование элементарных преобразований типа 4) вызван тем, что если в расширенной матрице системы переставить последний столбец с одним из предыдущих столбцов, то можно получить систему, не эквивалентную исходной (в системе, соответствующей новой матрице, будет другой столбец свободных членов). Как мы увидим ниже, при приведении матрицы к ступенчатому виду всегда можно обойтись без этого преобразования. Но исключать его из числа элементарных преобразований невыгодно, так как им бывает удобно пользоваться при решении задач, не связанных с решением систем линейных уравнений.

Доказательство предложения 1. Договоримся называть систему линейных уравнений, соответствующую матрице A, *старой*, а систему, соответствующую матрице B, — новой. Достаточно рассмотреть случай, когда матрица B получена из A с помощью одного элементарного преобразования. В зависимости от типа этого преобразования возможны 4 случая.

Случай 1: *B получена из A умножением i-й строки на ненулевое число t*. В этом случае новая система получена из старой умножением i-го уравнения на t. Ясно, что всякое решение старой системы является решением новой. Поскольку старая система получается из новой умножением i-го уравнения на ненулевое число $\frac{1}{t}$, верно и обратное утверждение.

Случай 2: *B получена из A прибавлением j-й строки к i-й*. Поскольку сумма двух верных равенств является верным равенством, всякое решение старой системы является решением новой. Далее, матрицу A можно получить из матрицы B выполнением трех элементарных преобразований — сначала умножаем j-тую строку матрицы B (совпадающую с j-й строкой матрицы A!) на -1, затем прибавляем полученную строку к i-й строке матрицы B, и, наконец, еще раз умножаем j-тую строку матрицы B на -1. В силу сказанного выше, всякое решение новой системы является и решением старой.

Случай 3: *B получена из A перестановкой строк*. В этом случае системы, соответствующие матрицам A и B, различаются лишь порядком записи уравнений, что, очевидно, не влияет на общее решение системы.

Случай 4: *B получена из A вычеркиванием или добавлением нулевой строки*. Это означает, что новая система получена из старой вычеркиванием или добавлением «тривиального» уравнения, т. е. уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$. Очевидно, что эта операция никак не может повлиять на общее решение системы. $\square$

Введем понятие, которое будет играть важную роль в дальнейшем.

Определение

Матрица называется *ступенчатой*, если либо все ее элементы равны нулю (матрицы, обладающие последним свойством, называются *нулевыми*), либо выполнены следующие условия:

1) если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки;
2) если некоторая строка матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые.

Общий вид ступенчатой матрицы

Произвольная ступенчатая матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}
0 \ \dots \ 0 & * & & & & \\
0 \ \dots\dots\dots\dots & 0 & * & & & \\
 & & & \ddots & & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \\
0 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & 0 & * & \\
0 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & 0 & * \\
0 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \\
0 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & 0
\end{pmatrix}.$$

Звездочками обозначены элементы, которые не должны быть равны 0. Напротив, все элементы, стоящие ниже ломаной линии, обязаны быть равны 0. Нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть.

- Ломаная линия, ограничивающая сверху «нулевую часть» ступенчатой матрицы имеет вид ступенек. Именно этим объясняется термин «ступенчатая матрица».

Если переходить от ненулевой строки ступенчатой матрицы к следующей за ней ненулевой строке (до тех пор, пока это возможно), то мы каждый раз будем сдвигаться ровно на одну строку вниз и на, вообще говоря, произвольное число столбцов вправо. Следовательно, справедливо

Замечание 1

В любой ступенчатой матрице число ненулевых строк не превышает числа столбцов. □

Ключевая теорема (1)

Теорема 1

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Выберем в A самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j. Далее, выберем самую верхнюю строку, на пересечении которой с j-м столбцом стоит ненулевой элемент. Пусть эта строка имеет номер i. Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-тую строки. Обозначим полученную матрицу через B. В первой строке и j-м столбце матрицы B стоит ненулевой элемент. Обозначим его через x. Предположим, что в j-м столбце матрицы B есть ненулевой элемент y, расположенный ниже первой строки. Пусть он стоит в k-й строке. Прибавим к k-й строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-й строки и j-го столбца будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Таким образом можно добиться того, что в j-м столбце все элементы, расположенные ниже первой строки, будут равны 0.

Полученную матрицу обозначим через C, а ее часть, расположенную ниже первой строки и правее j-го столбца — через C':

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \ldots & 0 & x & \ldots\ldots\ldots \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C' \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Если C' — нулевая матрица, то матрица C является ступенчатой. Предположим поэтому, что в C' есть ненулевой элемент. Проделаем теперь с C' те же действия, которые ранее мы делали с матрицей A. А именно, выберем в матрице C самый левый столбец, в котором имеется хотя бы один ненулевой элемент, стоящий ниже первой строки (ясно, что этот элемент расположен внутри C'). Пусть этот столбец имеет номер r. Далее, выберем в C самую верхнюю строку, отличную от первой, на пересечении которой с r-м столбцом стоит ненулевой элемент (опять-таки ясно, что этот элемент расположен внутри C'). Пусть эта строка имеет номер s. Если $s > 2$, поменяем местами вторую и s-тую строки матрицы C. Теперь на пересечении ее второй стороки и r-го столбца стоит ненулевой элемент. Обозначим его через z. Обнулим все элементы r-го столбца полученной матрицы, расположенные ниже ее второй строки (так же, как мы ранее обнулили все элементы j-го столбца матрицы B, расположенные ниже ее первой строки).

Полученную матрицу обозначим через D, а ее часть, расположенную ниже второй строки и правее r-го столбца — через D':

$$D = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \ldots & 0 & x & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & z & \ldots & \ldots \\ \cline{9-9} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & D' \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & \end{array}\right).$$

Если D' — нулевая матрица, то матрица D является ступенчатой. Предположим поэтому, что в D' есть ненулевой элемент. Проделаем теперь с D' те же дейтвия, которые ранее мы делали с A и C' (выберем в матрице D самый левый столбец, в котором имеется хотя бы один ненулевой элемент, стоящий ниже второй строки; выберем в D самую верхнюю строку, отличную от первой и второй, на пересечении которой с выбранным столбцом стоит ненулевой элемент; при необходимости поменяем местами третью и выбранную строки матрицы D; обнулим все элементы, стоящие в полученной матрице в выбранном нами столбце ниже третьей строки). Продолжая этот процесс, мы через какое-то конечное число шагов получим ступенчатую матрицу. Отметим, что этот процесс обязательно оборвется через конечное число шагов, так как мы на каждом шаге сдвигаемся на одну строку вниз и по крайней мере на один столбец вправо, а число строк и столбцов в матрице A конечно.

Комментарии к доказательству ключевой теоремы

Комментарий 1. Доказательство теоремы 1 конструктивно. Изложенный в нем алгоритм приведения произвольной матрицы к ступенчатому виду будет постоянно применяться в дальнейшем при решении самых различных задач.

Комментарий 2. В доказательстве теоремы 1 используются только первые три элементарных преобразования матрицы. Таким образом, при приведении матрицы к ступенчатому виду можно обойтись не только без перестановки столбцов (что принципиально важно с точки зрения предложения 1), но и без вычеркивания или добавления нулевых строк. Но совсем отказываться от возможности применить последнее элементарное преобразование невыгодно: вместо того, чтобы «сбрасывать» нулевые строки в нижнюю часть матрицы (как «велит» доказательство теоремы 1), их можно вычеркивать, тем самым экономя время и место (а при компьютерной реализации метода Гаусса — объем используемой памяти).

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай отсутствия решений

Нам осталось объяснить, как искать общее решение системы линейных уравнений, соответствующей ступенчатой матрице. Здесь возможны три случая.

Случай 1: *ступенчатая матрица содержит строку, в которой все элементы, кроме последнего, равны* 0, *а последний элемент нулю не равен*. Эта строка соответствует уравнению вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$. Ясно, что это уравнение, а значит и произвольная система, его содержащая, решений не имеет. Учитывая предложение 1, получаем, что

- *в рассматриваемом случае система несовместна.*

Для удобства будем называть строки матрицы, в которых все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент нулю не равен, *плохими*. Заметим, что

- если при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду плохая строка возникла в тот момент, когда матрица еще не является ступенчатой, то продолжать преобразования не имеет смысла, так как уже в этот момент стало ясно, что система несовместна.

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду плохих строк не возникло.

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай единственного решения

В силу замечания 1 возможны два случая: в полученной ступенчатой число ненулевых строк либо равно числу столбцов, либо меньше этого числа.

Случай 2: *ступенчатая матрица не содержит плохих строк и число ее ненулевых строк равно числу столбцов в основной части матрицы.* Вычеркнем из матрицы нулевые строки (если они в ней есть). Ясно, что это не изменит общего решения системы. Система линейных уравнений, соответствующая полученной матрице, имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad\; a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0$. Из последнего уравнения этой системы находим x_n: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. После этого из предпоследнего уравнения находим x_{n-1}: $x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n}{a_{n-1\,n-1}}$. Продолжая двигаться по системе снизу вверх, мы из третьего с конца уравнения найдем x_{n-2}, из четвертого с конца — x_{n-3}, $\dots$, наконец, из первого — x_1. На каждом шаге очередное неизвестное определяется однозначно. Следовательно,

- *в рассматриваемом случае система имеет единственное решение.*

Случай 3: *ступенчатая матрица не содержит плохих строк и число ее ненулевых строк меньше числа столбцов в основной части матрицы.* Вычеркнем из матрицы нулевые строки (если они в ней есть). Ясно, что это не изменит общего решения системы. Система линейных уравнений, соответствующая полученной матрице, может быть схематично записана в виде

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = b_1, \\ \qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = b_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mi_m}x_{i_m} + \cdots = b_m, \end{cases}$$

где $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ и $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{mi_m} \neq 0$. При этом в систему входит как минимум одна неизвестная, кроме x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}, так как в противном случае число ненулевых строк было бы равно числу столбцов в основной части матрицы. Перенесем все неизвестные, кроме x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}, в правые части равенств с обратным знаком. Получим систему, которую схематично можно записать в виде

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = b_1 - \cdots, \\ \qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \dots\dots\dots\dots = b_2 - \cdots, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mi_m}x_{i_m} = b_m - \cdots. \end{cases} \qquad (2)$$

Нахождение общего решения системы по ступенчатой матрице: случай бесконечного множества решений (2)

Переменные, входящие в правые части уравнений системы (2), называются *свободными*, а переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ — *основными* или *связанными*. Придадим свободным переменным произвольные значения, подставим их в систему (2) и обозначим правые части полученных равенств через b'_1, $b'_2, \ldots, b'_m$. Получим систему m линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = b'_1, \\ \qquad\qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{mi_m}x_{i_m} = b'_m. \end{cases}$$

В ступенчатой матрице, соответствующей этой системе, число ненулевых строк равно числу столбцов в основной части матрицы. Как мы видели выше при рассмотрении случая 2, эта система имеет единственное решение. Найдя его и объединив полученные значения переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ с теми значениями, которые мы подставили вместо свободных переменных в правые части системы (2), мы найдем одно частное решение исходной системы. Поскольку присвоить значения свободным переменным можно бесконечным числом различных способов, мы получаем, что

- *в рассматриваемом случае система имеет бесконечно много решений.*

Остается понять, как в рассматриваемом случае можно записать общее решение системы. Для простоты обозначений будем считать, что свободными являются переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$, а связанными — переменные $x_{m+1}, \dots, x_n$. Иными словами, будем считать, что система (2) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1\,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2\,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{mm}x_m = b_m - a_{m\,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $k = n - m$. Положим $x_{m+1} = c_1$, $x_{m+2} = c_2$, ..., $x_n = c_k$, где $c_1, c_2, \dots, c_k$ — константы, которые, независимо друг от друга, могут принимать произвольные значения. Из последнего уравнения системы (3) получаем $x_m = \frac{b_m - a_{m\,m+1}c_1 - \cdots - a_{mn}c_k}{a_{mm}}$. Подставив правую часть этого равенства вместо x_m в предпоследнее уравнение системы (3), мы сможем выразить x_{m-1} через $c_1, c_2 \dots, c_k$. Продолжая двигаться по системе (3) снмизу вверх, мы последовательно выразим через эти константы переменные $x_{m-2}, \dots, x_1$. Объединив полученные равенства, выражающие переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ через константы $c_1, c_2, \dots, c_k$, с равенствами $x_{m+1} = c_1$, ..., $x_n = c_k$, мы получим запись общего решения системы.

Из сказанного при рассмотрении случая 3 вытекает важный для дальнейшего вывод:

Замечание 2

Если система линейных уравнений имеет бесконечно много решений, то число ее свободных переменных равно $n - m$, где n — число столбцов в основной матрице системы (или, что то же самое, число неизвестных в системе), а m — число ненулевых строк в матрице, полученной из расширенной матрицы системы приведением к ступенчатому виду.

Проиллюстрируем сказанное выше на примерах.

Задача 1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и начнем приводить ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

На первом шаге мы из второй строки вычли первую, умноженную на 2 (это равносильно последовательному выполнению трех элементарных преобразований: первая строка умножается на -2, ко второй прибавляется новая первая, эта новая первая умножается на $-\frac{1}{2}$; в дальнейшем мы опускаем подобные комментарии), из третьей строки вычли первую, а к четвертой прибавили первую. А на втором шаге мы из второй и третьей строк вычли первую.

Мы не довели матрицу до ступенчатого вида (для того, чтобы это сделать, надо переставить в последней матрице третью и четвертую строки). Но продолжать преобразования смысла нет: третья строка последней полученной нами матрицы показывает, что система несовместна.

Ответ: решений нет.

Задача 2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \\ 1 & 2 & -8 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -19 & -9 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 7 & -29 & -15 \\ 0 & 5 & -19 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -19 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -19 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

На первом шаге мы из второй строки, умноженной на 2, вычли первую, умноженную на 3, из третьей строки вычли первую, умноженную на 2, а из четвертой и пятой строк, умноженных на 2, вычли первую. На втором шаге мы из третьей строки, умноженной на 5, вычли вторую, из четвертой строки, умноженной на 5, вычли вторую, умноженную на 7, а из пятой строки вычли вторую. Наконец, на третьем шаге мы из четвертой строки вычли третью, умноженную на 2.

Мы пришли к ситуации, описанной выше при рассмотрении случая 2. Полученная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ \phantom{2x_1 - {}} 5x_2 - 19x_3 = -9, \\ - 6x_3 = -6. \end{cases}$$

Из последнего уравнения этой системы получаем, что $x_3 = 1$. Из второго уравнения теперь вытекает, что $5x_2 - 19 = -9$, откуда $x_2 = 2$. Первое уравнение теперь показывает, что $2x_1 - 2 + 3 = 3$, откуда $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Задача 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

На первом шаге мы из второй, третьей и четвертой строк вычли первую, на втором шаге из третьей строки вычли вторую, а на третьем шаге из четвертой строки вычли третью.

Мы пришли к ситуации, описанной выше при рассмотрении случая 3. Запишем по полученной ступенчатой матрице систему уравнений вида (2):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 & - & x_4 & + & x_5, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 & + & x_4 & - & x_5, \\ & & & - & x_3 & = & -1 & - & x_4 & + & x_5. \end{array}\right.$$

Переменные x_4 и x_5 являются свободными. Придадим им произвольные значения: $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$. Из третьего уравнения последней системы имеем $x_3 = 1 + c_1 - c_2$. Из второго уравнения теперь вытекает, что

$$2x_2 = x_3 + 1 + c_1 - c_2 = 1 + c_1 - c_2 + 1 + c_1 - c_2 = 2 + 2c_1 - 2c_2,$$

откуда $x_2 = 1 + c_1 - c_2$. Наконец, подставляя все найденное в первое уравнение, получаем, что

$$x_1 = -x_2 + x_3 + 1 - c_1 + c_2 = -1 - c_1 + c_2 + 1 + c_1 - c_2 + 1 - c_1 + c_2 = 1 - c_1 + c_2.$$

Ответ: $x_1 = 1 - c_1 + c_2$, $x_2 = 1 + c_1 - c_2$, $x_3 = 1 + c_1 - c_2$, $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$.

Если решать методом Гаусса однородную систему линейных уравнений, то последний столбец расширенной матрицы системы на всех этапах будет нулевым. Переписывать его все время нет никакого смысла. Поэтому

- при решении однородных систем, как правило, выписывают и приводят к ступенчатому виду основную матрицу системы, а при нахождении общего решения «вспоминают», что в матрице неявно присутствует еще последний нулевой столбец.

Отметим еще один полезный для дальнейшего факт об однородных системах.

Замечание 3

Если в однородной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Обоснование этого утверждения приведено на следующем слайде.

Доказательство. Запишем основную матрицу системы и приведем ее к стенчатому виду. В исходной матрице число строк равно числу уравнений, а число столбцов — числу неизвестных. По условию первое число меньше второго. При приведении матрицы к ступенчатому виду число ее ненулевых строк может разве что уменьшиться. Следовательно, и в полученной ступенчатой матрице число ненулевых строк будет меньше числа столбцов. Иными словами, мы попадаем в условия рассмотренного выше случая 3, в силу которого исходная система имеет бесконечно много решений. Все это решения, кроме одного, являются ненулевыми. □

Введем ряд понятий, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определения

Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* [*нижнетреугольной*], если все ее элементы, расположенных ниже [соответственно, выше] главной диагонали равны 0. Квадратная матрица называется *диагональной*, если она верхнетреугольна и нижнетреугольна одновременно (т. е. если все ее элементы, не стоящие на главной диагонали, равны 0). Квадратная матрица, в которой все элементы на главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной* и обозначается буквой E.

Метод Гаусса–Жордана (описание)

Если привести расширенную матрицу совместной системы линейных уравнений к ступенчатому виду и из полученной матрицы вычеркнуть нулевые строки, последний столбец и столбцы, соответствующие свободным переменным (если они существуют), то оставшаяся матрица всегда будет квадратной и верхнетреугольной. Для краткости будем называть эту часть получающейся ступенчатой матрицы ее *базовой частью*. В качестве иллюстрации выпишем базовую часть матрицы, возникающей при решении разобранного выше примера 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оставшаяся часть этой лекции посвящена модификации метода Гаусса, которая называется *методом Гаусса–Жордана*. Идея этого метода состоит в том, что

- после приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду можно продолжить элементарные преобразования и довести базовую часть матрицы сначала до диагонального, а затем и до единичного вида. После этого общее решение системы находится очень легко.

Мы не будем описывать метод Гаусса– Жордана в общем виде, а проиллюстрируем его на двух примерах. Сначала рассмотрим вновь систему из приведенного выше примера 3. Вычеркнем из полученной ранее в этом примере ступенчатой матрицы нулевую строку и продолжим элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

На первом шаге мы из первой и второй строк вычли третью, на втором шаге из первой строки, умноженной на 2, вычли вторую, на третьем шаге разделили первую и вторую строки на 2, а третью — на -1.

В базовой части последней матрицы стоит единичная матрица. Придадим теперь свободным переменным произвольные значения ($x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$), и запишем систему, соответствующую полученной матрице, перенеся слагаемые со свободными переменными в правые части равенств с противоположным знаком:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c_1 + c_2, \\ x_2 = 1 + c_1 - c_2, \\ x_3 = 1 + c_1 - c_2. \end{cases}$$

Вместе с равенствами $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$ это дает ответ, найденный выше другим способом.

Особенно полезным метод Гаусса–Жордана оказывается в случае, когда система имеет единственное решение. Чтобы убедиться в этом, вернемся к системе, рассмотренной выше в примере 2. Вычеркнем из полученной ранее в этом примере ступенчатой матрицы нулевые строки и продолжим элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -19 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -19 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

На первом шаге мы (для упрощения вычислений) разделили третью строку на -6, на втором шаге вычли из первой строки третью, умноженную на 3, и прибавим ко второй строке третью, умноженную на 19, на третьем шаге к первой строке, умноженной на 5, прибавили вторую, на четвертом шаге разделили первую строку на 10, а вторую — на 5.

Мы привели базовую часть матрицы до единичного вида. Выпишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2, \\ x_3 &= 1. \end{cases}$$

Ясно, что на самом деле это не система линейных уравнений, а единственное решение рассматриваемой нами системы.

Отметим, что в случае, когда система имеет единственное решение, базовая часть расширенной матрицы получается из ее основной матрицы вычеркиванием только нулевых строк. Объединяя сказанное, получаем указанный на следующем слайде алгоритм, на котором в дальнейшем будут основаны алгоритмы решения некоторых важных задач (в частности, алгоритм нахождения обратной матрицы — см. лекцию 11).

Алгоритм нахождения решения системы линейных уравнений, имеющей единственное решение

Пусть дана система линейных уравнений, имеющая единственное решение. Запишем ее расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований всей матрицы приведем ее основную часть к единичному виду (в рассматриваемом случае это всегда можно сделать). В этот момент в последнем столбце расширенной матрицы будет стоять (единственное) решение системы.