5 РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Задание 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

а) разложив его по элементам второй строки;
б) разложив его по элементам третьего столбца;
в) получив предварительно нули в первой строке.

Решение.
а) По теореме о разложении определителя по элементам второй строки получим:

$$\det A = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{24}\cdot A_{24}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$=-4\cdot(-18-4+0+2+12-0) -2\cdot(12+12+12-6-36-8) -3\cdot(0-9-3-0+2+27)+2\cdot(0-18-12-0+4+36)=$
$=-4\cdot(-8)-2\cdot(-14)-3\cdot17+2\cdot10=32+28-51+20=29.$

б) При разложении определителя по элементам четвертого столбца получим:

$$\det A = a_{14}\cdot A_{14} + a_{24}\cdot A_{24} + a_{34}\cdot A_{34} + a_{44}\cdot A_{44}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$=-1\cdot(0-12-9-0+8+24)+2\cdot(0-18-12-0+4+36)-1\cdot(-16-27-16+24+6+48)+3\cdot(-8-27+0+24-0+24)=$
$=-11+20-19+39=29.$

в) Вычислим определитель, получив предварительно нули в первой строке. Для этого используем свойство 6 определителей. При получении нулей в строке работаем со столбцами. Прибавим к элементам третьего столбца соответствующие элементы первого столбца, умноженные на (-2), затем к элементам первого столбца прибавим элементы четвертого столбца, умноженные на (-2). И, наконец, к элементам второго столбца прибавим элементы четвертого столбца, умноженные на 3. Тогда в первой строке все элементы, кроме последнего, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & 8 & -2 \end{vmatrix} = -(0+48-40-45+8+0) = -(-29) = 29.$$

Задание 2. Даны две матрицы A и B. Найти:
а) $5A+B$; б) $A\cdot B$; в) A^{-1}; г) $A\cdot A^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение.

а) $5A+B = 5\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 25 \\ 15 & 15 & 30 \\ 20 & 15 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 26 \\ 17 & 18 & 33 \\ 21 & 13 & 19 \end{bmatrix}.$

б) Произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$ имеет смысл, так как в этих произведениях число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Имеем:

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4+5 & -2+6-10 & 2+6-5 \\ 3+6+6 & -3+9-12 & 3+9-6 \\ 4+6+4 & -4+9-8 & 4+9-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 3 \\ 15 & -6 & 6 \\ 14 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Вычислим $B\cdot A$:

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3+4 & 2-3+3 & 5-6+4 \\ 4+9+12 & 4+9+9 & 10+18+12 \\ 2-6-4 & 2-6-3 & 5-12-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 25 & 22 & 40 \\ -8 & -7 & -11 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $A\cdot B \neq B\cdot A$.

в) Обратная матрица A^{-1} для матрицы A имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24+48+45-60-36-24 = -3 \neq 0,$$

то есть матрица A – невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12-18 = -6,$

$A_{12} = (-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(12-24) = 12,$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3&3\\4&3\end{vmatrix}=9-12=-3,$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2&5\\3&4\end{vmatrix}=-(8-15)=7,$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&5\\4&4\end{vmatrix}=8-20=-12,$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2&2\\4&3\end{vmatrix}=-(6-8)=2,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}=12-15=-3,$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}=-(12-15)=3,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}=6-6=0.$$

Тогда получим:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-6&7&-3\\12&-12&3\\-3&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-\frac{7}{3}&1\\-4&4&-1\\1&-\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}.$$

г) Для матриц A и A^{-1} верно равенство $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{bmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\begin{bmatrix}-6&7&-3\\12&-12&3\\-3&2&0\end{bmatrix}==-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-12+24-15&14-24+10&-6+6+0\\-18+36-18&21-36+12&-9+9+0\\-24+36-12&28-36+8&-12+9+0\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Найдем $A^{-1}\cdot A$:

$$A^{-1}\cdot A=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\begin{bmatrix}-6&7&-3\\12&-12&3\\-3&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-12+21-12&-12+21-9&-30+42-12\\24-36-12&24-36-9&60-72+12\\-6+6+0&-6+6+0&-15+12+0\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица найдена верно.

Задание 3. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её:
а) по формулам Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса.

Решение.

Совместность данной системы уравнений проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранги матриц A и $\overline{A}$. Для этого приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду. Элементы первой строки умножим на ½, затем к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-1), а ко второй строке первую, умноженную на (-4). Далее к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на -½.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1.5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы A данной системы равен трем и совпадает с рангом расширенной матрицы $\overline{A}$, число неизвестных системы также равно 3. Следовательно, система совместна и имеет единственное решение.

а) Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-4+8-2-8+8=6.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0-16+12-8-0+12=0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =24+0+32-12-32-0=12,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} =8-6+0-0-12+16=6,$$

Находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{6} = 0;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1.$$

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение системы имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Обратную матрицу A^{-1} найдем по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Для элементов матрицы A найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8-4) = -4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-2) = 4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решением системы будет:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0+24-24 \\ 0+12-0 \\ 0-18+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

в) Решим систему уравнений методом Гаусса, для этого с помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к единичной матрице.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1.5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1.5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Получаем решение системы $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Задание 4. Даны точки $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$ и $D(0,-1,2)$.

а) Найти длину вектора $5\vec{AB} - 2\vec{CD}$.

Координаты векторов $\vec{AB} = \{-12; -2; 2\}$ и $\vec{CD} = \{-3; 3; 8\}$,

найдем координаты вектора $5\vec{AB} - 2\vec{CD}$:

$5 \cdot \{-12; -2; 2\} - 2 \cdot \{-3; 3; 8\} = \{-60 + 6; -10 - 6; 10 - 16\} = \{-54; -16; -6\}$.

Длину вектора найдем по формуле $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, получим

$$\left|5\vec{AB} - 2\vec{CD}\right| = \sqrt{(-54)^2 + (-16)^2 + (-6)^2} = \sqrt{2916 + 256 + 36} = \sqrt{3208} = 2\sqrt{802}.$$

б) Найти скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{AB} = \{-12; -2; 2\}$ и $\vec{AC} = \{-7; -10; -9\}$ будет:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-12) \cdot (-7) + (-2) \cdot (-10) + 2 \cdot (-9) = 84 + 20 - 18 = 86.$$

в) Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Для нахождения косинуса угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ воспользуемся формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

Для этого найдем длины векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{144+4+4} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38},$$

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-10)^2 + (-9)^2} = \sqrt{49+100+81} = \sqrt{230}.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|} = \frac{86}{2\sqrt{38}\cdot\sqrt{230}} = \frac{43}{\sqrt{8740}} = \frac{43}{2\sqrt{2185}}.$$

г) Найти проекцию вектора $\vec{AB}$ на направление вектора $\vec{AC}$.

Проекцию вектора $\vec{AB}$ на направление вектора $\vec{AC}$ найдем по формуле:

$$np_{\vec{d}}\vec{c} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|}.$$

Получим

$$np_{\vec{AC}}\vec{AB} = \frac{86}{\sqrt{230}}.$$

д) Найти площадь треугольника ABC.

Из определения векторного произведения площадь треугольника ABC равна:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Найдем векторное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & -2 & 2 \\ -7 & -10 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -10 & -9 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -7 & -9 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} -12 & -2 \\ -7 & -10 \end{vmatrix}\cdot\vec{k},$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = 38\vec{i} - 122\vec{j} + 106\vec{k},\ т.е.\ \overline{AB}\times\overline{AC} = \{38; -122; 106\}$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{38^2 + (-122)^2 + 106^2} = \sqrt{1444+14884+11236} = \sqrt{27564} = 2\sqrt{6891}$$

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{6891}$ кв.ед.

е) Найти объем пирамиды $DABC$.

Из свойств смешанного произведения векторов имеем:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|.$$

Зная координаты векторов:

$\overline{AB} = \{-12; -2; 2\}$, $\overline{AC} = \{-7; -10; -9\}$, $\overline{AD} = \{-10; -7; -1\}$,

вычислим

$$\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-12 & -2 & 2\\ -7 & -10 & -9\\ -10 & -7 & -1\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}6 & 1 & -1\\ 7 & 10 & 9\\ 10 & 7 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot(60+90-49+100-7-378)=-2\cdot(-184)=368$$

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot 368=\frac{184}{3} \qquad V_{пир}=61\frac{1}{3}(куб.ед.)$$

Задание 5. Даны вершины треугольника $A(-4;4)$, $B(6,2)$, $C(-1,8)$. Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты AH;
в) уравнение медианы CM;
г) точку N пересечения медианы CM и высоты AH;
д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
е) тангенс угла B;
ж) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение.
а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, получим уравнение прямой AB:
$A(-4;4)$, $B(6,2)$

$$\frac{x-4}{6-4}=\frac{y+4}{2+4};$$

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+4}{6}.$$

Следовательно,

$$3x-12=y+4$$

Тогда имеем

$$AB:\ 3x-y-16=0.$$

б) Так как высота AH перпендикулярна стороне BC, то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением $k_{AH}=-\frac{1}{k_{BC}}$. Найдем угловой коэффициент прямой BC:

$$k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-2}{-1-6}=-\frac{6}{7}.$$

По точке $A(-4;4)$ и угловому коэффициенту $k_{AH}=\frac{7}{6}$ составим уравнение прямой AH:

$$y-4=\frac{7}{6}\cdot(x+4),$$

или

$$y=\frac{7}{6}x+\frac{26}{3},$$

$$AH:\ 7x-6y+52=0.$$

в) Так как CM – медиана, то точка M – середина AB. Найдем координаты точки M:

$M\left(\frac{-4+6}{2};\frac{4+2}{2}\right)$, $M(1;3)$.

По двум известным точкам $M(1;3)$ и $C(-1,8)$ составляем уравнение медианы CM:

$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-8}{3-8}$;

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-8}{-5}$

или

CM: $5x+2y-11=0$.

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы CM и высоты AH составляем систему уравнений:

$\begin{cases}7x-6y+52=0,\\5x+2y-11=0\end{cases}$.

Умножим второе уравнение на 3 и прибавим к первому:

$+\begin{cases}7x-6y+52=0,\\15x+6y-33=0\end{cases}$

Получаем

$22x-19=0$

$x=\frac{19}{22}$,

$5\cdot\frac{19}{22}+2y-11=0,$

$y=\frac{147}{44}$.

Итак, точка $M\left(\frac{19}{22};\frac{147}{44}\right)$.

д) Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то ее угловой коэффициент $k=k_{AB}$=3.

$y=3x+b$,

$8=-3+b\Rightarrow b=8+3=11$.

Получаем уравнение искомой прямой

$y=3x+11$.

е) Тангенс угла B найдем по формуле:

$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, где $k_1=k_{AB}$=3, $k_2=k_{BC}=-\frac{6}{7}$.

Тогда

$$tg\,\varphi = \frac{3+\dfrac{6}{7}}{1-3\cdot\dfrac{6}{7}} = \frac{21+6}{7-18} = -\frac{27}{11}.$$

ж) Расстояние от точки $C(-1,8)$ до прямой AB: $3x-y-16=0$ вычисляем по формуле:

$$d = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3\cdot(-1)-1\cdot 8-16|}{\sqrt{9+1}} = \frac{27\sqrt{10}}{10}.$$

Задание 6. Даны точки $A_1(3,5,4)$, $A_2(8,7,4)$, $A_3(5,10,4)$, $A_4(4,7,8)$.
Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Найти:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) Используя формулу уравнения плоскости, проходящей через три точки, составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$. Подставим координаты точек $A_1(3,5,4)$, $A_2(8,7,4)$, $A_3(5,10,4)$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 8-3 & 7-5 & 4-4 \\ 5-3 & 10-5 & 4-4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-3)\cdot 2\cdot 0+(y-5)\cdot 0\cdot 2+(z-4)\cdot 5\cdot 5-(z-4)\cdot 2\cdot 2-(x-3)\cdot 5\cdot 0-(y-5)\cdot 5\cdot 0=0$;

$0+0+25z-100-4z+16-0-0=0$;

$21z-84=0$.

Разделим обе части уравнения на 4, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид: $z-4=0$.

б) Зная координаты $A_1(3,5,4)$ и $A_2(8,7,4)$, составим уравнение прямой A_1A_2:

$$\frac{x-3}{8-3} = \frac{y-5}{7-5} = \frac{z-4}{4-4}.$$

Получаем уравнение прямой A_1A_2: $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{0}$.

в) Так как прямая A_4M перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, то в качестве направляющего вектора прямой $\vec{s}$ можно взять нормальный вектор $\vec{n} = \{0;0;1\}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M запишется в виде:

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-8}{0} = \frac{z-9}{1}.$$

г) Прямые A_3N и A_1A_2 параллельны, поэтому в качестве направляющего вектора для прямой A_3N можно использовать направляющий вектор $\vec{s} = \{5;2;0\}$ прямой A_1A_2:

$$\frac{x-5}{5} = \frac{y-10}{2} = \frac{z-4}{0}.$$

д) Плоскость перпендикулярна прямой, следовательно, за нормальный вектор плоскости можно принять направляющий вектор прямой A_1A_2.

Подставим координаты точки $A_4(4,7,8)$ и нормального вектора $\vec{n} = \{5;2;0\}$ в общее уравнение плоскости:

$$5(x-4) + 2(y-7) + 0(z-8) = 0,$$

$$5x - 20 + 2y - 14 = 0.$$

Таким образом, уравнение плоскости: $5x + 2y - 34 = 0$.

е) A_1A_4: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{4}$,

$A_1A_2A_3$: $z - 4 = 0$.

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{1;2;4\}$, а нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \{0;0;1\}$.

$$\sin\varphi = \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 21\cdot 4}{\sqrt{0+0+441}\cdot\sqrt{1+4+16}} = \frac{84}{21\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

ж) Расстояние от точки $A_4(4,7,8)$ до плоскости $z - 4 = 0$ найдем по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

тогда

$$d = \frac{|8-1|}{\sqrt{0+0+1}} = 7.$$