5. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1 Плоскость

Общее уравнение плоскости имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

если $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения плоскости (неполные уравнения плоскости).

1) Если $A=0$, то получаем уравнение

$$By+Cz+D=0.$$

Плоскость параллельна оси Ox.

Если $B=0$, то плоскость параллельна оси Oy.

Если $C=0$, то плоскость параллельна оси Oz.

2) Если $D=0$, то уравнение плоскости имеет вид

$$Ax+By+Cz=0.$$

Плоскость проходит через начало координат.

3) Если $C=D=0$, то уравнение примет вид

$$Ax+By=0.$$

Плоскость проходит через ось Oz.

Аналогично,
если $A=D=0$, то плоскость проходит через ось Ox;
если $B=D=0$, то плоскость проходит через ось Oy.

4) Если $A=B=0$, то уравнение плоскости принимает вид $Cz+D=0$. Плоскость параллельна координатной плоскости Oxy.

Аналогично, $Ax+D=0$ – уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz; $By+D=0$ – уравнение плоскости, параллельной плоскости Oxz.

5) Если $A=B=D=0$, то уравнение плоскости имеет вид $Cz=0$, $z=0$. Это уравнение координатной плоскости Oxy. Аналогично, $y=0$ – уравнение плоскости Oxz, $x=0$ – уравнение плоскости Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0,\mathrm{z}_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A,B,C\}$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где $\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости p, $\vec{n}\perp p$ (рис. 17).

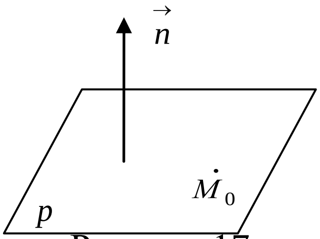

Рисунок 17

Уравнение плоскости в «отрезках» (рис.18)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

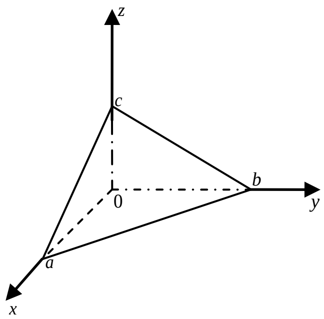

Рисунок 18

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1)$, $\mathrm{M}_2(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2)$ и $\mathrm{M}_3(\mathrm{x}_3, \mathrm{y}_3, \mathrm{z}_3)$, не лежащие на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Расстояние d от точки $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5.2 Прямая в пространстве

Общее уравнение прямой в пространстве (прямая как линия пересечения двух плоскостей)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{l, m, n\}$, где $\vec{a}$ – направляющий вектор прямой (рис. 19), имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

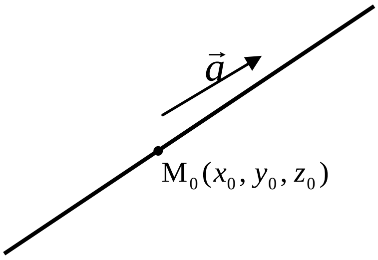

Рисунок 19

Параметрические уравнения можно получить из канонических уравнений, введя параметр t

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t, \\ y = y_0 + m\,t, \\ z = z_0 + n\,t \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{M}_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол φ между прямыми $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ и $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Пример 4.4. Даны точки $A_1(3,5,4)$, $A_2(8,7,4)$, $A_3(5,10,4)$, $A_4(4,7,8)$.
Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Найти:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) Используя формулу уравнения плоскости, проходящей через три точки, составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 8-3 & 7-5 & 4-4 \\ 5-3 & 10-5 & 4-4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-3)\cdot 2\cdot 0 + (y-5)\cdot 0\cdot 2 + (z-4)\cdot 5\cdot 5 - (z-4)\cdot 2\cdot 2 - (x-3)\cdot 5\cdot 0 - (y-5)\cdot 5\cdot 0 = 0$;

$0 + 0 + 25z - 100 - 4z + 16 - 0 - 0 = 0$;

$21z - 84 = 0$.

Отсюда получим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$

$$z - 4 = 0.$$

б) Зная координаты $A_1(3,5,4)$ и $A_2(8,7,4)$, составим уравнение прямой A_1A_2

$$\frac{x-3}{8-3} = \frac{y-5}{7-5} = \frac{z-4}{4-4}.$$

Получаем уравнение прямой A_1A_2

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{0}.$$

в) Так как прямая A_4M перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, то в качестве направляющего вектора прямой $\vec{s}$ можно взять нормальный вектор $\vec{n}=\{0;0;1\}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M запишется в виде

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y-8}{0}=\frac{z-9}{1}.$$

г) Прямые A_3N и A_1A_2 параллельны, поэтому в качестве направляющего вектора для прямой A_3N можно использовать направляющий вектор $\vec{s}=\{5;2;0\}$ прямой A_1A_2:

$$\frac{x-5}{5}=\frac{y-10}{2}=\frac{z-4}{0}.$$

д) Плоскость перпендикулярна прямой, следовательно, за нормальный вектор плоскости можно принять направляющий вектор прямой A_1A_2.
Подставим координаты точки $A_4(4,7,8)$ и нормального вектора $\vec{n}=\{5;2;0\}$ в общее уравнение плоскости
$5(x-4)+2(y-7)+0(z-8)=0$,
$5x-20+2y-14=0$.
Таким образом, уравнение плоскости $5x+2y-34=0$.

е) A_1A_4: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-4}{4}$,
$A_1A_2A_3$: $z-4=0$.
Направляющий вектор прямой $\vec{s}=\{1;2;4\}$, а нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\{0;0;1\}$.

$$\sin\varphi=\frac{0\cdot1+0\cdot2+21\cdot4}{\sqrt{0+0+441}\cdot\sqrt{1+4+16}}=\frac{84}{21\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

ж) Расстояние от точки $A_4(4,7,8)$ до плоскости $z-4=0$ найдем по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

тогда

$$d=\frac{|8-1|}{\sqrt{0+0+1}}=7.$$

5.3 Контрольные вопросы

1. Записать общее уравнение плоскости.
2. Какой вектор называется нормальным вектором плоскости?
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору.
4. Как вычислить угол между плоскостями?

5. Указать условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
6. Как вычислить угол между прямой и плоскостью?
7. Какие условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости?
8. Как выяснить, что прямая и плоскость имеют точку пересечения, прямая принадлежит плоскости, прямая параллельна плоскости и не принадлежит ей?