4 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

4.1 Декартова система координат на плоскости

Прямоугольная (декартова) система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми (осями) и единичным отрезком. Горизонтальную ось называют осью абсцисс (ось Ox), вертикальную ось называют осью ординат (ось Oy). Точку пересечения осей O называют началом координат (рис.12).

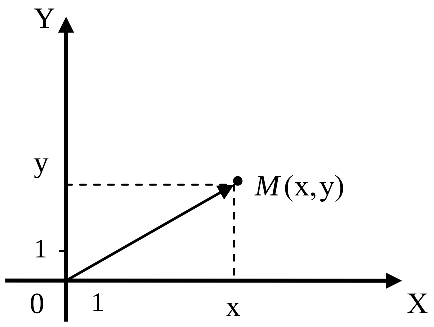

Рисунок 12

4.2 Простейшие задачи аналитической геометрии

1. Расстояние между двумя точками

Если на плоскости даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то расстояние d между ними вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

2. Деление отрезка в данном отношении

Если точка $C(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через данные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, и делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$, то координаты точки C определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}\ .$$

В частности, если точка $C(x; y)$ делит отрезок AB пополам, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ .$$

3. Координаты центра тяжести однородной треугольной пластины

Даны вершины однородной треугольной пластины $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Тогда координаты ее центра тяжести $D(x; y)$ находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\ .$$

Замечание. Центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан.

4.3 Линия на плоскости

Положение линии на плоскости, имеющей систему координат, определяется ее уравнением.

Уравнением линии на плоскости Oxy называется уравнение вида $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называются текущими координатами точек линии.

Нахождение точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, сводится к решению системы двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных корней, то линии не пересекаются.

4.4 Прямая на плоскости

Уравнение вида $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$ называется общим уравнением прямой на плоскости.

Уравнение $y=kx+b$ ($k=tg\alpha$, α – угол наклона прямой к оси Ox) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

В частности, $y=kx$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат,

$x=0$ – уравнение прямой, совпадающей с осью ОУ,

$y=0$ – уравнение прямой, совпадающей с осью ОХ.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом k

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},$$

где

$\vec{a}=\{l,m\}$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный этой прямой).

$M_0(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая этой прямой (рис.15).

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

где t – любое число, параметр,

$\vec{a} = \{l, m\}$ – направляющий вектор прямой,

$M_0(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая этой прямой.

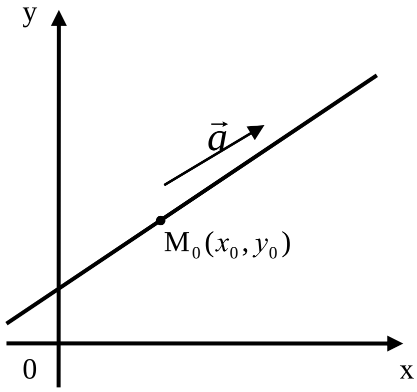

Рисунок 15

Уравнение прямой в «отрезках» (рис.16)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

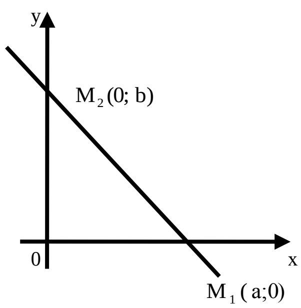

Рисунок 16

Если прямые заданы уравнениями

$$y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2 x + b_2,$$

то угол φ между ними находится по формуле

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

$k_1 = k_2$ – условие параллельности прямых,

$k_1 \cdot k_2 = -1$ – условие перпендикулярности прямых.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 4.3. Даны вершины треугольника $A(-4;4)$, $B(6,2)$, $C(-1,8)$. Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты AH;
в) уравнение медианы CM;
г) точку N пересечения медианы CM и высоты AH;
д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
е) тангенс угла B;
ж) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение.

а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, получим уравнение прямой AB:

$A(-4;4)$, $B(6,2)$

$\frac{x-4}{6-4} = \frac{y+4}{2+4}$;

$\frac{x-4}{2} = \frac{y+4}{6}$.

Следовательно,

$3x - 12 = y + 4$

Тогда имеем

AB: $3x - y - 16 = 0$.

б) Так как высота AH перпендикулярна стороне BC, то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}}$. Найдем угловой коэффициент прямой BC:

$$k_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{-1-6} = -\frac{6}{7}.$$

По точке $A(-4;4)$ и найденному угловому коэффициенту $k_{AH} = \frac{7}{6}$ составим уравнение прямой AH:

$$y - 4 = \frac{7}{6} \cdot (x + 4),$$

или

$$y = \frac{7}{6}x + \frac{26}{3}.$$

Получаем уравнение AH: $7x - 6y + 52 = 0$.

в) Так как CM – медиана, то точка M – середина AB. Найдем координаты точки M:

$M\left(\frac{-4+6}{2};\frac{4+2}{2}\right)$, $M(1;3)$.

По двум известным точкам $M(1;3)$ и $C(-1,8)$ составим уравнение медианы CM:

$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-8}{3-8}$;

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-8}{-5}$

или

CM: $5x+2y-11=0$.

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы CM и высоты AH составляем систему уравнений:

$$\begin{cases}7x-6y+52=0,\\ 5x+2y-11=0\end{cases}.$$

Умножим второе уравнение на 3 и прибавим к первому:

$+\begin{cases}7x-6y+52=0,\\ 15x+6y-33=0\end{cases}$

Получаем

$22x-19=0$

$x=\frac{19}{22}$,

$5\cdot\frac{19}{22}+2y-11=0,$

$y=\frac{147}{44}.$

Итак, точка $N\left(\frac{19}{22};\frac{147}{44}\right)$.

д) Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то ее угловой коэффициент $k=k_{AB}$=3.

$y=3x+b$,

$8=-3+b\Rightarrow b=8+3=11$.

Получаем уравнение искомой прямой

$$y=3x+11.$$

е) Тангенс угла B найдем по формуле:

$$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

где

$$k_1=k_{BC}=-\frac{6}{7},\ k_2=k_{AB}=3.$$

Тогда

$$tg\,\varphi = \frac{3+\frac{6}{7}}{1-3\cdot\frac{6}{7}} = \frac{21+6}{7-18} = -\frac{27}{11}.$$

ж) Расстояние от точки $C(-1,8)$ до прямой AB: $3x-y-16=0$ вычислим по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

тогда

$$d = \frac{|3\cdot(-1) - 1\cdot 8 - 16|}{\sqrt{9+1}} = \frac{27\sqrt{10}}{10}.$$

4.5 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение системы координат на плоскости.
2. Как определяется прямоугольная система координат?
3. Как задают на плоскости полярную систему координат?
4. Дайте определение полярных координат точки на плоскости.
5. Как выражаются полярные координаты точки на плоскости через ее декартовы координаты?
6. Как найти расстояние между двумя данными точками?
7. Укажите формулу деления отрезка в данном отношении.
8. Как вычислить координаты центра тяжести однородной треугольной пластины?
9. Как найти площадь треугольника на плоскости по известным координатам его вершин?
10. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?
11. Виды уравнений прямой на плоскости?
12. Как вычислить угол между двумя прямыми?
13. Сформулируйте условия параллельности, перпендикулярности, совпадения и пересечения двух прямых на плоскости.